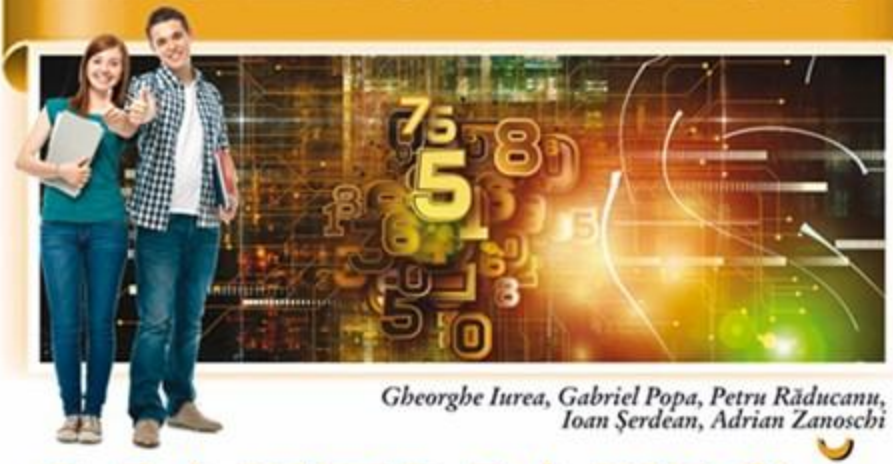
ACTUALIZAT conform Ordin M.E.N. nr. 4430 din 04.09.2014

BACALAUREAT 2015



Gheorghe Iurea, Gabriel Popa, Petru Răducanu,
Ioan Şerdean, Adrian Zanoschi

MATEMATICĂ

M_mate-info

50 de teste rezolvate după modelul M.E.N.

EDITURA PARALELA 45

Adrian Zanoschi
Gabriel Popa
Gheorghe Iurea
Petru Răducanu
Ioan Șerdean

Bacalaureat 2015
Matematică
M_mate-info

Teme recapitulative
50 de teste, după modelul M.E.N.
Breviar teoretic

PARALELA 45
EDITURA

Alexandra

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Lucrare elaborată în conformitate cu programa şcolară pentru Bacalaureat 2015, aprobată prin O.M.E.N. nr. 4430/04.09.2014.

Programa pentru Bacalaureat 2015. Matematică M_mate-info. poate fi accesată la http://www.edituraparalela45.ro/titlu_detaliu.php?idtitlu=1640

Referent ştiinţific: prof. Cristian Alexandrescu

Editor: Călin Vlasie

Redactor: Mugur Butuza
Corectură: autorii
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu; Adriana Vlădescu; Marius Botofei
Coperta colecţiei: Ionuţ Broştianu
Prepress: Marius Badea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Bacalaureat 2015 : Matematică M_mate-info : teme recapitulative, 50 de teste rezolvate, după modelul M.E.N. : breviar teoretic /
Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea, Gabriel Popa... - Piteşti : Paralela 45, 2014
Bibliogr.
ISBN 978-973-47-1970-9

I. Zanoschi, Adrian
II. Iurea, Gheorghe
III. Popa, Gabriel

51(075.35)(079.1)
371.279.8:373.5

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45
Piteşti, jud. Argeş, cod 110174, str. Fraţii Goleşti 130
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444
0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492.
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesaţi **www.edituraparalela45.ro**

Tipar executat la *Tipografia Everest*

Copyright © Editura Paralela 45, 2014
Prezenta lucrare foloseşte denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conţinutul este protejat de legislaţia privind dreptul de proprietate intelectuală.

Chelea

CALENDARUL EXAMENULUI DE BACALAUREAT – 2015

Sesiunea iunie–iulie 2015

25–29 mai 2015	Înscrierea candidaților la prima sesiune de examen
29 mai 2015	Încheierea cursurilor pentru clasa a XII-a/a XIII-a
8–10 iunie 2015	Evaluarea competențelor lingvistice de comunicare orală în limba română – proba A
10–12 iunie 2015	Evaluarea competențelor lingvistice de comunicare orală în limba maternă – proba B
15–19 iunie 2015	Evaluarea competențelor digitale – proba D
22–26 iunie 2015	Evaluarea competențelor lingvistice într-o limbă de circulație internațională – proba C
29 iunie 2015	Limba și literatura română – proba E)a) – probă scrisă
30 iunie 2015	Limba și literatura maternă – proba E)b) – probă scrisă
1 iulie 2015	Proba obligatorie a profilului – proba E)c) – probă scrisă
3 iulie 2015	Proba la alegere a profilului și specializării – proba E)d) – probă scrisă
6 iulie 2015	Afișarea rezultatelor (până la ora 12:00)
6 iulie 2015	Depunerea contestațiilor (orele 12:00–16:00)
7–9 iulie 2015	Rezolvarea contestațiilor
10 iulie 2015	Afișarea rezultatelor finale

Sesiunea august–septembrie 2015

13–17 iulie 2015	Înscrierea candidaților la a doua sesiune de examen
17–18 august 2015	Evaluarea competențelor lingvistice de comunicare orală în limba română – proba A
17–18 august 2015	Evaluarea competențelor lingvistice de comunicare orală în limba maternă – proba B
18–19 august 2015	Evaluarea competențelor lingvistice într-o limbă de circulație internațională – proba C
20–21 august 2015	Evaluarea competențelor digitale – proba D
24 august 2015	Limba și literatura română – proba E)a) – proba scrisă
25 august 2015	Limba și literatura maternă – proba E)b) – probă scrisă
26 august 2015	Proba obligatorie a profilului – proba E)c) – probă scrisă
28 august 2015	Proba la alegere a profilului și specializării – proba E)d) – probă scrisă
31 august 2015	Afișarea rezultatelor (până la ora 12:00) și depunerea contestațiilor (orele 12:00–16:00)
1–2 septembrie 2015	Rezolvarea contestațiilor
3 septembrie 2015	Afișarea rezultatelor finale

Notă: La solicitarea comisiilor de bacalaureat județene/a municipiului București sau din proprie inițiativă, Comisia Națională de Bacalaureat poate aproba prelungirea perioadelor de susținere a probelor de evaluare a competențelor digitale sau lingvistice.

Scanned with OKEN Scanner

Cuvânt-înainte

Examenul de bacalaureat reprezintă pentru fiecare tânăr o placă turnantă în devenirea lui intelectuală şi personală, având menirea de a certifica pregătirea ştiinţifică şi competenţele dobândite în liceu, dar şi de a deschide un orizont profesional sau academic adecvat fiecăruia. În consecinţă, performanţa la acest examen, şi îndeosebi la disciplina matematică, presupune un efort de pregătire constant, atât pentru parcurgerea conţinuturilor, cât şi pentru fixare, sistematizare, recapitulare. Lucrarea de faţă îşi propune să fie un ghid eficient, cu o strategie completă, care să răspundă tuturor exigenţelor disciplinei şi ale probelor de examen.

Considerăm că cea mai bună metodă de a avea o idee clară despre cerinţele unui examen este urmărirea modului în care s-a formulat problematica acelui examen de-a lungul timpului. Din acest motiv, cele mai multe dintre problemele prezente în această carte au fost selectate dintre subiectele şi variantele de bacalaureat ale ultimilor şaisprezece ani (1999–2014).

Prima parte a lucrării conţine probleme grupate pe teme, urmărind acoperirea completă a programei. Acolo unde o anumită temă nu era destul de bine reprezentată în variantele examenelor din anii precedenţi, au fost adăugate probleme clasice, pentru o mai bună aprofundare a subiectului. Astfel, un elev îşi poate alege singur un capitol pe care vrea să îl repete şi găseşte în carte un număr suficient de exerciţii cu ajutorul cărora să-şi atingă scopul. Problemele sunt însoţite de soluţii detaliate şi de comentarii metodice, unele dintre ele având chiar mai multe rezolvări.

Partea a doua cuprinde 50 de teste, incluzând subiecte date în anii 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013 şi 2014 la cele trei sesiuni ale bacalaureatului (sesiunea specială pentru olimpici şi cele din iunie şi august). Testele sunt însoţite de răspunsuri şi de rezolvări, iar la sfârşit există un breviar teoretic, care conţine principalele noţiuni prevăzute în programă.

Cartea se adresează celor care se pregătesc pentru bacalaureatul la matematică, indiferent de profilul liceului pe care îl urmează. Din acest motiv, problemele sunt structurate pe două niveluri, cele mai dificile fiind evidenţiate printr-o steluţă. Elevii care nu urmează profilul matematică-informatică pot parcurge doar problemele fără steluţă.

Lucrarea poate fi folosită şi pentru învăţarea curentă, deoarece permite elevilor să se antreneze în condiţii reale, de bacalaureat. Ea se poate dovedi un instrument util profesorilor şi elevilor în vederea recapitulării materiei la finalul unui capitol sau la sfârşitul anului şcolar.

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

Teme recapitulative

Clasa a IX-a

1.1. Numere reale

1. Ordonați crescător numerele $a = 2{,}010$, $b = 2{,}0(10)$ și $c = 2{,}(010)$.

2. Arătați că numărul $a = 2 \cdot \left[0{,}(3) + 0{,}1(6)\right]$ este natural.

3. Determinați cardinalul mulțimii $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{x+2}{x-3} \in \mathbb{Z} \right\}$. *(Variante Bac, 2008)*

4. Se consideră numărul rațional $\frac{1}{21} = 0,a_1a_2...a_n...$.

a) Calculați $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2003}$.

b) De câte ori apare cifra 4 printre cifrele $a_1, a_2, \ldots, a_{2003}$?

c) Calculați $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2003}$. *(Variante Bac, 2003)*

5. Determinați cardinalul mulțimii $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$, unde $A = (-3, 4]$, iar $B = (1, 5]$. *(Variante Bac, 2009)*

6. Determinați $A = (\sqrt{3}, \sqrt{7}) \cap \mathbb{Z}$.

7. Fie $A = (-3, 2]$. Determinați $A \cap \mathbb{Z}$ și $A \cap \mathbb{N}$.

8. Se consideră numerele $a = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{8}$ și $b = \sqrt{162} + \sqrt{18} + \sqrt{72}$. Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b.

9. Arătați că numărul $a = \left(\sqrt{168} + 4 \cdot \sqrt{\frac{21}{2}} - 6 \cdot \sqrt{\frac{14}{3}}\right) \cdot \left(\sqrt{4\frac{2}{3}}\right)^{-1}$ este natural.

10. Arătați că $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ este număr natural. *(Variante Bac, 2008)*

11. Dacă $x \in [0, 51]$, demonstrați că numărul $a = \sqrt{x+49} + \sqrt{x+625}$ se află în intervalul $[32, 36]$.

12. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ și $E(x, y) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{y^2 + 6y + 10}$. Arătați că $E(x, y) \geq 3$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

13. a) Arătați că $\left(2 + \sqrt{3}\right)^2 = 7 + 4\sqrt{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Demonstrați că numărul $a=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ este natural. *(Variante Bac, 2009)*

14. Arătați că numărul $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ aparține mulțimii $A=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$. *(Variante Bac, 2009)*

15. Scrieți două numere raționale și două numere iraționale cuprinse între 0,001 și 0,00(1).

16. Se consideră expresia $E(x)=x^2-3x+2$, $x\in\mathbb{R}$. Găsiți un număr irațional a, astfel încât $E(a)$ să fie număr natural. *(Variante Bac, 2003)*

17. Arătați că numerele $2-\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sunt iraționale.

18. a) Dacă $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ și $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$, atunci $a=c$ și $b=d$.

b) Determinați numerele raționale x,y, știind că $x(1+\sqrt{2})^2+y(1-\sqrt{2})=1$.

19. Determinați numărul rațional a, știind că numărul $a\sqrt{2}$ este rațional.

20. Determinați numerele raționale a și b, dacă $(2a-b)-2b\sqrt{3}=3+2\sqrt{3}$.

21. Considerăm mulțimea $A=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$.

a) Arătați că $(1-\sqrt{2})^2\in A$.

b) Arătați că $\sqrt{3-2\sqrt{2}}\in A$.

c) Arătați că $\sqrt{3}\notin A$. *(Variante Bac, 2005)*

22. Fie a un număr real astfel încât $a^7\in\mathbb{Q}$ și $a^{10}\in\mathbb{Q}$. Arătați că $a^n\in\mathbb{Q}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

23. Determinați partea întreagă a numerelor $a=\dfrac{7}{5\sqrt{2}-1}$ și $b=(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$. *(Variante Bac, 2008)*

24. Fie $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, arătați că $a\cdot\{a\}\in\mathbb{Q}$.

25. Arătați că numărul $a=\{\sqrt{2}\}+\{\sqrt{3}\}-\{\sqrt{2}+\sqrt{3}\}$ este număr natural.

26. Calculați $a=[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$ și $b=[\sqrt{2008}]+3\cdot\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x, iar $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x. *(Variante Bac, 2008)*

27. Se consideră sumele $S_n=\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Verificați identitatea $\dfrac{2}{n(n+2)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

b) Demonstrați că $S_n=\dfrac{n}{2n+1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

c) Arătați că toate numerele S_n au aceeași parte întreagă.

Scanned with OKEN Scanner

d) Determinați valorile lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care partea fracționară a numerelor S_n este cuprinsă în intervalul $\left[\frac{114}{315}, \frac{14}{35}\right]$. *(Variante Bac, 2001)*

28. Câte numere întregi d au proprietatea că $\left[\frac{2d}{3}\right] = 2$? *(Variante Bac, 2007)*

29. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $|x-2| = 5$; b) $|1-2x| = |x+4|$. *(Variante Bac, 2009)*

30. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $|1-2x| \leq 3$; b) $|x+3| \geq 4$.

31. Arătați că valoarea expresiei $E(x) = |4x-8| - 2|4-2x|$, $x \in \mathbb{R}$, nu depinde de x.

(Variante Bac, 2009)

32. Determinați numărul elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x+1| \leq 2014\}$.

33*. Demonstrați că $|2x-3| + 2|x-1| \geq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

34. Numerele reale a și b au suma 5 și produsul 2. Calculați $x = a^2 + b^2$ și $y = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

(Variante Bac, 2009)

35. Se consideră mulțimea $A = \{x^2 - y^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

a) Arătați că $0 \in A$, $1 \in A$, dar $2 \notin A$.

b) Verificați identitatea $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

c) Demonstrați că A conține toate numerele întregi impare. *(Variante Bac, 2002)*

36*. a) Verificați identitatea $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Verificați identitatea $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Dacă a, b, c sunt numere reale nenegative și $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, demonstrați că $a = b = c$.

(Variante Bac, 2001)

37. Dacă $x, y \in [2, \infty)$, demonstrați că $xy - 2x - 2y + 6 \in [2, \infty)$. *(Variante Bac, 2009)*

38*. Dacă $x, y \in (-1, 1)$, demonstrați că $\frac{x+y}{1+xy} \in (-1, 1)$. *(Variante Bac, 2006)*

39. a) Demonstrați că $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Deduceți că, dacă a, b sunt numere reale nenule cu același semn, atunci $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

c) Arătați că $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

40. Se consideră expresia $E(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Verificați că $E(x)=(x^2+1)(x^2+x+1)$.

b) Arătați că $E(x)\geq \frac{3}{4}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2001)*

41. Demonstrați că $x^2+3xy+4y^2\geq 0$, $\forall\, x, y\in\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2009)*

42*. Demonstrați că $1-\frac{x}{2}\leq\frac{1}{\sqrt{1+x}}\leq 1, \forall\, x\geq 0$. *(Variante Bac, 1999)*

43. a) Verificați identitatea $\left(a-\frac{1}{a}\right)^3=a^3-\frac{1}{a^3}-3\left(a-\frac{1}{a}\right)$, $\forall\, a\in\mathbb{R}^*$.

b) Dacă $a\in\mathbb{R}$, $a\geq 1$, demonstrați că $a\geq\frac{1}{a}$.

c) Arătați că $x^3-\frac{1}{x^3}\geq 3\left(x-\frac{1}{x}\right)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}, x\geq 1$. *(Variante Bac, 2002)*

44. Demonstrați că pentru orice numere reale pozitive x, y are loc inegalitatea mediilor:

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\leq\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}.$$

45*. a) Demonstrați că $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, $\forall\, a, b, c\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $a^4+b^4+c^4\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$, $\forall\, a, b, c\in\mathbb{R}$.

c) Arătați că $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$, $\forall\, a, b, c\in\mathbb{R}$.

46. Fie a, b, c numere reale pozitive. Arătați că:

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$.

b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}$.

47*. a) Verificați identitatea (Lagrange):

$(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$, $\forall\, x, y, z, a, b, c\in\mathbb{R}$.

b) Deduceți inegalitatea (Cauchy–Buniakowsky–Schwarz):

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(ax+by+cz)^2$, $\forall\, x, y, z, a, b, c\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Dacă în inegalitatea de la b) se atinge egalitatea, iar numerele x, y, z, a, b, c sunt nenule, demonstrați că $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. *(Variante Bac, 2002)*

48*. Dacă $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$, $x \le y \le z$, $a, b, c \ge 0$ și $a+b+c=1$, arătați că $x \le ax+by+cz \le z$. *(Variante Bac, 2002)*

1.2. Tipuri de raționamente logice

1. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „Suma oricăror două numere iraționale este număr irațional". *(Variante Bac, 2008)*

2. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „Dacă $x \in [1, 3]$ și $y \in [-1, 2]$, atunci $x-y \in [-1, 4]$".

3*. Negați propoziția: „Oricare ar fi numerele naturale x și y, atunci x divide y sau y divide x."

4*. Negați propoziția: „Dacă numărul natural x se divide cu 4, atunci x se divide cu 2."

5. Demonstrați că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ și $a+b<c+d$, atunci $a<c$ sau $b<d$. Reciproca este adevărată?

6. Fie a, b, c, d numere raționale. Demonstrați că $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$ dacă și numai dacă $a=c$ și $b=d$. *(Variante Bac, 2007)*

7. Demonstrați că oricare ar fi trei numere prime mai mari decât 3, putem alege două dintre ele a căror diferență să fie divizibilă cu 6.

8. Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

(Variante Bac, 1998)

9. Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$. *(Variante Bac, 1998)*

10. Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$. *(Variante Bac, 2001)*

11. Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$. *(Variante Bac, 2001)*

12. Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}.$$

(Variante Bac, 1999)

Scanned with OKEN Scanner

13. Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, are loc egalitatea

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}.$$ *(Variante Bac, 2001)*

14. Demonstrați că $0<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}<\sqrt{\frac{3}{2n+3}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *(Variante Bac, 2001)*

15. a) Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $A_n = n^3 + 5n$ se divide cu 6.

b) Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $B_n = 2^{4n+4} - 2$ se divide cu 30.

16*. Fie x, y două numere reale, astfel încât $x + y = 4$, iar $xy = 1$. Notăm $S_n = x^n + y^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Calculați S_0, S_1, S_2.

b) Demonstrați că $S_n = 4S_{n-1} - S_{n-2}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

c) Arătați că $S_n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *(Variante Bac, 2000)*

17. Determinați numărul elementelor mulțimii $A = \{1, 2^4, 2^8, 2^{12}, \ldots, 2^{400}\}$.

18. Câte numere naturale de trei cifre au suma cifrelor egală cu 24? *(Variante Bac, 2001)*

19. Câte numere de patru cifre se pot forma utilizând cifrele 1, 2 și 3? *(Variante Bac, 2003)*

20. Câte numere de trei cifre distincte se pot forma utilizând cifrele 2, 3, 4 și 5? *(Variante Bac, 2007)*

21. Câte numere de trei cifre distincte, divizibile cu 5, se pot forma utilizând cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5? *(Variante Bac, 2008)*

22. Câte numere de cinci cifre putem forma cu cifre din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ dacă:

a) cifrele sunt distincte;

b) cifrele nu sunt neapărat distincte?

23. Câte numere de trei cifre au exact două cifre egale?

24. Cu cifrele 1, 2, 5, 7, 8, 9 formăm numere de patru cifre distincte.

a) Câte numere sunt?

b) Câte dintre aceste numere încep cu cifra 7?

c) Câte dintre aceste numere încep cu 1 și se termină cu 9?

25. Câte numere de trei cifre au toate cifrele impare?

26. În câte moduri se poate îmbrăca Dan pentru un meci de tenis, dacă are 5 tricouri, 4 perechi de pantaloni scurți și 3 perechi de pantofi de sport?

27. Numărul de înmatriculare al unui automobil dintr-un județ este format din două cifre (nu este permisă combinația 00) și din trei litere ale alfabetului latin (care are 26 de litere). Câte autovehicule se pot înmatricula în județul Iași?

28. Se consideră mulțimea $A = \{10, 11, 12, \ldots, 99\}$.

a) Câte elemente conține A?

b) Câte elemente din A au în scrierea lor cifre egale?

c) Câte elemente din A conțin cifra 2 în scrierea lor? *(Variante Bac, 2003)*

Scanned with OKEN Scanner

29. Câte elemente din mulțimea $\{12, 13, \ldots, 52\}$ nu sunt divizibile cu 4? *(Variante Bac, 2008)*

30. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$.
a) Câte elemente ale lui A se divid cu 6 și cu 8?
b) Câte elemente ale lui A se divid cu 6, dar nu și cu 8?
c) Câte elemente ale lui A se divid cu 6 sau cu 8? *(Variante Bac, 2008)*

31. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Câte perechi (a, b) din produsul cartezian $A \times A$ au proprietatea că produsul ab este impar? *(Variante Bac, 2009)*

32*. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.
a) Câte submulțimi ale lui A au proprietatea că suma elementelor lor este egală cu 6?
b) Câte submulțimi ale lui A au proprietatea că produsul elementelor lor este 12?
(Variante Bac, 2003)

33*. Fie M mulțimea formată din toate numerele de patru cifre distincte, scrise în baza 10 numai cu cifre din mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$.
a) Determinați cardinalul lui M.
b) Câte elemente pare conține M?
c) Calculați media aritmetică a elementelor lui M.
d) Dacă numerotăm crescător elementele lui M cu numere naturale începând cu 1, ce număr de ordine va avea elementul 4123? *(Variante Bac, 2005)*

34*. Aflați cu câte zerouri se termină scrierea zecimală a numărului 47!. *(Variante Bac, 2003)*

1.3. Șiruri. Progresii

1. Completați cu câte trei termeni următoarele șiruri, apoi scrieți termenul general al fiecăruia:
a) 1, 3, 5, 7, 9, ...;
b) 0, 1, 4, 9, 16, ...;
c) 1, –1, 1, –1, 1, ...;
d) 1, 3, 6, 10, 15, ...

2. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$.
a) Există vreun termen al șirului egal cu $\dfrac{2}{3}$?
b) Câți termeni ai șirului sunt mai mici decât 0,7?
c) Câți termeni ai șirului sunt în intervalul (0,99; 1)?

3. Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq \mathbb{N}}$, de termen general $a_n = \dfrac{4n}{n+3}$, este crescător. *(Variante Bac, 2009)*

4. Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq \mathbb{N}^*}$, de termen general $a_n = n^2 - n$, este strict monoton. *(Variante Bac, 2009)*

5. Fie $E(x) = x^2 - 4x + 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, definim șirul $(a_n)_{n\geq 4}$ prin:

$$a_n = \frac{1}{E(4)} + \frac{1}{E(5)} + \ldots + \frac{1}{E(n)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

a) Demonstrați că șirul este strict crescător.
b) Demonstrați că șirul este mărginit.
c) Arătați că $a_n = \frac{(n-3)(3n-4)}{4(n-1)(n-2)}$, $\forall\, n \geq 4$. *(Simulare Bac, 2000)*

6. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Verificați că $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

b) Dacă $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, arătați că $s_n = \sqrt{n+1}-1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător și mărginit. *(Variante Bac, 2002)*

7. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir cu proprietatea că, dacă $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci $s_n = \frac{n}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Determinați termenul general a_n.

8. Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este definit recurent prin $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $\forall\, n \geq 3$. Demonstrați că $a_n = n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

9. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_1 = 4$, $a_2 = 8$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați a_3, a_4, a_5, a_6.

b) Arătați că $a_n = a_{n+6}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculați suma $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2004}$. *(Variante Bac, 2004)*

10. Determinați primul termen al progresiei aritmetice a_1, a_2, 13, 17, 21, ... *(Variante Bac, 2009)*

11. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de rație 2, în care $a_3 + a_4 = 8$. Determinați a_1. *(Variante Bac, 2009)*

12. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, astfel încât $a_3 = 5$ și $a_5 = 9$. Calculați suma primilor șapte termeni ai progresiei.

13. Stabiliți dacă numărul 2007 aparține progresiei aritmetice 2, 7, 12, 17, ... *(Variante Bac, 2007)*

14. Determinați numărul real x, știind că numerele 2, x și $x + 4$ sunt în progresie aritmetică. *(Variante Bac, 2007)*

15. Calculați suma $1 + 4 + 7 + \ldots + 31$. *(Variante Bac, 2009)*

16. Determinați numărul natural n din egalitatea $1 + 5 + 9 + \ldots + n = 231$. *(Variante Bac, 2008)*

17. Calculați suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_4 - a_2 = 4$ și $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$. *(Variante Bac, 2009)*

18. Găsiți suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$. *(Variante Bac, 1998)*

19*. La un stadion cu capacitatea de 10000 de locuri vin spectatorii. În primul minut vine un spectator, în al doilea minut vin 3 spectatori, în al treilea minut vin 5 spectatori etc. După câte minute se umple stadionul? *(Variante Bac, 2002)*

Scanned with OKEN Scanner

20*. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, ..., 10\}$. Câte progresii aritmetice de trei elemente, cu rația pozitivă, se pot forma cu elementele lui M? *(Variante Bac, 2003)*

21*. Demonstrați că nu există nicio progresie aritmetică având ca termeni, nu neapărat consecutivi, numerele 1, $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$.

22. Determinați numărul real pozitiv x, știind că x, 6 și $x - 5$ sunt în progresie geometrică. *(Variante Bac, 2009)*

23. Determinați primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi b_1, 6, b_3, 24, ... *(Variante Bac, 2009)*

24. Știind că doi termeni ai unei progresii geometrice sunt $b_3 = 2$ și $b_5 = 4$, determinați b_7.

25. Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, cu termini pozitivi, dacă $b_1 + b_2 = 3$ și $b_3 + b_4 = 12$.

26. Determinați primul termen și rația unei progresii geometrice, dacă $a_1 + a_4 = \frac{7}{16}$, iar $a_1 - a_2 + a_3 = \frac{7}{8}$. *(Variante Bac, 1998)*

27. Numerele reale pozitive a, b, c, d sunt în progresie geometrică. Dacă $d - a = 7$ și $c - b = 2$, aflați rația progresiei. *(Variante Bac, 2009)*

28. Fie a, b, c numere naturale nenule în progresie geometrică. Dacă $a + b + c$ este număr par, arătați că numerele a, b, c sunt pare. *(Variante Bac, 2009)*

29. Se consideră numărul real $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{2008}}$. Demonstrați că $s \in (1, 2)$. *(Variante Bac, 2008)*

30. Arătați că $2(1 + 3 + 3^2 + ... + 3^8) < 3^9$. *(Variante Bac, 2008)*

31. Calculați $s = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + ... + 2^{100}$. *(Variante Bac, 2008)*

32. Se consideră o progresie geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, cu rația $q = 2$. Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $b_n = 96$, iar suma primilor n termeni ai progresiei este 189. *(Variante Bac, 1999)*

33*. O minge cade de la o înălțime de 8 m. După fiecare cădere, mingea se ridică la jumătate din înălțimea de la care a căzut. Demonstrați că distanța parcursă de minge de la început și până când atinge pământul a suta oară este mai mică decât 24 m. *(Variante Bac, 2002)*

34*. O insulă vulcanică are înălțimea de 100 m. În fiecare an, datorită activității vulcanice, insula crește cu 5% din înălțimea sa. Arătați că după 20 de ani insula ajunge să depășească înălțimea de 200 m. *(Variante Bac, 2002)*

35. Determinați numerele reale a, b dacă numerele 2, a, b sunt în progresie geometrică, iar numerele 2, 4, a sunt în progresie aritmetică.

36. Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = 3n - 2$ este o progresie aritmetică.
Determinați n dacă $a_1 + a_2 + ... + a_n = 51$.

37. Arătați că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n = 6 \cdot 2^{n-2}$, $n \geq 1$ este o progresie geometrică. Determinați n dacă $b_1 + b_2 + ... + b_n = 93$.

38. Fie $S_n = \left(1 + \frac{3}{5}\right) + \left(3 + \frac{3}{10}\right) + \left(5 + \frac{3}{20}\right) + ... + a_n$. Determinați a_n și S_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

39. Calculați:

a) $a = 16 + 19 + 22 + \ldots + 61$; b) $b = 8 + 16 + 32 + \ldots + 1024$.

40. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$, definite prin $a_n = 2n - 1$, $b_n = 2^{a_n}$, $\forall\, n \geq 1$.

a) Demonstrați că $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

b) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2001^2$.

c) Arătați că $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică.

d) Demonstrați că $a_n < b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. *(Variante Bac, 2001)*

41*. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$, definite prin $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n - 3$, $b_n = a_n - 3$, $\forall\, n \geq 1$.

a) Demonstrați că $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică.

b) Determinați termenii generali ai celor două șiruri.

1.4. Funcții. Funcția liniară

1. a) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$. Calculați produsul $P = f(-3) \cdot f(-2) \cdot \ldots \cdot f(3)$.

b) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$. Calculați suma $S = f(1) + f(2) + \ldots + f(100)$.

c) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Calculați produsul $P = f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(100)$. *(Variante Bac, 2007)*

2. Determinați domeniul maxim de definiție al funcției $f: D \to \mathbb{R}$, unde

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 3x + 2}$; b) $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$. *(Variante Bac, 2007)*

3. Determinați toate funcțiile $f: \{a, b, c\} \to \{1, 2\}$, cu proprietatea că $f(b) + f(c) = 4$.

4. a) Determinați numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ cu proprietatea că $f(1) = f(4)$.

b) Determinați numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ cu proprietatea că $f(1) \neq f(4)$. *(Variante Bac, 2009)*

5. Determinați numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3\} \to \{0, 1, 2, 3\}$ pentru care $f(1)$ este număr par. *(Variante Bac, 2009)*

6. Demonstrați că nu există nicio funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x) + f(1 - x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

7. Se consideră funcțiile $f: \{-1, 0, a\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = (-1)^x$ și $g: \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 2\} \to A$, $g(x) = \begin{cases} -1, \text{ dacă } x \neq 0 \\ b, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$. Determinați numerele reale a și b și mulțimea A, astfel încât cele două funcții să fie egale.

Scanned with OKEN Scanner

8. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+1, \text{dacă } x<1\\ \sqrt{x-1}, \text{dacă } x\geq 1\end{cases}$. Aflați $a\in\mathbb{R}$, știind că punctul $A(a, 2)$ se află pe graficul lui f.

9. Determinați imaginea funcției $f:\{0, 1, 2, 3\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2}{x+1}$. *(Variante Bac, 2007)*

10. Determinați imaginea funcției $f:[-2, 1]\to\mathbb{R}, f(x)=-2x+1$. *(Variante Bac, 2009)*

11. Se consideră funcția $f:(3, +\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+1}{x-3}$. Arătați că funcția este strict descrescătoare și determinați-i imaginea.

12. a) Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$ este pară. *(Variante Bac, 2009)*

b) Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-\frac{1}{x}$ este impară. *(Variante Bac, 2009)*

13. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-x^2$ nu este nici pară și nici impară.

14. Demonstrați că $\frac{1}{3}$ este o perioadă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\{3x\}$ (unde $\{\cdot\}$ desemnează partea fracționară). *(Variante Bac, 2009)*

15. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x$ nu este periodică.

16. Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2-3x, x\in(-\infty,2)\\ x-1, x\in[2,\infty)\end{cases}$, iar $g(x)=\begin{cases}x-1, x\in(-\infty,0)\\ 2x-4, x\in[0,\infty)\end{cases}$. Determinați $f+g, f-g$ și $f\cdot g$.

17. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x^4$. Calculați $(f\circ f\circ f\circ f)(1)$. *(Variante Bac, 2008)*

18. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}$. Calculați suma $S=(f\circ f)(-10)+(f\circ f)(-9)+\ldots+(f\circ f)(10)$. *(Variante Bac, 2008)*

19. Dacă $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)^2, g(x)=x+1$, determinați $f\circ g$ și $g\circ f$. *(Variante Bac, 2007)*

20. Considerăm funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+1, g(x)=x^2-1$. Determinați funcțiile $f\circ g$ și $g\circ f$.

21. Considerăm funcțiile $f:(0, \infty)\to(1, \infty), f(x)=x^2+1$, și $g:(1, \infty)\to(0, \infty), g(x)=\sqrt{x-1}$. Determinați funcțiile $f\circ g$ și $g\circ f$. Sunt egale funcțiile $f\circ g$ și $g\circ f$?

***

Scanned with OKEN Scanner

22. a) Se consideră dreapta de ecuație d: $2x + y - 1 = 0$. Determinați funcția care admite ca grafic dreapta d.

b) Există vreo funcție al cărei grafic să fie dreapta d': $2x + 1 = 0$? Dar dreapta d'': $2y + 1 = 0$?

23. Arătați că dreptele de ecuație $2x - 3y + 1 = 0$ și $4x - 6y + 1 = 0$ sunt paralele.

24. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele $A(0, -2)$ și $B(2, 0)$ să aparțină dreptei d: $y = ax + b$.

(Variante Bac, 2007)

25. Determinați punctele de intersecție ale dreptei d: $x + 3y - 7 = 0$ cu axele de coordonate.

(Variante Bac, 2007)

26. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2m + 2$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției să nu intersecteze axa Ox. *(Variante Bac, 2009)*

27. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -4x + 1$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții. *(Variante Bac, 2008)*

28. Determinați $a \in \mathbb{R}$, dacă graficele funcțiilor $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ și $g(x) = ax + 4$ sunt două drepte paralele.

29. Se consideră sistemul $\begin{cases} (a+2)x + 3y = 1 \\ 3x + (a^2 - 2a + 4)y = 2 \end{cases}$, unde a este un parametru real. Rezolvați sistemul.

(Variante Bac, 1999)

30. Determinați funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, știind că graficul său și graficul funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -3x + 3$ sunt simetrice față de dreapta d: $x = 1$. *(Variante Bac, 2009)*

31. Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (m^2 - 2)x - 3$ să fie strict descrescătoare.

(Variante Bac, 2009)

32. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$, $g(x) = 2x - 1$. Demonstrați că funcția $f \circ g$ este strict descrescătoare. *(Variante Bac, 2009)*

33. Dacă f este funcție de gradul I, demonstrați că funcția $f \circ f$ este strict crescătoare.

(Variante Bac, 2008)

34. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de gradul I, strict crescătoare, pentru care $(f \circ f)(x) = 4x + 3$.

(Variante Bac, 2009)

35. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = -x + 2$. Determinați funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h = f \circ g - g \circ f$.

36. Considerăm funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 3$, $g(x) = x + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Determinați numerele reale a, b, astfel încât funcțiile $f \circ g$ și $g \circ f$ să fie egale.

37. Considerăm funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Determinați numerele a, b dacă $(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x) = 8x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

38. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $|x-3|+|4-x|=1$; b) $x+\frac{1}{|1+x|}=1$. *(Variante Bac, 2009)*

39. Rezolvați ecuațiile:

a) $|x-3|-|2x-1|=1$;

b) $|x-2|+|4-x|=2$;

c) $|x-1|+|x-3|=1$.

40. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $|x-2|+|x-1|>1$. *(Variante Bac, 1998)*

41. Rezolvați inecuațiile:

a) $\frac{x+2}{x-2}\leq 2$; b) $\frac{9}{x+1}>3$.

42. Rezolvați sistemele de inecuații:

a) $\begin{cases}2x+1\geq x-3\\6x-3\leq 10x+1\\12x-3<10x+5\end{cases}$; b) $\begin{cases}\frac{3x-1}{3-x}\geq 1\\2x-1\geq 3x-3\end{cases}$.

43*. Rezolvați ecuațiile:

a) $[2x-1]=3, x\in\mathbb{R}$; b) $[x+1]=2x-1, x\in\mathbb{R}$; c) $\left[\frac{x-1}{3}\right]=\frac{x+1}{2}$.

44. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x+1|-|x-2|-x$.

a) Reprezentați grafic f.

b) Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției f cu axele de coordonate.

45. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-x-4, x\leq -1\\2x-1, x\in(-1,1)\\-x+2, x\geq 1\end{cases}$.

a) Reprezentați grafic funcția f.

b) Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției f cu axele de coordonate.

c) Rezolvați ecuația $f(x)+2=0$.

46. Se consideră funcția $f:[-3,5]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+2, -3\leq x\leq -1\\-2x-1, -1<x<2\\3x-11, 2\leq x\leq 5\end{cases}$.

a) Folosind G_f, determinați Im f, intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale lui f.

b) Stabiliți, în funcție de valorile parametrului real m, numărul soluțiilor ecuației $f(x)=m$.

c) Rezolvați inecuația $f(x)\leq 1$.

Scanned with OKEN Scanner

47°. Reprezentați grafic funcția $f:\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]$. *(Bacalaureat, 1997)*

48°. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{\{x\}-\{x\}^2}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

a) Arătați că $\{x\}\geq\{x\}^2, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $f(x)=\sqrt{x-x^2}$, $\forall x\in[0,1)$.

c) Arătați că f este funcție periodică, admițând pe 1 ca perioadă.

d) Calculați $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{2007}{2}\right)$. *(Variante Bac, 2007)*

49°. O funcție $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ are proprietatea că $f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x,y\in\mathbb{Q}$.

a) Arătați că $f(0)=0$.

b) Arătați că $f(-x)=-f(x), \forall x\in\mathbb{Q}$.

c) Demonstrați că $f(x_1+x_2+\ldots+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n), \forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{Q}$.

d) Deduceți că $f(nx)=nf(x), \forall x\in\mathbb{Q}, \forall n\in\mathbb{N}$.

e) Dacă $a=f(1)$, demonstrați că $f(x)=ax, \forall x\in\mathbb{Q}$. *(Variante Bac, 2007)*

1.5. Ecuația de gradul II. Funcția de gradul II

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $3x^2+9x=0$;
b) $x^2+9x+8=0$;
c) $x^2+5x+5=0$;
d) $x^2+9x-10=0$;
e) $3x^2+x=4$;
f) $3x^2+5x+4=0$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\frac{3x-1}{x+1}+\frac{x+1}{2x-1}=3$;
b) $\frac{2x+3}{x+2}=\frac{x-1}{x-2}$. *(Variante Bac, 2008)*

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2-x+1}=\frac{1-2x}{1+x^3}$;
b) $\left(\frac{1}{x}+2\right)^2+\frac{1}{x}-10=0$. *(Variante Bac, 1999)*

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2x^2+(5-m)x-3(1+m)=0$, unde m este un parametru real.

(Bacalaureat, 1995)

Scanned with OKEN Scanner

5. Rezolvați în $\mathbb{R}^2$ sistemele:

a) $\begin{cases} x+2y=1 \\ x^2-6y^2=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} y=x^2-3x+1 \\ y=2x^2+x+4 \end{cases}$. *(Variante Bac, 2008)*

6. Rezolvați în $\mathbb{R}^2$ sistemele:

a) $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$. *(Variante Bac, 2008)*

7. Rezolvați în $\mathbb{R}^2$ sistemele:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{1}{x+2y}+y=2 \\ \frac{y}{x+2y}=-3 \end{cases}$. *(Variante Bac, 1999)*

8. Rezolvați în $\mathbb{R}^2$ sistemul:

$\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=29 \\ 7x^2-8xy+7y^2=43 \end{cases}$. *(Variante Bac, 1998)*

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $x^2+x<0$; c) $-x^2+4x-3\geq 0$;
b) $x^2\leq 9$; d) $3x^2+5x+4<0$.

10. Determinați soluțiile întregi ale inecuației $2x^2+7x-9<0$.

11. Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-2x-3$, $g(x)=2x^2-x-3$. Rezolvați inecuația $f(x)\geq g(x)$. *(Variante Bac, 1998)*

12. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{2x-1}{1-x}\geq\frac{3x+2}{1-2x}$. *(Variante Bac, 2009)*

13. Determinați $m\in\mathbb{R}$, astfel încât punctul $A(m-1, m^2-3m)$ să se afle în cadranul II. *(Variante Bac, 2009)*

14. Rezolvați ecuațiile:

a) $|x^2-4x+3|+x=3$; b) $|x^2-x|-|x|=x^2$.

15. Rezolvați sistemul de inecuații $-1<\frac{x^2+3x+2}{x^2-4x+3}\leq 2$. *(Variante Bac, 1998)*

16. Rezolvați inecuația $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\leq 1$. *(Variante Bac, 1998)*

Scanned with OKEN Scanner

17. Determinați $m \in \mathbb{R}^*$, știind că $mx^2 + x - 2 \leq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2008)*

18. Pentru ce valori reale ale lui m, inecuația $(m-1)x^2 - (m+1)x + m + 1 > 0$ este verificată de orice x real? *(Variante Bac, 1998)*

19. Determinați $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care inecuația $ax^2 + 2(a+1)x + 2a - 1 \geq 0$ nu are soluții reale. *(Variante Bac, 2008)*

20. Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\frac{x^2+ax+2}{x^2+1} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2009)*

21*. Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1} \leq a$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. *(Variante Bac, 1999)*

22. Determinați $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care ecuația $ax^2 + (3a-1)x + a + 3 = 0$ are soluții reale. *(Variante Bac, 2008)*

23. Determinați numărul real m, știind că mulțimile $A = \{2\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x - m = 0\}$ sunt egale.

24. Se consideră ecuația $x^2 - 2x + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$, cu soluțiile reale distincte x_1 și x_2. Determinați m, știind că $|x_1 - x_2| = 1$. *(Variante Bac, 2009)*

25. Dați exemplu de ecuație de gradul al doilea, cu coeficienți raționali, care are o soluție egală cu $\sqrt{3}$. *(Variante Bac, 2008)*

26. Se consideră ecuația $x^2 - mx + m - 1 = 0$, unde m este un parametru real.

a) Determinați m pentru care ecuația admite ca soluții două numere reale opuse.

b) Determinați m pentru care ecuația admite ca soluții două numere reale, unul fiind inversul celuilalt. *(Variante Bac, 2001)*

27. Determinați valorile parametrului real m pentru care ecuația $mx^2 - 2(m-2)x - m - 10 = 0$ are două soluții reale de semne contrare. *(Variante Bac, 1998)*

28. Determinați valorile parametrului real m pentru care ecuația $4mx^2 + 4(1-2m)x + 3(m-1) = 0$ are soluții reale strict pozitive. *(Variante Bac, 1998)*

29*. Se consideră ecuația $4x^2 - 4(m-1)x + 3 - m = 0$, având soluțiile reale x_1 și x_2. Determinați m, știind că $4x_1^3 + 4x_2^3 + 1 = m$. *(Bacalaureat, 1969)*

30*. Se consideră ecuația $x^2 - (m+3)x + m^2 = 0$, unde m este un parametru real, având soluțiile reale x_1 și x_2. Aflați m, știind că $x_1(m^2 - 3x_1) + x_2(m^2 - 3x_2) = 0$. *(Variante Bac, 1999)*

31. Se consideră ecuația $x^2 - mx + m - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$, având soluțiile reale x_1 și x_2.

a) Pentru ce valori ale lui m o soluție a ecuației este dublul celeilalte?

b) Pentru ce valori ale lui m are loc inegalitatea $x_1^2 + x_2^2 > x_1x_2(x_1 + x_2)$? *(Bacalaureat, 1993)*

Scanned with OKEN Scanner

32*. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x - 7$. Notăm cu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ soluțiile ecuației $f(x) = 0$ și cu $S_n = x_1^n + x_2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Determinați x_1 și x_2.

b) Arătați că $S_{n+2} = 2S_{n+1} + 7S_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Calculați S_5. *(Variante Bac, 2004)*

***

33. Determinați funcția f, de gradul al doilea, dacă punctele $A(-1, 1)$, $B(0, 1)$ și $C(1, 3)$ se află pe graficul ei. *(Variante Bac, 2008)*

34. Arătați că vârful parabolei $y = x^2 + 5x + 1$ este situat în cadranul III. *(Variante Bac, 2008)*

35. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ dacă punctele $A(-1, 6)$ și $B(2, 3)$ sunt situate pe graficul funcției f și f admite un minim egal cu 2.

36. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 9$. Demonstrați că vârful parabolei asociate funcției se află pe dreapta de ecuație $d: x + y = 7$. *(Variante Bac, 2009)*

37. Punctul $V(1, -4)$ este vârful parabolei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + ax + b$. Calculați $f(-2)$.

38. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + m$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care minimul funcției f este egal cu 1.

39. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + (a - 2)x + b + 3$, $a, b \in \mathbb{R}$. Determinați a, b dacă f are un minim egal cu 4 pentru $x = 1$.

40. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. Determinați axa de simetrie a graficului funcției. *(Variante Bac, 2008)*

41. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care dreapta $x = -1$ este axa de simetrie a parabolei $y = x^2 + mx + 1$.

42. Calculați distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x - 2$ cu Ox.

43. Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (a + 1)x^2 + 3(a - 1)x + a - 1$ intersectează axa Ox în două puncte distincte. *(Variante Bac, 2008)*

44. Aflați punctele de intersecție dintre dreapta $d: y = 2x + 1$ și parabola $\mathcal{P}: y = x^2 + x + 1$. *(Variante Bac, 2008)*

45. Arătați că dreapta $d: y = 2x + 3$ este tangentă la parabola $\mathcal{P}: y = x^2 - 4x + 12$. *(Variante Bac, 2008)*

46. Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care dreapta $d: y = x + 1$ și parabola $\mathcal{P}: y = (a + 1)x^2 + ax + 3$ nu au puncte comune. *(Variante Bac, 2008)*

47. Determinați punctele de intersecție ale parabolelor $y = x^2 + x + 1$ și $y = -x^2 - 2x + 6$. *(Variante Bac, 2008)*

Scanned with OKEN Scanner

48. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x - x^2, g(x) = x^2 - 6x + m$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinați m, astfel încât $A(1, 3)$ să fie punct comun al graficelor celor două funcții.

b) Pentru $m = 8$, reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de axe și apoi evidențiați cea mai mare mulțime $A \subset \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x) \geq g(x), \forall x \in A$. *(Variante Bac, 1999)*

49. Calculați valoarea maximă a funcției $f : [4, 5] \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

50. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + m$, unde m este un parametru real.

a) Determinați punctul de minim și valoarea minimă a funcției.

b) Aflați m pentru care $f(x) \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Pentru $m = 1$, rezolvați ecuația $(f \circ f)(x) = 0$. *(Variante Bac, 2001)*

51. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 6x - 3x^2$. Ordonați crescător numerele $f(\sqrt{2}), f(\sqrt{3}), f(2)$. *(Variante Bac, 2009)*

52. Determinați imaginile funcțiilor:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x + 2$; b) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 2$. *(Variante Bac, 2008)*

53. Fie $m \in \mathbb{R}$ și parabola $y = x^2 - (m + 1)x + 2m$. Determinați m dacă graficul funcției f este situat deasupra dreptei $y = 1$.

54*. Se consideră familia de funcții $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_m(x) = mx^2 + 2(m + 1)x + m + 2$, unde $m \in \mathbb{R}^*$.

a) Demonstrați că vârfurile parabolelor asociate acestor funcții se găsesc pe dreapta $d: y = x + 1$.

b) Dacă A și B sunt punctele de intersecție a unei parabole cu Ox, iar F este proiecția vârfului V al acelei parabole pe Ox, arătați că $AB = 2FV$.

c) Arătați că toate parabolele familiei trec printr-un punct fix. *(Bac, 1996)*

55*. Se consideră parabolele de ecuații $P_1: y = 4x^2$ și $P_2: y = 12x^2$. Prin originea O a sistemului de axe se duce o dreaptă variabilă care intersectează a doua oară cele două parabole în M, respectiv N. Demonstrați că mijlocul P al segmentului MN se deplasează pe parabola de ecuație $y = 6x^2$. *(Bac, 1970)*

1.6. Vectori

1. Fie $ABCD$ un dreptunghi. Scrieți câte o pereche de vectori:

a) cu aceeași direcție, dar de sensuri contrare;

b) cu același modul, dar având direcții diferite;

c) coliniari;

d) opuși.

2. Dacă M, N, P sunt puncte în plan, calculați modulul vectorului $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM}$. *(Variante Bac, 2007)*

Scanned with OKEN Scanner

3. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 1. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

(Variante Bac, 2009)

4. Considerăm un triunghi dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A)=90°$, $AB=3$ şi $AC=4$. Determinaţi mărimile vectorilor $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

5. Fie ABC un triunghi, iar M mijlocul laturii AB. Demonstraţi că:

a) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$;

b) $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$;

c) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}$;

d) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CM}$.

6. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat de centru O. Demonstraţi că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=6\overrightarrow{AO}$.

7. Demonstraţi că pentru orice punct M din planul paralelogramului $ABCD$ are loc egalitatea $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

(Variante Bac, 2008)

8. Se consideră triunghiul ABC şi punctul $M\in[BC]$ astfel încât $\frac{BM}{MC}=\frac{1}{2}$. Demonstraţi că $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

(Variante Bac, 2009)

9. Fie $ABCD$ un paralelogram, iar P un punct astfel încât $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PD}$. Arătaţi că $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$.

(Variante Bac, 2008)

10*. Se consideră un triunghi ABC, cu lungimile laturilor $AB=c$, $AC=b$. Fie D un punct, astfel încât $\overrightarrow{AD}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$. Demonstraţi că semidreapta $[AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.

(Variante Bac, 2009)

11. Fie $ABCD$ un pătrat de centru O, iar M mijlocul laturii AB. Descompuneţi vectorii $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{MC}$ în fiecare dintre bazele: a) $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\}$; b) $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$.

12. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,-1)$, $A(1,2)$ şi $B(4,1)$. Determinaţi coordonatele vectorului $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.

(Variante Bac, 2008)

13. Se consideră punctele $A(2a-1,3)$ şi $B(a,2a+1)$. Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-4\vec{j}$.

(Variante Bac, 2007)

14. Se consideră vectorii $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j},\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$ şi $\vec{u}=6\vec{i}+2\vec{j}$. Determinaţi $p,q\in\mathbb{R}$ pentru care $\vec{u}=p\vec{a}+q\vec{b}$.

(Variante Bac, 2008)

15. Se consideră reperul cartezian xOy şi punctele $A(1,-1)$ şi $B(3,5)$. Determinaţi coordonatele punctului C din plan, astfel încât $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.

(Variante Bac, 2009)

16. Se consideră punctul $A(1,3)$.

a) Determinaţi coordonatele proiecţiilor punctului A pe cele două axe.

b) Determinaţi coordonatele simetricelor punctului A faţă de: axa Ox, axa Oy, originea O, respectiv faţă de prima bisectoare.

Scanned with OKEN Scanner

17. Determinați coordonatele simetricului lui $A(-2, 4)$ față de punctul $B(2, 0)$. *(Variante Bac, 2007)*

18. Aflați coordonatele punctului D, dacă $ABCD$ este paralelogram, iar $A(1, 1)$, $B(2, -3)$, $C(6, 0)$. *(Variante Bac, 2007)*

19. Se consideră punctele $A(3, 2)$ și $B(6, 5)$. Determinați coordonatele punctelor M și N, știind că acestea împart segmentul AB în trei segmente congruente, iar ordinea punctelor este A, M, N, B. *(Variante Bac, 2009)*

20. a) Calculați modulul vectorului $\vec{v} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$.

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$, dacă modulul vectorului $\vec{v} = 4\vec{i} + a\vec{j}$ este 8. *(Variante Bac, 2007)*

21. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$ să fie 4, unde $A(2, m)$ și $B(m, -2)$. *(Variante Bac, 2008)*

22. Se consideră punctele $A(2, 0)$, $B(1, 1)$ și $C(3, -2)$. Calculați:
a) perimetrul triunghiului ABC; b) lungimea medianei din A. *(Variante Bac, 2008)*

23. În raport cu un reper cartezian, se consideră punctele $A(5, 6)$, $B(-1, -2)$ și $C(6, 5)$.
a) Calculați lungimile segmentelor AB, BC și AC.
b) Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic.
c) Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului. *(Variante Bac, 2000)*

24. Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ ale triunghiului ABC, se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{MB}$ și $MN \parallel BC$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $\overrightarrow{CN} = m\overrightarrow{AC}$. *(Variante Bac, 2008)*

25. Se consideră triunghiul ABC și punctele D, E astfel încât $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EC}$. Demonstrați că dreptele DE și BC sunt paralele. *(Variante Bac, 2009)*

26. Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = (a-2)\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 8\vec{i} - (20-2a)\vec{j}$ sunt coliniari. *(Variante Bac, 2008)*

27. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 3)$ și $D(a, 4)$, cu $a \in \mathbb{R}$. Determinați valorile lui a pentru care dreptele AB și CD sunt paralele. *(Variante Bac, 2009)*

28. Demonstrați că mijloacele laturilor unui patrulater sunt vârfurile unui paralelogram.

29. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Arătați că vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari. *(Variante Bac, 2009)*

30. Se prelungesc medianele BM și CN ale triunghiului ABC cu segmentele MP, respectiv NQ, astfel încât $BM = MP$, $CN = NQ$. Demonstrați că punctele A, P și Q sunt coliniare.

31*. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele E, F, astfel încât $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$, iar $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FE}$. Demonstrați că punctele A, F și C sunt coliniare. *(Variante Bac, 2009)*

32*. În triunghiul ABC se consideră mediana AM și bisectoarea BD, care se intersectează în P. Arătați că P este mijlocul segmentului AM dacă și numai dacă $BC = 2AB$.

Scanned with OKEN Scanner

33. Demonstrați că punctele $L(-1, 2)$, $M(-2, 3)$ și $N(-3, 4)$ sunt coliniare. *(Variante Bac, 2007)*

34. Determinați coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, dacă $A(-1, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, -1)$. *(Variante Bac, 2008)*

35. Fie $\vec{r}_A = 2\vec{i} + \vec{j}, \vec{r}_B = \vec{i} + 3\vec{j}, \vec{r}_C = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ vectorii de poziție ai vârfurilor triunghiului ABC. Determinați vectorul de poziție al centrului de greutate al triunghiului. *(Variante Bac, 2009)*

36. Fie ABC un triunghi, iar G centrul său de greutate. Dacă $A(1, 1)$, $B(5, 2)$, $G(3, 4)$, aflați coordonatele punctului C. *(Variante Bac, 2009)*

37. Se consideră G centrul de greutate al triunghiului ABC. Prin punctul G se duce paralela la AB, care intersectează BC în P. Aflați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $\overrightarrow{GP} = m\overrightarrow{AB}$. *(Variante Bac, 2008)*

38. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Determinați numerele reale a și b pentru care $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$. *(Variante Bac, 2009)*

39*. Notăm cu M, N, P, Q, R și S mijloacele laturilor AB, BC, CD, DE, EF, respectiv FA ale hexagonului $ABCDEF$. Demonstrați că triunghiurile MPR și NQS au același centru de greutate.

40. Se consideră punctele $A(0, 4)$, $B(4, 0)$ și $C(6, 6)$. Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC, precum și raza acestuia. *(Variante Bac, 2000)*

41. Se consideră punctele $A(4, -2)$, $B(2, 4)$ și $C(m, n)$. Determinați $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul C să fie centrul cercului circumscris triunghiului AOB. *(Variante Bac, 2008)*

42*. Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$ și $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PA}$. Fie H ortocentrul triunghiului MNP. Demonstrați că $AH = BH = CH$. *(Variante Bac, 2009)*

43. Se dau punctele $A(1, 2)$, $B\left(1+\sqrt{3}, 3\right)$, $C(1, 4)$. Aflați coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

44. Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N, P pe laturile BC, CA, respectiv AB, astfel încât $AP = 2PB$, $AC = 3NC$, iar dreptele AM, BN și CP sunt concurente. Arătați că M este mijlocul segmentului BC.

45. Se consideră triunghiul ABC și punctele A', B', C' astfel încât $\overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{B'C} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{C'A} = 3\overrightarrow{BC'}$. Demonstrați că dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente. *(Variante Bac, 2009)*

1.7. Trigonometrie

1. Dacă ΔABC este dreptunghic cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, calculați $\sin B - \cos C$. *(Variante Bac, 2007)*

2. a) Determinați $x \in [0, 10\pi]$ pentru care $\sin x = 1$.
b) Determinați $x \in [0, 3\pi)$ pentru care $\sin 3x = 0$. *(Variante Bac, 2007)*

3. Determinați $\alpha \in (0, 2\pi)$ pentru care $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha$. *(Variante Bac, 2008)*

4*. Demonstrați că $\sin n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *(Variante Bac, 2006)*

Scanned with OKEN Scanner

5. Calculați: a) $\sin\frac{5\pi}{6}$; b) $\cos\frac{7\pi}{4}$; c) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$; d) $\cos\frac{7\pi}{6}$.

6. Calculați: a) $P=\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 179^\circ$;
b) $S=\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\ldots+\cos 179^\circ$. *(Variante Bac, 2007)*

7. Calculați: a) $P=\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}89^\circ$.
b) $(\operatorname{tg}1^\circ-\operatorname{tg}87^\circ)(\operatorname{tg}2^\circ-\operatorname{tg}86^\circ)\ldots(\operatorname{tg}87^\circ-\operatorname{tg}1^\circ)$. *(Variante Bac, 2007)*

8. Arătați că $\sin 40^\circ\sin 140^\circ=\cos^2 130^\circ$. *(Variante Bac, 2009)*

9. Fie $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât $a-b=\pi$. Arătați că are loc relația $\cos a\cdot\cos b\le 0$.

10. Calculați: a) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$; b) $\cos\frac{117\pi}{4}$; c) $\operatorname{tg}\frac{53\pi}{3}$; d) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{1007\pi}{6}\right)$.

11. Stabiliți dacă următoarele funcții sunt pare sau impare:
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3\cos 2x$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\sin 2x-3\cos 2x$.

12. Arătați că următoarele funcții sunt periodice, admițând perioada T indicată:
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin 4x\cdot\cos 2x$, $T=\pi$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin 2x+\cos 3x$, $T=2\pi$.

13. Fie $a, b\in\mathbb{R}$, astfel încât $a+b=\frac{3\pi}{2}$. Arătați că $\sin 2a-\sin 2b=0$. *(Variante Bac, 2009)*

14. Dacă $a\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ și $\sin a=-\frac{5}{13}$, calculați $\cos a$ și $\operatorname{tg} a$. *(Variante Bac, 2007)*

15. Fie $\alpha\in\mathbb{R}$ cu $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{5}$. Calculați $|\sin\alpha|$. *(Variante Bac, 2008)*

16. Demonstrați identitățile:
a) $\sin^4 a+\cos^4 a=1-2\sin^2 a\cdot\cos^2 a$; b) $\sin^6 a+\cos^6 a=1-3\sin^2 a\cdot\cos^2 a$.

17. Calculați $\sin^2 x$, cunoscând $\operatorname{ctg} x=6$. *(Variante Bac, 2009)*

18. a) Fie $\alpha\in\mathbb{R}$, astfel încât $\sin\alpha+\cos\alpha=1$. Calculați $\operatorname{tg}2\alpha$.

b) Fie $x\in\mathbb{R}$, astfel încât $\sin x=\frac{1}{2}+\cos x$. Calculați $\sin 2x$. *(Variante Bac, 2009)*

19. a) Fie $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, astfel încât $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$. Calculați $\sin 2\alpha$.

b) Fie $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $\sin a=\frac{1}{4}$. Calculați $\sin 3a$. *(Variante Bac, 2008)*

20. a) Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, astfel încât $\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$. Calculați $\cos\alpha$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2$, calculați $\sin 2\alpha$. *(Variante Bac, 2008)*

21. a) Fie $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\sin a = \frac{4}{5}$. Calculați $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

b) Dacă $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, calculați $\sin\alpha$. *(Variante Bac, 2008)*

22. Calculați $E = \frac{\sin 36^\circ}{\sin 48^\circ} + \frac{\cos 36^\circ}{\cos 48^\circ}$.

23. Fie $x \in \mathbb{R}$, $\cos 3x - \cos x \neq 0$. Arătați că $E(x) = \frac{1-\cos 4x}{\cos 3x - \cos x} + 4\cos^2\frac{x}{2}$ nu depinde de x.

24. Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = 3$. Arătați că $9(\sin 2x + \cos 4x) = 7$.

25. Calculați: a) $\operatorname{tg}15^\circ$; b) $\cos\frac{7\pi}{12}$; c) $\sin\frac{11\pi}{12}$. *(Variante Bac, 2008)*

26. Fie $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $\operatorname{tg}x = \frac{2}{3}$. Calculați $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

27. Calculați $E = \operatorname{tg}280^\circ \operatorname{tg}170^\circ + \sin 520^\circ \cos 250^\circ - \sin 110^\circ \cos 20^\circ$.

28. Fie $a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ cu $a + b = \frac{\pi}{4}$. Demonstrați că $\operatorname{tg}a \operatorname{tg}b + \operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b = 1$. *(Variante Bac, 2008)*

29. Calculați $E = (1 + \operatorname{tg}a)(1 + \operatorname{tg}b)$, știind că $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $a + b = \frac{\pi}{4}$.

30. Calculați $\operatorname{tg}(a + b)$, știind că $\operatorname{ctg}a = 2$ și $\operatorname{ctg}b = 5$. *(Variante Bac, 2009)*

31. Arătați că $\operatorname{tg}55^\circ - \operatorname{tg}35^\circ = 2\operatorname{tg}20^\circ$.

32. Demonstrați identitatea $\operatorname{ctg}2x = \frac{\operatorname{ctg}x - \operatorname{tg}x}{2}$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. *(Variante Bac, 2009)*

33. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sin a + \sin b = 1$ și $\cos a + \cos b = \frac{1}{2}$. Calculați $\cos(a - b)$.

(Variante Bac, 2009)

34. a) Arătați că $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = 2\sqrt{2}$.

b) Calculați $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$. *(Variante Bac, 2009)*

35. Scrieți sub formă de produs:

a) $2\cos x - 1$; b) $2\sin x - \sqrt{3}$; c) $\sin x + \cos x$.

Scanned with OKEN Scanner

36. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a+b=\frac{\pi}{3}$. Demonstrați că $\sin 2a - \sin 2b - \sin(a-b) = 0$. *(Variante Bac, 2009)*

37. Arătați că:
a) $(\cos x + \cos 3x)^2 + (\sin x + \sin 3x)^2 = 4\cos^2 x$.
b) $(1 - \cos a \cos b)^2 - \sin^2 a \sin^2 b = (\cos a - \cos b)^2$.

38. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a+b=\frac{\pi}{2}$. Arătați că $\sin 2a + \sin 2b = 2\cos(a-b)$. *(Variante Bac, 2009)*

39. Demonstrați că $\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a+b)\cdot\sin(a-b)$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2009)*

40. Demonstrați că $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = (1+2\cos 2x)\cdot \sin 3x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2009)*

41. Arătați că $\sin a + \sin b + \sin(a+b) = 4\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}$.

42. Transformați în produs expresia $E = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{3}\right\}$.

43*. Demonstrați că $\cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 80^\circ = \frac{3}{2}$.

44. Fie ABC un triunghi cu $\operatorname{tg} A = 2$, $\operatorname{tg} B = 3$. Determinați măsura unghiului C. *(Variante Bac, 2008)*

45*. Demonstrați că în orice triunghi ABC are loc identitatea $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$.

1.8. Aplicații ale trigonometriei în geometrie

1. Un triunghi echilateral ABC are aria $\sqrt{3}$. Calculați $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. *(Variante Bac, 2008)*

2. Fie vectorii $\vec{u}, \vec{v}$, astfel încât $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5$, $|\vec{u}| = 2$ și $|\vec{v}| = 3$. Calculați $\cos(\vec{u}, \vec{v})$. *(Variante Bac, 2009)*

3. Fie vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Dacă $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$ și $m(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})) = \frac{\pi}{3}$, calculați $(2\vec{u}+\vec{v})(2\vec{v}-\vec{u})$.
(Variante Bac, 2009)

4. În paralelogramul $ABCD$ se cunosc $AB = 1$, $BC = 2$ și $m(\sphericalangle BAD) = 60°$. Calculați $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.
(Variante Bac, 2009)

5. Se consideră vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.
a) Calculați produsul scalar $\vec{v}\cdot\vec{w}$.
b) Aflați cosinusul unghiului format de cei doi vectori. *(Variante Bac, 2007)*

6. Calculați $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})$, știind că $A(-3, 4)$, $B(4, -3)$ și $C(1, 2)$. *(Variante Bac, 2009)*

7. Determinați un vector perpendicular pe vectorul $\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$. *(Variante Bac, 2007)*

8. Fie vectorii $\vec{u} = m\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = (m-2)\vec{i} - \vec{j}$. Determinați $m > 0$, astfel încât $\vec{u} \perp \vec{v}$.
(Variante Bac, 2009)

Scanned with OKEN Scanner

9. Considerăm vectorul $\vec{u}=3\vec{i}-4\vec{j}$. Determinați vectorul $\vec{v}$, de modul 5, perpendicular pe $\vec{u}$.

10. Arătați că vectorii $\vec{u}=5\vec{i}-4\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$ formează un unghi obtuz. *(Variante Bac, 2009)*

11. Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=m\vec{i}+\vec{j}$, $m\in\mathbb{R}$. Determinați m pentru care unghiul format de cei doi vectori este obtuz.

12. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat. Calculați suma
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{AC}$.

13. Fie $ABCD$ un paralelogram. Demonstrați că, dacă vectorii $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ au același modul, atunci $ABCD$ este dreptunghi. *(Variante Bac, 2009)*

14. Se consideră vectorii perpendiculari $\vec{u}$ și $\vec{v}$ astfel încât $|\vec{u}|=3, |\vec{v}|=4$. Calculați $|\vec{u}+\vec{v}|$ și $|\vec{u}-\vec{v}|$.

15*. Fie ABC un triunghi, iar O centrul cercului său circumscris. Dacă $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OC}$, demonstrați că triunghiul este dreptunghic. *(Variante Bac, 2008)*

***

16. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB=3$, $AC=4$. Calculați:
a) lungimea ipotenuzei BC;
b) aria triunghiului;
c) cosinusul unghiului B;
d) lungimea înălțimii corcspunzătoare ipotenuzei;
e) raza cercului circumscris triunghiului. *(Bacalaureat, 2003)*

17. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC = 5$ și $BC = 6$. Calculați distanța de la centrul de greutate al triunghiului la dreapta BC. *(Variante Bac, 2009)*

18. Calculați perimetrul triunghiului ABC, în care $AB=4$, $AC=3$, iar $m(\sphericalangle BAC)=60°$. *(Variante Bac, 2009)*

19. Fie ABC un triunghi în care $AB=2$, $AC=3$, $BC=2\sqrt{2}$. Calculați $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. *(Variante Bac, 2008)*

20. În triunghiul ABC, avem $AB=3$, $AC=5$, iar $BC=7$. Calculați $\cos A$. *(Variante Bac, 2008)*

21. Demonstrați că în orice triunghi ABC are loc identitatea $b\cos C + c\cos B = a$.

22. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel dacă și numai dacă $a=2b\cos C$.

23*. Determinați $a\in\mathbb{Z}$ pentru care numerele a, $a+1$ și $a+2$ sunt lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic. *(Variante Bac, 2009)*

24*. În triunghiul ABC, avem $AB=4$, $BC=5$ și $CA=6$. Demonstrați că $B=2C$. *(Variante Bac, 2009)*

25. Calculați lungimea medianei din A a triunghiului ABC, dacă $AB=4$, $BC=6$, $CA=8$. *(Variante Bac, 2007)*

26. În triunghiul ABC, avem $AB=2$, $AC=4$ și $m(\sphericalangle A)=60°$. Calculați lungimea medianei din A. *(Variante Bac, 2008)*

27. În triunghiul ABC, avem $a=4$, $b=6$, $c=8$. Calculați lungimea bisectoarei din A.

Scanned with OKEN Scanner

28. Se consideră triunghiul ABC cu $B = \frac{\pi}{6}$, $C = \frac{\pi}{4}$. Demonstrați că $\frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$. *(Variante Bac, 2008)*

29. Triunghiul ABC are $B = \frac{\pi}{3}$ și lungimea razei cercului circumscris egală cu 1. Calculați AC.

(Variante Bac, 2008)

30. Se consideră triunghiul ABC cu $A = \frac{\pi}{4}$, $B = \frac{\pi}{6}$, $AB = 6$. Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului. *(Variante Bac, 2009)*

31. Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă și numai dacă $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$.

32. Calculați perimetrul triunghiului ABC, dacă $AB = 6$, $B = \frac{\pi}{4}$, $C = \frac{\pi}{6}$. *(Variante Bac, 2009)*

33. Calculați lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC care are lungimile laturilor egale cu 3, 4 și 5. *(Variante Bac, 2008)*

34. Calculați lungimea razei cercului înscris în triunghiul de laturi 4, 5 și 7. *(Variante Bac, 2009)*

35. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 13$, $AC = 14$ și $BC = 15$. Calculați lungimea înălțimii corespunzătoare laturii BC. *(Variante Bac, 2009)*

36. Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului de laturi 5, 7 și 8. *(Variante Bac, 2009)*

37*. Rezolvați triunghiul ABC, dacă

a) $a = 2$, $c = b\sqrt{3}$, $C = 2B$; b) $a = \sqrt{7}$, $b = 2$, $A = \frac{\pi}{3}$.

38. Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, dacă $AB = 6$, $AC = 10$, iar aria triunghiului este $15\sqrt{3}$. *(Variante Bac, 2009)*

39. Fie ABC un triunghi cu $\sin A = \frac{1}{2}$, $\sin B = 1$, $BC = 4$. Calculați aria triunghiului.

(Variante Bac, 2009)

40. Calculați aria paralelogramului $ABCD$, dacă $AB = 6$, $AD = 8$, iar $m(\sphericalangle ADC) = 135°$.

(Variante Bac, 2008)

41*. Demonstrați că în orice triunghi ABC au loc identitățile:

a) $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}$; b) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$.

42*. Demonstrați că în orice triunghi ABC, cu notațiile uzuale, are loc inegalitatea $R(b + c) \geq a\sqrt{bc}$. Când se atinge egalitatea?

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a X-a

2.1. Radicali și logaritmi

1. Arătați că:

a) $2\sqrt{14}-\sqrt{\frac{7}{2}}-5\sqrt{\frac{8}{7}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$;

b) $\sqrt{3}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}=3$;

c) $\sqrt{6+\sqrt{8}+\sqrt{12}+\sqrt{24}}=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

2. Se consideră numerele $a=\sqrt{2-\sqrt{2}}$ și $b=\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Arătați că $\frac{b}{a}-\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$.

3. Arătați că numărul $a=\sqrt{17+12\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{6+4\sqrt{2}}$ este rațional.

4. Determinați $a, b\in\mathbb{Q}$, știind că $(1+\sqrt{2})^2=a+b(1+\sqrt{2})$.

5. Fie $E(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$.

a) Determinați x pentru care $E(x)$ este definită.

b) Arătați că $E(x)=\frac{2\sqrt{1-x}}{2x-1}$.

c) Calculați $E\left(\frac{3}{4}\right)$.

6. Găsiți prima zecimală a numerelor $a=\sqrt{3}$ și $b=\sqrt[3]{2}$.

7. Calculați $a=\left[\sqrt{200}\right]-\left[\sqrt[3]{200}\right]$, ([x] reprezintă partea întreagă a numărului real x).

8. Aduceți la o formă mai simplă:

a) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}-\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{18}:\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$;

c) $\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}$.

9. a) Calculați $E=\sqrt[4]{\frac{x\sqrt[3]{y}}{y^2\sqrt{x}}}:\left(\frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[8]{x}}\right)^7$ pentru $x=10$ și $y=2$.

b) Arătați că numărul $a=\sqrt[3]{\frac{4\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[9]{16}}{3\sqrt[12]{3}}}$ este rațional.

10. Considerăm $E(x)=x\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$, unde $x\geq 0$. Calculați $E(a)$, unde $a=\sqrt[11]{8}$.

11. a) Fie $a=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[16]{2}$ și $b=\sqrt[16]{2}$. Arătați că $a\cdot b$ este număr rațional.

b) Arătați că $a=\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-1}\cdot\sqrt[6]{7-3\sqrt{5}}\in\mathbb{Q}$.

Scanned with OKEN Scanner

12. Determinați numărul natural x dacă $(\sqrt[5]{x^3})^{7-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k = x$, pentru orice $x>0$.

13. Arătați că $\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}$.

14*. Considerăm numărul real $a=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

a) Arătați că $a^3=14-3a$.

b) Arătați că $a^3+3a-14=(a-2)(a^2+2a+7)$.

c) Demonstrați că $a\in\mathbb{Q}$.

15. Ordonați crescător numerele $\sqrt{2},\sqrt[3]{4},\sqrt[4]{5}$. *(Variante Bac, 2009)*

16. Comparați numerele:

a) $a=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ și $b=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$;

b)* $a=\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{5}$ și $b=\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{6}$.

17. Calculați:

a) $\log_2 8$; b) $\log_2 0{,}25$; c) $\log_2\sqrt{2}$; d) $\log_2\frac{4}{\sqrt{2}}$.

18. Ordonați crescător numerele $a=-\sqrt[3]{27}$, $b=\log_2\frac{1}{16}$, $c=-2$. *(Variante Bac, 2009)*

19. a) Arătați că numărul $a=\log_4 16+\log_3 9+\sqrt[3]{27}$ este natural.

b) Demonstrați că numărul $a=\log_9\sqrt{3}+\log_4\sqrt[3]{2}$ este rațional. *(Variante Bac, 2009)*

20. Calculați:

a) $b-a$, unde $a=\log_2 3$ și $b=\log_2 6$;

b) $\lg\frac{2}{1}+\lg\frac{3}{2}+\ldots+\lg\frac{10}{9}$;

c) $\log_2(5+\sqrt{7})+\log_2(5-\sqrt{7})-2\log_2 3$. *(Variante Bac, 2007)*

21. Calculați:

a) $\log_2 8\cdot\log_3 9\cdot\log_5\sqrt{5}$;

b) $\log_2 8\sqrt{2}-\log_3 3\sqrt{3}$.

22. Aduceți la o formă mai simplă:

a) $\log_{\sqrt{3}}9+\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}3$; b) $\frac{1}{\log_3 2}+\frac{2}{\log_9 4}-\frac{3}{\log_{27}8}$; c) $\log_{11}3\cdot\log_7 5-\log_7 3\cdot\log_{11}5$.

23. Arătați că numărul a este rațional, unde:

a) $a=\log_{25}100\cdot\log_{16}25-2\log_{16}5$;

b)* $a=\frac{\log_2 24}{\log_{96}2}-\frac{\log_2 192}{\log_{12}2}$;

c) $a=\log_{27}25\cdot\log_4 9\cdot\log_5 8$;

d) $a=\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\ldots\cdot\log_{11}12+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}6$.

Scanned with OKEN Scanner

24. Arătați că numărul $a = \log_{\sqrt{3}} \frac{9}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{5+2\sqrt{6}}$ este natural.

25. Arătați că

$E = \frac{1}{1+\log_2 3+\log_2 5} + \frac{1}{1+\log_3 2+\log_3 5} + \frac{1}{1+\log_5 2+\log_5 3}$ este număr natural.

26. Determinați numărul real a dacă:

a) $2\log_3 a = 3\log_3 2 + \log_3 5 - \log_3 10$; b) $\lg 3a = \frac{3}{2}\lg 4 + \lg 12 - 3\lg 2$.

27. Care număr este mai mare?

a) $\log_3 5$ sau $\log_3 4$; b) $\log_2 3$ sau 2; c) $\log_{0,3} 2$ sau $\log_{0,3} 3$;

d) $\log_{\frac{1}{3}} 4$ sau -1; e)* $\log_3 5$ sau $\log_4 5$.

28. Demonstrați că: a) $\log_3 4 > \log_4 3$; b) $\frac{9}{4} < \log_2 5 < \frac{5}{2}$; c)* $\log_3 4 > \log_4 5$. *(Variante Bac, 2007)*

29. Demonstrați că: a) $2 \in (\log_3 4, \sqrt{5})$; b) $\sqrt[3]{3} \in (\sqrt{2}, \log_2 5)$; c)* $\left(-\infty, \sqrt{2}\right) \cap \left(\log_2 3, +\infty\right) = \varnothing$.

(Variante Bac, 2009)

30. Calculați partea întreagă a numărului $\log_2 500$. *(Variante Bac, 2008)*

31. a) Arătați că $\frac{3}{2} < \log_2 3 < 2$. b) Calculați partea întreagă a numărului $a = \log_2 3 + \log_3 2$.

32. Dacă $\log_3 2 = a$, calculați $\log_{12} 18$ în funcție de a.

33*. Dacă $\log_{40} 100 = a$, calculați $\log_{20} 50$.

34. Calculați: a) $100^{\lg 2} + \sqrt[3]{-27}$; b) $10^{\lg 7} - \sqrt[3]{343}$. *(Variante Bac, 2008)*

35. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $a^2 + 4b^2 = 12ab$. Arătați că $2\lg(a+2b) - 4\lg 2 = \lg a + \lg b$.

(Variante Bac, 1999)

36*. Fie $a, x \in (0, \infty)$, $a \neq 1$. Arătați că $\log_{a^3} x + \log_{a^5} x + \ldots + \log_{a^{4n^2-1}} x = \frac{n}{2n+1}\log_a x$, $n \in \mathbb{N}^*$.

37*. Fie a, b, c, x numere reale strict pozitive și diferite de 1. Arătați că a, b, c sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice dacă și numai dacă $\frac{1}{\log_a x}, \frac{1}{\log_b x}, \frac{1}{\log_c x}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. *(Variante Bac, 1999)*

2.2. Numere complexe

1. Considerăm numerele complexe $z_1 = 3 - 2i$ și $z_2 = -4 + 3i$. Calculați $z_1 + z_2$; $3z_1 - 2z_2$.

2. Calculați: a) $i \cdot i^2 \cdot \ldots \cdot i^{10}$; b) $1 + i + i^2 + \ldots + i^{10}$. *(Variante Bac, 2007)*

Scanned with OKEN Scanner

3. Calculați:

a) $(1-i)(1+2i)-3(2-i)$; b) $(2+i)(3-2i)-(1-2i)(2-i)$; c) $\frac{1+4i}{4+7i}+\frac{1-4i}{4-7i}$;

d) $\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$; e) $\left(\frac{(1-2i)(3i-1)}{5}\right)^4$; f) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{24}$.

(Variante Bac, 2009)

4. Demonstrați că:

a) $\frac{25}{4+3i}+\frac{25}{4-3i}\in\mathbb{Z}$; b) $\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1-3i}{1+3i}\in\mathbb{R}$; c) $(1+i\sqrt{3})^3\in\mathbb{Z}$;

d) $(1+i\sqrt{3})^2+(1-i\sqrt{3})^2\in\mathbb{Z}$; e) $(1-i)^{24}\in\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2009)*

5. Determinați:

a) partea imaginară a numărului $z=\frac{2+3i}{3-2i}$; b) partea reală a numărului $z=\frac{2-i}{3i+4}$;

c) partea reală și partea imaginară ale numărului complex $z=\frac{5+8i}{8-5i}$;

d) partea imaginară a numărului complex $z=(1+i)^{10}+(1-i)^{10}$. *(Variante Bac, 2007)*

6. a) Se consideră $a\in\mathbb{R}$ și numărul complex $z=\frac{a+2i}{2+ai}$. Determinați a pentru care $z\in\mathbb{R}$.

b) Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât numărul $z=\frac{1}{a(1+i)+1-2i}$ să aibă partea reală egală cu $\frac{2}{5}$.

(Variante Bac, 2008)

7. a) Determinați $x, y\in\mathbb{R}$, astfel încât $\frac{1+2x}{1-2i}+\frac{2+y}{1+2i}=i$.

b) Determinați $a, b\in\mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea $(1-i\sqrt{3})^3=a+ib$. *(Variante Bac, 2007)*

8. Determinați forma algebrică a numerelor complexe:

a) $z=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{103}+i^{102}$; b) $z=1+\frac{1-i}{1+i}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^9$.

9. Determinați conjugatul numărului i^3+2. *(Variante Bac, 2007)*

10. Fie z un număr complex. Arătați că $i(z-\bar{z})$ este număr real.

11. Dacă $z\in\mathbb{C}$ astfel încât $2\bar{z}+3z\in\mathbb{R}$, demonstrați că $z\in\mathbb{R}$.

12. Fie $z_1=-3+2i$; $z_2=4-i$. Arătați că $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$; $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$; $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Scanned with OKEN Scanner

13. Se consideră numărul complex $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculați $z + \frac{1}{z}$. b) Arătați că $z^2 = \bar{z}$. *(Variante Bac, 2008)*

14. Determinați $z \in \mathbb{C}$, dacă:

a) $z + 3i = 6\bar{z}$; b) $2\bar{z} + z = 3 + 4i$; c) $\frac{\bar{z}+7i}{z} = 6$. *(Variante Bac, 2009)*

15. Determinați numerele complexe z care verifică egalitatea $z^2 = i\bar{z}$.

16. Considerăm numerele complexe $z_1 = 3 - 4i$ și $z_2 = -1 + 2i$. Arătați că:

a) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; b) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; c) $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$.

17. Calculați modulele numerelor complexe: $z_1 = (3 - 4i)(1 + i)$; $z_2 = \sqrt{2} - 1 + i(\sqrt{2} + 1)$; $z_3 = \frac{8+i}{7-4i}$;

$z_4 = (\sqrt{2} - i)(\sqrt{3} + i)$; $z_5 = (2 + 3i)^2$; $z_6 = (2 - i)^3 + (2 + i)^3$. *(Variante Bac, 2007-2009)*

18. Precizați dacă există $z \in \mathbb{C}$ care să verifice simultan condițiile $|z - 1 - 2i| = 3$ și $\text{Re}\, z \geq 5$.

(Variante Bac, 1999)

19. Fie $z = a + 2i$, $a \in \mathbb{R}$. Calculați $|z|$, știind că $1 + i(z + \bar{z}) \in \mathbb{R}$.

20. Fie $z = 1 + i + i^2 + \ldots + i^n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Dacă $n = 2010$, calculați $|z|$. b) Determinați n, astfel încât $z \in \mathbb{R}$.

21*. Fie $z \in \mathbb{C}$, astfel încât $(z + i)^{10} + (z - i)^{10} = 0$.

a) Arătați că $|z + i| = |z - i|$. b) Demonstrați că $z \in \mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2007)*

22. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:

a) $z^2 = -9$; b) $z^2 - 2z + 2 = 0$; c) $z^2 - 8z + 25 = 0$; d) $z^2 = 2i$. *(Variante Bac, 2007-2009)*

23. Fie z_1, z_2 soluțiile ecuației $2z^2 + z + 50 = 0$. Calculați $|z_1| + |z_2|$. *(Variante Bac, 2009)*

24. Se consideră numărul complex $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ și notăm cu $\bar{z} = a - bi$.

a) Calculați $z + \bar{z}$ și $z \cdot \bar{z}$. b) Verificați că $z^2 - 2az + a^2 + b^2 = 0$.

c) Determinați $c, d \in \mathbb{R}$, știind că $x = 3 + 4i$ verifică ecuația $x^2 + cx + d = 0$.

25. a) Arătați că $(1 - i)^2 = -2i$.

b) Rezolvați ecuația $iz^2 + (3 + i)z + 2 - 2i = 0$, $z \in \mathbb{C}$.

26. Dacă z este o soluție a ecuației $z^2 + 2z + 4 = 0$, arătați că $z^2 - \frac{8}{z} = 0$. *(Variante Bac, 2008)*

Scanned with OKEN Scanner

27. Fie $z \in \mathbb{C}^*$, astfel încât $z^2 - z + 1 = 0$. Calculați:

a) $\left|z + \frac{1}{z}\right|$; b) z^3; c) $z^{100} + \frac{1}{z^{100}}$.

28. Fie $z \in \mathbb{C}^*$, astfel încât $z + \frac{1}{z} = 1$.

a) Arătați că $z^3 = -1$. b) Calculați $z^{10} + z^{-10}$.

29*. Se consideră $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$.

a) Calculați suma $S = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{99}$. b) Arătați că $[(1+\alpha)^{6n+2} + 1]^2 - \alpha = 0$.

30. Fie numărul complex $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

a) Arătați că $z^2 - z + 1 = 0$ și $z^3 = -1$.
b) Calculați $S_k = z^k + z^{-k}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
c) Arătați că $P = (z + z^{-1})(z^2 + z^{-2}) \cdot \ldots \cdot (z^{99} + z^{-99}) = 2^{33}$.

31. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:

a) $t^3 + t^2 + t + 1 = 0$; b) $\left(\frac{3z+1}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{3z+1}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{3z+1}{z-i}\right) + 1 = 0$. *(Variante Bac, 1999)*

32. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile:

a) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$; b) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$.

33*. Determinați cardinalul mulțimilor $M_2 \cup M_4$ și $M_{12} \cup M_{16}$, dacă $M_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$.

34. Considerăm funcția $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 3z - 4\bar{z}$.

a) Arătați că $f(a + bi) = -a + 7bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $(f \circ f)(z) = 25z - 24\bar{z}$.

c) Arătați că $f(z) = 0$ dacă și numai dacă $z = 0$.

2.3. Funcții

1. Determinați domeniul maximal de definiție D al fiecăreia dintre următoarele funcții:

a) $f(x) = \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+1)}$; b) $f(x) = x + \log_2(2 - x - x^2)$;

c) $f(x) = \sqrt{x} + \lg\frac{x+1}{2-x}$; d) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x-1}$.

2. a) Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Calculați $(f \circ f)(512)$. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

b) Fie $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=2^{\frac{1}{x}}$. Calculați $(f\circ f)\left(-\frac{1}{2}\right)$.

c) Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_2 x$. Calculați $(f\circ f)(256)$.

3. Calculați $S=f(1)+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)+\ldots+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$, unde $f(x)=\frac{\lg(1+x)}{x}$, $x\in(0,\infty)$. *(Variante Bac, 2009)*

4*. a) Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\lg x$. Demonstrați că $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, $\forall x_1,x_2\in(0,\infty)$.

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq1$. Demonstrați că $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$.

5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1-2x$. Demonstrați că funcția $f\circ f\circ f$ este strict descrescătoare. *(Variante Bac, 2009)*

6. Studiați monotonia funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2009^x+\log_{2009}x$. *(Variante Bac, 2009)*

7. Studiați paritatea următoarelor funcții:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}-x^3$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x+2^{-x}$;

c) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x+1$. *(Variante Bac, 2009)*

8*. a) Fie $A=\{-2,-1,0,1,2\}$. Determinați numărul funcțiilor pare $f:A\to A$.

b) Fie $A=\{-2,-1,0,1,2\}$. Aflați numărul funcțiilor impare $f:A\to A$. *(Variante Bac, 2009)*

9*. Determinați imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$. *(Variante Bac, 2009)*

10. a) Dacă funcția $f:\{1,2,3,4\}\to\{0,1,2\}$ este definită prin $f(1)=2, f(2)=0, f(3)=1, f(4)=2$, arătați că f nu este injectivă, dar este surjectivă.

b) Dacă funcția $f:\{1,2,3,4\}\to\{0,1,2,3\}$ este definită prin $f(1)=0, f(2)=3, f(3)=2, f(4)=3$, arătați că f nu este injectivă, nici surjectivă.

c) Dacă funcția $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ este definită prin $f(1)=2, f(2)=0, f(3)=3$, arătați că f este injectivă, dar nu este surjectivă.

11. Se consideră mulțimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ și o funcție bijectivă $f:A\to A$. Calculați suma $S=f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$. *(Variante Bac, 2009)*

12. a) Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|2x+1|$ nu este nici injectivă, nici surjectivă.

b) Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x+1$ nu este nici injectivă, nici surjectivă.

13. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x-1, x\leq1\\ x+1, x>1\end{cases}$. Arătați că f este injectivă, dar nu este surjectivă.

Scanned with OKEN Scanner

14. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x+1, x<1\\ x-1, x\geq 1\end{cases}$. Arătați că f nu este injectivă, dar este surjectivă.

15. a) Dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+x+1$ are inversa g, calculați $g(1)$.

b) Dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^5+x+1$ are inversa g, calculați $g(3)$. *(Variante Bac, 2007)*

16. Arătați că funcția $f:(0,\infty)\to(1,3), f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}$ este inversabilă. *(Variante Bac, 2009)*

17. Arătați că funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(x)=3x+1$ nu este inversabilă. *(Variante Bac, 2009)*

18. Arătați că următoarele funcții sunt inversabile și determinați inversele lor:

a) $f:(0,\infty)\to(1,\infty), f(x)=x^2+1$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^3+1$;

c) $f:(1,\infty)\to(2,\infty), f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; d) $f:[2,5]\to[1,7], f(x)=2x-3$;

e) $f:\mathbb{R}\to(0,\infty), f(x)=\log_2(3^x+1)$; f) $f:(1,\infty)\to(0,\infty), f(x)=3\log_2 x$. *(Variante Bac, 2009)*

19. Arătați că următoarele funcții sunt bijective și determinați inversele lor.

a) $f:\mathbb{R}\to(2,\infty), f(x)=3^x+2$; b) $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\lg(x-1)+1$;

c) $f:[-1,\infty)\to[1,\infty), f(x)=1+\sqrt{x+1}$; d) $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}, f(x)=\dfrac{x}{x-2}$;

e) $f:[1,\infty)\to[1,\infty), f(x)=x^2-2x+2$.

20. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}\to\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{3}\right\}, f(x)=\dfrac{2x}{3x+2}$ este inversabilă și determinați-i inversa.

21. Arătați că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x, x<0\\ x^2, x\geq 0\end{cases}$ este inversabilă. Determinați f^{-1}.

22. Considerăm funcțiile $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_2 x$ și $g:\mathbb{R}\to(0,\infty), g(x)=2^x$. Arătați că f și g sunt inversabile $f^{-1}=g$ și $g^{-1}=f$.

23. Arătați că funcția $f:[1,\infty)\to[0,\infty), f(x)=\sqrt{x-1}$ este inversabilă. Dacă f^{-1} este inversa funcției f, determinați funcțiile $g=f\circ f^{-1}$ și $h=f^{-1}\circ f$. Sunt egale funcțiile g și h?

24. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x-3$ nu este inversabilă. Găsiți o restricție a funcției f, inversabilă.

25. Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b, a, b\in\mathbb{R}, a\neq 0$, dacă $f(1-x)+f(x)+f^{-1}(1+x)=x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

26. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b, a\neq 0$. Determinați $a, b\in\mathbb{R}, a\neq 0$, dacă $f^{-1}(-a)=b$ și $f^{-1}(-b)=a$.

Scanned with OKEN Scanner

27. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ dacă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ este inversabilă și $f^{-1} = f$.

28*. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție ce verifică condiția $f(f(x)) = 4x - 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că f este bijectivă.
b) Determinați funcțiile de gradul I care verifică relația dată.

29. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție bijectivă. Determinați f, știind că $(f \circ f)(x) = 2f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

(Variante Bac, 2008)

30. Arătați că funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2^x + 3\log_2 x$ este injectivă.

31. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4^x - 6 \cdot 2^x - 1$. Arătați că:

a) $f(x) = (2^x - 2)(2^x - 4) - 9$;
b) f nu este injectivă;
c) $f(x) = (2^x - 3)^2 - 10$;
d) f nu este surjectivă.

32*. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ax^2, x \le 0 \\ bx, x > 0 \end{cases}$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât:

a) f să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$; b) f să fie descrescătoare pe $\mathbb{R}$; c) f să fie bijectivă.

33*. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+1, x \le 2 \\ 2x+a, x > 2, a \in \mathbb{R} \end{cases}$. Determinați a, astfel încât f să fie:

a) injectivă; b) surjectivă; c) bijectivă.

34*. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, x \in \mathbb{Q} \\ 1-x, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$.

a) Arătați că $(f \circ f)(x) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
b) Arătați că f este bijectivă.

35. Funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + \lg x$ este bijectivă. Determinați $f^{-1}(11)$.

36. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^x + x - 1$ este bijectivă. Determinați $f^{-1}(5)$.

37. Arătați că funcția $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = 2z + 3\bar{z}$ este inversabilă. Determinați f^{-1}.

38*. Fie funcția $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = -2i\bar{z}$. a) Arătați că f este bijectivă. b) Determinați f^{-1}.

c) Arătați că $f(z) \cdot \overline{f^{-1}(z)} \ge 0$, oricare a fi $z \in \mathbb{C}$.

39*. Fie $f: A \to B$ și $g: B \to C$. Demonstrați că:

a) dacă f și g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă;
b) dacă f și g sunt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă.

Scanned with OKEN Scanner

40*. Fie $f: A \to B$ și $g: B \to C$. Demonstrați că:

a) dacă $g \circ f: A \to C$ este injectivă, atunci f este injectivă;

b) dacă $g \circ f: A \to C$ este surjectivă, atunci g este surjectivă.

***

41. Determinați domeniul maximal de definiție al fiecăreia dintre următoarele funcții:

a) $f(x) = \arcsin x + \arccos(1-x)$; b) $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$; c) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}$.

42. Calculați: a) $\arccos(-1) + \arcsin 1$;

b) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; c) $\operatorname{arctg}1 + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$.

43. Determinați valoarea expresiei $E = \sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. *(Variante Bac, 2009)*

44. Calculați: a) $\sin\left(2\arccos 1 + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

b) $\cos\left(2\operatorname{arctg}1 - \arcsin\frac{1}{2}\right)$; c) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos(-1)\right)$.

45. Calculați $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$. *(Variante Bac, 2009)*

46*. Fie $x \in [-1, 1]$. Calculați:

a) $\sin(2\arcsin x)$; b) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)$.

47*. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin(\sin x)$. Calculați $f(a) + f(a+\pi) + f(a+2\pi) + f(a+3\pi)$, unde $a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

48*. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos(\cos x)$. Calculați $S = f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \ldots + f(2006\pi)$.

(Variante Bac, 2006)

49*. Calculați $\arccos(\cos a)$, unde $a \in [\pi, 2\pi]$.

50. Calculați:

a) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$; b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2}{3}\right)$; c) $\sin\left(2\arccos\frac{4}{5}\right)$; d) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

51. Calculați: a) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\arcsin\frac{4}{5}\right)$; b) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

2.4. Ecuații și inecuații

1. Rezolvați ecuația: $\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x^2}=\sqrt{x+3}-2$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\sqrt{2-x}-x=0$; b) $\sqrt{2-x}+x=0$; c) $\sqrt{2-x}-|x|=0$. *(Variante Bac, 2008)*

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\sqrt{x^2-3}-x=-1$; b) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=1$; c) $x^2+x=2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$;

d) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=2$; e) $\sqrt{x^3-2x^2}=2x$. *(Variante Bac, 2008)*

4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $x=6(\sqrt{x-2}-1)$; b) $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$; c) $2x+\sqrt{16+x^2}=11$.

5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\sqrt{2x+1}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-3}$; b) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$. *(Variante Bac, 1998)*

6. Rezolvați următoarele ecuații:

a) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{5}{2}$; b) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\frac{5}{2}$.

7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\sqrt[3]{x-2}+x=2$; b) $\sqrt[3]{1-x}=1+x$; c) $\sqrt[3]{7x+1}-x=1$;

d) $\sqrt{2-x}-\sqrt[3]{x-2}=0$; e) $\sqrt[6]{x^2-2x+1}=\sqrt[3]{3-x}$. *(Variante Bac, 2009)*

8*. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile: a) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-1}=1$; b) $\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+2}=1$.

9. Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare dintre următoarele propoziții:

a) dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $a > b$, atunci $a^2 > b^2$;

b) dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $a^2 > b^2$, atunci $a > b$;

c) dacă $a, b \in \mathbb{R}_+$, atunci $a > b$ dacă și numai dacă $a^2 > b^2$.

10. Rezolvați inecuațiile:

a) $\sqrt{x^2-4x} \geq x-3$; b) $\sqrt{x-1} \leq 2x-3$; c) $\sqrt{2-x} < x$. *(Bacalaureat, 1998)*

Scanned with OKEN Scanner

11. Rezolvați inecuațiile:

a) $\sqrt{x^2-x-12}+1\geq x$; b) $\sqrt{x^2-6x+8}+1\leq x$; c) $3\sqrt{-x^2-x+6}\geq -4x-2$.

12. Rezolvați inecuația $\sqrt[3]{2-x^2}\geq 1$. *(Variante Bac, 2009)*

13*. a) Arătați că $x+8\geq 6\sqrt{x-1}$, pentru orice $x\in[1,\infty)$.

b) Arătați că $x+8+6\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}+3)^2$, $\forall x\in[1,\infty)$.

c) Considerăm funcția $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8+6\sqrt{x-1}}$. Arătați că:

$$f(x)=\begin{cases}6, x\in[1,10]\\ 2\sqrt{x-1}, x\in(10,\infty)\end{cases}.$$

14*. a) Arătați că $x+1+\sqrt{x^2+x}\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\cup[0,\infty)$.

b) Determinați valorile lui $x\in\mathbb{R}$ pentru care are sens expresia $\sqrt{x+1-\sqrt{x^2+x}}$.

c) Rezolvați ecuația: $\sqrt{x+1+\sqrt{x^2+x}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x^2+x}}=2$.

***

15. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $125^x=\frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{2^x}=4$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{x-2}$;

d) $4^{x+2}=2^{x^2+5}$; e) $2^{x^2-4x}=\frac{1}{8}$; f) $\frac{2^x}{3^x}=\frac{3}{2}$. *(Variante Bac, 2008)*

16. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $9^x-10\cdot 3^{x-1}+1=0$; b) $2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+8=0$; c) $25^x+3\cdot 5^x=4$;

d) $3^{x+1}+3^{1-x}=10$; e) $3^{2x+1}-10\cdot 3^{x+1}+27=0$. *(Variante Bac, 2009)*

17. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}+\left(\frac{3}{5}\right)^{1+x}=1{,}2$; b) $2^{3x-2}=4^{x^2-3x-1}$; c) $16\sqrt{(0{,}25)^{5-\frac{x}{4}}}=2^{\sqrt{x+1}}$;

d) $4^{x-\sqrt{x^2-5}}-12\cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}}+8=0$. *(Variante Bac, 1998-1999)*

18. a) Verificați identitatea $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

b) Arătați că, dacă $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$, atunci $x=y=z$.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x+9^x+49^x=6^x+14^x+21^x$.

19. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $x+3^x=4$; b) $3^x+2\cdot 5^x=3$. *(Variante Bac, 2007)*

Scanned with OKEN Scanner

20. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\log_5(9-x^2)=1$; b) $\log_3(\log_4(x^2-17))=1$;

c) $\log_3(x^2-6)=\log_3(2x-3)$; d) $\log_{3x+5}(9x^2+8x+3)=2$. *(Variante Bac, 2009)*

21. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\lg(x+1)-\lg 9=1-\lg x$; b) $\log_2(x+2)-\log_2(x-5)=3$;

c) $\log_5(3x+1)=1+\log_5(x-1)$; d) $\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg 2+\lg 5$. *(Variante Bac, 2008)*

22. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile: a) $\log_x 2+\log_{\sqrt{x}} 2=9$;

b) $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=\frac{11}{6}$; c) $\log_5 x+\log_x 5=\frac{5}{2}$. *(Variante Bac, 2009)*

23. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile: a) $\lg^2 x+5\lg x-6=0$;

b) $\log_2^2 x+\log_2 4x=4$; c) $2\lg^2(x^3)-3\lg x-1=0$. *(Variante Bac, 1998)*

24. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1$; b) $1+2\log_{x+2}5=\log_5(x+2)$. *(Variante Bac, 1998)*

25. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\log_x\sqrt{5}+\log_x(5x)=\frac{9}{4}+(\log_x\sqrt{5})^2$; b) $3\log_x 4+2\log_{4x}4+3\log_{16x}4=0$. *(Variante Bac, 1999)*

26. Considerăm expresia $E(x)=\log_2(2x^2)+(\log_2 x)(1+\log_2 x)+\frac{1}{2}(\log_4 x^4)^2+(\log_2 x)^3$.

a) Stabiliți domeniul de existență al expresiei și arătați că $E(x)=(1+\log_2 x)^3$.

b) Rezolvați ecuația $E(x)=-8$. *(Variante Bac, 1999)*

27. a) Arătați că are loc egalitatea $xy-2x-2y+4=(x-2)(y-2)$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$.

b) Rezolvați ecuația $\log_x 2\cdot\log_x 3-2\log_x 6+4=0$, unde $x>0$, $x\neq 1$.

c) Câte soluții reale are ecuația $16^x-2^{x+1}-2^{3x+1}+4=0$?

28. Rezolvați ecuația: $\log_3(9^x+9)=x-\log_{\frac{1}{3}}(28-2\cdot 3^x)$. *(Variante Bac, 1999)*

29. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\log_2(2^{-x+1}+1)=x$; b) $3\cdot 4^x-6^x=2\cdot 9^x$. *(Variante Bac, 2009)*

30. a) Arătați că pentru orice număr real x, numerele 3^x-1, 3^{x+1} și $5\cdot 3^x+1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. *(Variante Bac, 2008)*

b) Există numere reale strict pozitive x astfel încât $\lg 2$, $\lg(2^x-1)$ și $\lg(2^x+3)$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice? *(Variante Bac, 1999)*

31. Rezolvați sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases}\log_3(\log_2 x)+\log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{2}} y)=1\\ xy^2=4\end{cases}$; b) $\begin{cases}4^{\frac{x}{y}}\cdot 4^{\frac{y}{x}}=32\\ \log_3(x-y)=1-\log_3(x+y)\end{cases}$. *(Variante Bac, 1998)*

Scanned with OKEN Scanner

32. Rezolvați inecuațiile: a) $(\sqrt[3]{2})^x > \frac{1}{8}$; b) $2^x < 2^{\frac{4}{x}}$;

c) $2^{x+1} + 2^{3-x} \le 8$; d) $4^x + 2 \cdot 6^x \le 3^{2x+1}$. *(Variante Bac, 2007)*

33. Rezolvați inecuațiile: a) $\log_3 x^2 \le 2$;

b) $\log_2(x+7) - 2\log_2 x < 3$; c) $\frac{1}{12}\lg^2 x \le \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg x$.

d) $\log_2 x + \log_x 2 \le \frac{5}{2}$; e) $1 + \log_2(4^{x-2} + 9) < \log_2(2^{x-2} + 18)$.

34. Rezolvați inecuațiile: a) $\lg^2 x - \lg x^2 - 8 \le 0$;

b) $\sqrt{\log_3(9x-3)} \le \log_3\left(x - \frac{1}{3}\right)$; c) $\log_{\frac{1}{2}} x^2 \ge \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$. *(Variante Bac, 1999)*

35. Rezolvați inecuațiile:

a) $\log_{1+x}(2-x) \le 1$; b) $\log_2(9 - 2^x) > 3 - x$. *(Variante Bac, 1998)*

***

36. Rezolvați ecuațiile: a) $\cos 2x = \frac{1}{2}, x \in [0, 2\pi)$;

b) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, x \in (0, 2\pi)$; c) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x \in (0, 4)$. *(Variante Bac, 2009)*

37. Rezolvați ecuațiile: a) $\sin 3x = \sin x, x \in (0, \pi)$;

b) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x, x \in \mathbb{R}$; c) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), x \in (0, \pi)$;

d) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), x \in \mathbb{R}$; e) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right), x \in \mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2009)*

38. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile: a) $\sin 2x = \cos x$;

b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; c) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$. *(Variante Bac, 2009)*

39. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\sin x = 1 + \cos^2 x$; b) $\cos 2x + \sin x = 0$; c) $\cos 2x = 2\sin^2 x$;

d) $\sin 2x = 2\sin^2 x$; e) $\cos 2x + 2\cos^2 x - 6\sin x - 5 = 0$. *(Variante Bac, 2009)*

40. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\sin x + \cos x = 0$; b) $\sin x + \cos x = 1$;

c) $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$; d) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

41. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile: a) $5\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$;

b) $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$; c) $2\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 1$.

42. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile: a) $\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x = 0$;

b) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$; c) $\cos 5x - \cos x = \sin 5x - \sin x$.

43*. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile: a) $\cos 4x = \cos^2 x$;

b) $\sin x + 2\cos^2 \frac{x}{2} = 1$; c) $\cos^2 x + \cos^2 2x = 1$.

44*. Determinați numărul real x, dacă $\sin x - \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$.

45*. Rezolvați ecuația $\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x} = \sqrt{2}\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

46*. Determinați $m \in \mathbb{R}$, dacă ecuația $m\cos 2x - \cos x = 2m + 1$ are soluția $x = \frac{4\pi}{3}$. Pentru m astfel determinat, găsiți soluțiile din $[0, 2\pi)$.

47. Rezolvați ecuațiile: a) $\arcsin 2x = -\frac{1}{2}$; b) $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin x = \frac{\pi}{3}$;

c) $\arcsin x + \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$; d) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$; e) $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

(Variante Bac, 2009)

2.5. Combinatorică

1. Care este cel mai mic număr natural n pentru care $n! > 1000$? *(Variante Bac, 2003)*

2*. Arătați că 50! nu este nici pătrat perfect, nici cub perfect. *(Variante Bac, 2001)*

3. a) Arătați că $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+2)!} = \frac{n^2+3n+1}{(n+2)!}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculați suma $S_n = \frac{1}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{11}{4!} + \ldots + \frac{n^2+3n+1}{(n+2)!}$, $n \in \mathbb{N}$.

c) Arătați că $S_n \in \left[\frac{1}{2}, 2\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Calculați: a) $\frac{C_{20}^{10}}{C_{20}^{9}}$; b) $A_5^3 - 6C_5^3$; c) $A_4^3 - A_3^2 - C_4^2$. *(Variante Bac, 2008)*

5. Care este cel mai mare element din mulțimea $A = \{C_7^3, C_7^5, C_7^6\}$?

Scanned with OKEN Scanner

6. Arătați că numerele C_7^k, $k=2, 3, \ldots, 6$ sunt divizibile cu 7.

7. Calculați:

a) $\frac{n!+(n+1)!}{(n+1)!-n!}, n \in \mathbb{N}$; b) $\frac{A_n^6+A_n^5}{A_n^4}, n \in \mathbb{N}, n \geq 6$; c) $\frac{C_n^3}{C_n^3+C_n^4}, n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

8. Demonstrați că: a) $C_{2n}^n = 2C_{2n-1}^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$; b) $C_{n+1}^4 = C_n^4 + C_n^3, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$. *(Variante Bac, 2008)*

9. Demonstrați că: a) $\frac{A_{n+2}^{k+2}}{A_{n+1}^{k+1}+A_n^k} = n+1, \forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$; b) $\frac{C_n^k}{C_n^{k+1}+C_n^k} = \frac{k+1}{n+1}, \forall n, k \in \mathbb{N}, n \geq k+1$.

10. a) Verificați identitatea: $C_{m+n+1}^m \cdot C_{n+1}^1 = \frac{(m+n+1)!}{m! \cdot n!}, \forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

b) Arătați că numărul $10! \cdot 9!$ divide $20!$.

11*. Arătați că $(n!)^2$ divide $(2n)!$ pentru orice n natural. *(Variante Bac, 2008)*

12. a) Determinați $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, astfel încât C_n^3 să dividă C_{n+1}^3. *(Variante Bac, 2009)*

b) Determinați $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $11 \mid C_{11}^k$. *(Variante Bac, 2009)*

13. În câte zerouri se termină C_{100}^{20}?

14. Se consideră șirul: $a_n = \left(1-\frac{1}{C_3^2}\right)\left(1-\frac{1}{C_4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{C_{n+1}^2}\right), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

a) Arătați că $a_n = \frac{n+2}{3n}$, oricare ar fi $n \geq 2$.

b) Calculați $[3a_n]$, $n \geq 2$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

15. Determinați numerele reale x pentru care sunt definite numerele:

a) A_{7-x}^{x-3}; b) C_{x+1}^{2x-8}.

16. Rezolvați ecuațiile: a) $C_x^2 + A_x^2 = 30$; b) $C_{2x-3}^2 = 3$;

c) $A_x^5 - 3A_x^4 = 21A_x^3$; d) $6 \cdot C_x^1 + 6 \cdot C_{x+2}^3 = 13C_{x+1}^2$; e) $A_{x-2}^2 + C_x^2 = 41$. *(Variante Bac, 2009)*

17. Rezolvați ecuațiile:

a) $(n+1)! = 30(n-1)!$ b) $A_x^6 - 24xC_x^4 = 11A_x^4$; c) $\frac{1}{A_x^n} + \frac{1}{A_x^5} = \frac{8}{A_x^6}$.

18. Rezolvați inecuațiile:

a) $C_{10}^{x-1} \geq 2C_{10}^x$; b) $(x+3)C_{x+2}^2 - 6C_{x+1}^1 \leq 9(x+1)$.

19. Rezolvați inecuațiile:

a) $C_x^{x-1} + C_{x-1}^{x-3} \leq 9$;

b) $(x+1)! - x! \leq 100$; c) $C_n^3 \geq C_n^5$; *(Variante Bac, 2008)*

d) $5C_n^3 \geq C_{n+2}^4$; e) $C_7^k \geq C_7^{k-1}$; f) $A_{x-1}^5 \leq 12A_{x-1}^3$;

g) $(x-2)! \leq 30(x-4)!$; h) $2C_n^2 \leq n+8$; i) $C_{17}^n \leq C_{17}^{n-2}$.

Scanned with OKEN Scanner

20. Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} A_{x+1}^{y-1} = 10A_{x+1}^{y-2} \\ 3C_{x+1}^{y-1} = 5C_{x+1}^{y} \end{cases}$; b) $\begin{cases} A_x^y = 7A_x^{y-1} \\ 6C_x^y = 5C_x^{y+1} \end{cases}$. *(Variante Bac, 1998)*

21*. a) Determinați $a \in \mathbb{R}$, pentru care $C_x^2 = \frac{ax(x-1)}{2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}, x \geq 2$.

b) Rezolvați inecuația $C_n^2 < 6$.

c) Arătați că $C_x^y = C_{x+1}^{y+1} - C_x^{y+1}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{N}, x > y \geq 0$.

d) Arătați că $C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \ldots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1} - 1$, oricare ar fi $p, n \in \mathbb{N}^*$. *(Variante Bac, 2002)*

***

22. Câte numere de zece cifre distincte încep cu 20 și se termină cu 14?

23. Se consideră cifrele 1, 2, 3, ..., 7.

a) Câte numere de 4 cifre distincte putem forma cu cifrele date?

b) Câte dintre aceste numere încep cu 4?

c) Câte dintre aceste numere încep cu 4 și se termină cu 5?

24. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care mulțimea $A = \{1, 2, ..., n\}$ are exact 120 de submulțimi cu două elemente. *(Variante Bac, 2008)*

25. Un antrenor are la dispoziție 10 jucători. În câte moduri poate forma o echipă formată din 6 jucători?

26. Câte submulțimi ale mulțimii $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ au cinci elemente și conțin numerele 2 și 3?

27. Câte submulțimi cu măcar trei elemente are mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$? *(Variante Bac, 2008)*

28. Aflați numărul submulțimilor mulțimii $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ care conțin pe 0. *(Variante Bac, 2007)*

29. Fie $A = \{1, 2, ..., 10\}$. Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A, care conțin elementul 1. *(Variante Bac, 2009)*

30. Aflați numărul de mulțimi X care verifică $\{1, 2, 3\} \cup X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *(Variante Bac, 2007)*

31. Determinați numărul de submulțimi cu număr impar de elemente ale mulțimii $\{a, b, c, d, e\}$. *(Variante Bac, 2007)*

32. Considerăm mulțimea $A = \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Determinați numărul submulțimilor mulțimii A care au 5 elemente, dintre care exact două sunt numere pare. *(Variante Bac, 2009)*

33. Considerăm mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Câte submulțimi ale lui A conțin trei elemente dintre care cel puțin unul este impar?

34. Considerăm mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Câte submulțimi ale lui A conțin cel puțin un element număr impar?

35. Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ care conțin cel puțin un număr par. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

36. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$.
a) Determinați numărul submulțimilor lui A care au trei elemente.
b)* Determinați numărul submulțimilor lui A care au trei elemente, iar suma acestora este un număr par.

37. Se consideră mulțimea $A = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24\}$. Determinați numărul tripletelor (a, b, c) de elemente ale lui A cu proprietatea că $a < b < c$. *(Variante Bac, 2008)*

38. a) Câte numere $\overline{abcd}$ putem forma, dacă $a > b > c > d$?
b) Câte numere $\overline{abcd}$ putem forma, dacă $a < b < c < d$?

39. Aflați numărul diagonalelor unui poligon convex cu 10 laturi.

40*. Considerăm două drepte paralele d_1 și d_2 și $A_1, A_2, \ldots, A_{10} \in d_1$; $B_1, B_2, \ldots, B_7 \in d_2$. Fie M mulțimea celor 17 puncte.
a) Câte drepte conțin cel puțin două puncte din mulțimea M?
b) Câte triunghiuri au vârfurile în trei puncte din mulțimea M?

41. Determinați în câte moduri se poate alcătui o echipă de cercetare formată din 2 biologi și 3 chimiști, dacă trebuie să alegem dintre 3 biologi și 4 chimiști. *(Variante Bac, 2007)*

42. Într-o clasă sunt 22 de elevi, din care 12 sunt fete. Determinați în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți. *(Variante Bac, 2009)*

43. Într-o clasă sunt 30 de elevi, dintre care 18 fete și 12 băieți. Formăm o echipă formată din 6 elevi care să conțină cel puțin 4 fete. În câte moduri putem forma echipa?

44*. Câte funcții $f: \{1, 2, 3, \ldots, 10\} \to \{0, 1\}$ au proprietatea că $f(1) + f(2) + \ldots + f(10) = 2$?
(Variante Bac, 2009)

45. Determinați numărul funcțiilor surjective $f: \{1, 2, 3\} \to \{4, 5\}$. *(Variante Bac, 2007)*

46. Determinați numărul funcțiilor injective $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cu proprietatea că $f(1) \neq 1$.
(Variante Bac, 2009)

47. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați numărul funcțiilor bijective $f: A \to A$, cu proprietatea că $f(1) = 2$.

48. Câte funcții $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ verifică simultan condițiile: $f(1) = f(4)$; $f(2)$ este impar, iar $f(3)$ este par?

49. Care este numărul funcțiilor $f: \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, știind că:
a) $f(0) = f(5)$;
b) $f(0) = f(5) = 1$?

50*. Considerăm mulțimile $A = \{1, 2. 3, 4\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determinați numărul funcțiilor $f: A \to B$ strict crescătoare. *(Variante Bac, 2009)*

51*. Determinați numărul funcțiilor strict monotone $f: \{1, 2, 3\} \to \{5, 6, 7, 8\}$. *(Variante Bac, 2009)*

***

52. Aplicând formula binomului, dezvoltați $(x - 2)^5$. Care este coeficientul celui de-al patrulea termen? Dar coeficientul binomial al celui de-al patrulea termen?

53. a) Găsiți al treilea termen al dezvoltării $(2x - \sqrt[3]{x})^{50}$. *(Variante Bac, 2007)*

Scanned with OKEN Scanner

b) Determinați al cincilea termen al dezvoltării $(2x+\sqrt[3]{x})^{10}$. *(Variante Bac, 2007)*

54. a) Găsiți termenul care nu conține x din dezvoltarea $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$. *(Variante Bac, 2009)*

b) Aflați termenul care nu conține x din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{200}$, $x>0$. *(Variante Bac, 2009)*

55. a) Determinați coeficientul lui x^3 din dezvoltarea $(2+x)^4$. *(Variante Bac, 2007)*

b) Aflați rangul termenului care conține a^4 din dezvoltarea $\left(a^2+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$, $a\neq 0$. *(Variante Bac, 2009)*

c) Determinați termenul care conține $\sqrt{a}$ din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^{12}$, $a>0$.

56. Fie dezvoltarea $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$, $x\neq 0$. Aflați termenul independent de x, știind că suma primilor trei coeficienți ai dezvoltării este egală cu 49.

57. Considerăm dezvoltarea $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{x}}+x^{\lg x}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, $x>0$.

a) Determinați n, dacă diferența dintre coeficientul binomial al celui de-al treilea termen și coeficientul binomial al celui de-al doilea termen al dezvoltării este 27.

b) Pentru $n=9$, verificați dacă există valori ale lui x, astfel încât al doilea termen al dezvoltării să fie 900. *(Variante Bac, 1999)*

58. Considerăm dezvoltarea $\left(\sqrt{y}+\frac{1}{2\sqrt[4]{y}}\right)^n$, $y\in\mathbb{R}$, $y>0$ și $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Determinați n pentru care coeficienții termenilor de rang 1, 2, respectiv 3, ai dezvoltării formează o progresie aritmetică.

b) Pentru $n=8$, găsiți termenii dezvoltării în care exponentul lui y să fie număr natural. *(Variante Bac, 1998)*

59. Se consideră dezvoltarea $\left(x\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, $x>0$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Determinați $n\in\mathbb{N}^*$, astfel încât coeficientul binomial al termenului al treilea să fie 36.

b) Pentru $n=9$, verificați dacă există un termen al dezvoltării care să conțină pe x^3. *(Bac, 1999)*

60. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt{2^x}+\sqrt{2^{1-x}}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Determinați n, dacă suma coeficienților binomiali ai ultimilor trei termeni ai dezvoltării este 22.

b) Pentru $n=6$, determinați x, știind că suma termenilor al treilea și al cincilea este egală cu 135. *(Variante Bac, 1998)*

Scanned with OKEN Scanner

61. Se consideră dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}+\frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}^*, x\in\mathbb{R}$.

a) Determinați n astfel încât C_n^0, $\frac{C_n^1}{2}$, $\frac{C_n^2}{4}$ să fie termeni succesivi ai unei progresii aritmetice.

b) Pentru $n=8$, verificați dacă există valori ale lui x astfel încât diferența dintre termenii al șaselea și al patrulea ai dezvoltării să fie 56. *(Variante Bac, 1999)*

62. În dezvoltarea $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b})^n$, determinați termenul ce conține b^2, știind că n este cea mai mare soluție a inecuației $\log_{\frac{1}{3}} n+\log_n \frac{n}{3}>0$.

63. Calculați suma termenilor iraționali ai dezvoltării binomului $(1+\sqrt{2})^{10}$. *(Variante Bac, 2007)*

64. Arătați că: a) $(\sqrt{2}+1)^7-(\sqrt{2}-1)^7\in\mathbb{Q}$; b) $(2+\sqrt{2})^7-(2-\sqrt{2})^7\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

65*. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ și sumele următoare: $S_1=C_n^0+2C_n^2+2^2C_n^4+\ldots; S_2=C_n^1+2C_n^3+2^2C_n^5+\ldots$

a) Arătați că $(1-\sqrt{2})^n=S_1-\sqrt{2}S_2$.

b) Arătați că $S_1^2-2S_2^2=(-1)^n$.

66. Calculați: a) $C_{16}^0+C_{16}^2+\ldots+C_{16}^{16}$; b) $C_{10}^0-C_{10}^2+C_{10}^4-C_{10}^6+C_{10}^8$;

c) $C_{2008}^0\cdot 5^{2008}-C_{2008}^1\cdot 5^{2007}\cdot 4+C_{2008}^2\cdot 5^{2006}\cdot 4^2-\ldots+C_{2008}^{2008}\cdot 4^{2008}$. *(Variante Bac, 2008)*

67*. a) Verificați că: $(1+k)C_n^k=C_n^k+nC_{n-1}^{k-1}$, $n,k\in\mathbb{N}^*, n\geq k$.

b) Demonstrați că: $1+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+(n+1)C_n^n=2^{n-1}(n+2)$. $n\in\mathbb{N}^*$.

68*. a) Arătați că $\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$, $n\geq k$.

b) Demonstrați că: $C_n^0+\frac{1}{2}\cdot C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

2.6. Matematici aplicate. Probabilități

1. Determinați ce procent din $a+b$ reprezintă numărul a, știind că a este egal cu 25% din b. *(Variante Bac, 2009)*

2. După o reducere de 20%, prețul unui produs este de 320 lei. Aflați prețul înainte de reducere. *(Variante Bac, 2009)*

3. Aflați prețul inițial al unui produs dacă, după o scumpire cu 15%, costă 460 lei. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

4. Suma de 500 de lei a fost depusă la o bancă cu o rată a dobânzii de 8%. Calculați dobânda obținută după un an. *(Variante Bac, 2009)*

5. O sumă de 1000 lei a fost depusă la o bancă și după un an s-a obținut o dobândă de 80 lei. Calculați rata dobânzii. *(Variante Bac, 2009)*

6. Prețul unui produs este de 5400 lei. Cu ce procent trebuie ieftinit produsul pentru ca acesta să coste 4860 lei? *(Variante Bac, 2009)*

7. După două ieftiniri succesive cu 10%, respectiv 25%, prețul unui produs este 540 lei. Aflați prețul produsului înainte de cele două ieftiniri. *(Variante Bac, 2009)*

8. După două scumpiri cu 10%, respectiv 20%, prețul unui produs este de 660 lei. Aflați prețul inițial al produsului. *(Variante Bac, 2009)*

9. Calculați TVA-ul pentru un produs, știind că prețul de vânzare al produsului este de 238 lei (procentul TVA-ului este de 19%). *(Variante Bac, 2009)*

10. Calculați TVA-ul unui produs, știind că prețul de vânzare al produsului este 357 lei (procentul TVA-ului este de 19%). *(Variante Bac, 2009)*

***

11. Calculați probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $2^n \leq 3 + \log_2 n$. *(Variante Bac, 2007)*

12. Determinați probabilitatea ca un element al mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ să fie soluție a inecuației $\log_2 n \geq \frac{n-1}{2}$.

13. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând o pereche $(a, b) \in A \times A$, să aibă loc egalitatea $a + b = 6$. *(Variante Bac, 2009)*

14. Calculați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $A = \left\{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, n < 1000\right\}$, acesta să fie număr rațional.

15. Determinați probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A = \{1, 3, 5, \ldots, 2009\}$, acesta să fie multiplu de 3. *(Variante Bac, 2009)*

16. Determinați probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A = \{2, 4, 6, \ldots, 2010\}$, acesta să fie divizibil cu 4, dar nu cu 8. *(Variante Bac, 2009)*

17. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Alegem la întâmplare o submulțime a lui A. Calculați probabilitatea ca submulțimea aleasă să aibă trei elemente. *(Variante Bac, 2009)*

18. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Alegem la întâmplare o submulțime dintre submulțimile nevide ale lui A. Calculați probabilitatea ca submulțimea aleasă să aibă toate elementele impare. *(Variante Bac, 2009)*

19. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr oarecare de două cifre, acesta să aibă ambele cifre impare. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

20. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr oarecare de trei cifre, produsul cifrelor sale să fie impar. *(Variante Bac, 2009)*

21. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr oarecare de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale. *(Variante Bac, 2009)*

22. Se alege, la întâmplare, o funcție $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Care este probabilitatea ca funcția aleasă să fie injectivă?

23. Fie mulțimea $A = \{f \mid f: \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 2, 3\}\}$.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii A.

b) Care este probabilitatea ca, alegând un element $f \in A$, acesta să aibă proprietatea $f(0) + f(1) = 2$?

24. Se alege, la întâmplare, o funcție $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{2, 3, 4, 5\}$. Care este probabilitatea ca aceasta să fie bijectivă?

25. Se alege, la întâmplare, o funcție $f: \{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Care este probabilitatea ca aceasta să fie strict crescătoare?

26. O urnă conține 8 bile roșii și 4 bile galbene. Se extrag două bile din urnă. Aflați probabilitățile evenimentelor:

a) ambele bile extrase sunt roșii;

b) ambele bile extrase sunt galbene;

c) bilele extrase au culori diferite.

27. Calculați media și dispersia variabilei aleatoare X: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

28*. O urnă conține $n + 8$ bile, dintre care 8 sunt albe, iar restul negre. Un jucător extrage succesiv două bile, punând de fiecare dată la loc bila extrasă. Dacă extrage o bilă albă, câștigă 1 €, iar dacă extrage o bilă neagră, pierde 2 €.

a) Arătați că jucătorul poate fie să câștige 2 €, fie să piardă 1 €, fie să piardă 4 € și determinați probabilitatea fiecărui caz.

b) Aflați n pentru care speranța matematică a câștigului este zero.

(Bacalaureat European, 2000)

2.7. Geometrie analitică

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2, 3)$. Știind că punctele B și C sunt simetricele punctului A față de axele Ox, respectiv Oy, calculați lungimea segmentului BC. *(Variante Bac, 2009)*

2. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5, 6)$, $B(6, 5)$ și $C(2, 7)$. Determinați numerele reale a și b astfel încât $M(a, b)$ să aibă proprietatea că $MA = MB = MC$. *(Variante Bac, 2004)*

3. Determinați coordonatele simetricului punctului $A(-3, 2)$ față de mijlocul segmentului BC, unde $B(1, -4)$ și $C(-5, -1)$. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

4. Determinați coordonatele vârfului D al paralelogramului $ABCD$ dacă $A(-2, 9)$, $B(7, -4)$, $C(8, -3)$.
(Variante Bac, 2009)

5. Fie $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$. Determinați vectorul $\vec{v}$, coliniar cu $\vec{u}$, de sens opus lui $\vec{u}$ și care are mărimea egală cu 1.

6. Se consideră vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ și $\vec{v} = a\vec{i} + \vec{j}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Determinați a, astfel încât vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ să fie coliniari.

b) Determinați a, astfel încât vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ să fie perpendiculari.

c) Arătați că $|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 \geq \frac{11}{2}$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

7. Se dă triunghiul ABC unde $A(1, 2)$, $B(2, -2)$ și $C(4, 6)$. Calculați cos B. *(Variante Bac, 2009)*

8. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele $A(6, 7)$ și $C(7, 6)$ să fie pe dreapta de ecuație: $x + ay + b = 0$.
(Variante Bac, 2009)

9. Determinați coordonatele punctului de intersecție dintre dreptele:

a) $3x + 2y + 1 = 0$; $2x + 3y + 9 = 0$;

b) $5x - 4y - 1 = 0$; $x - 5 = 0$;

c) $3x - 4y + 1 = 0$; $y - 4 = 0$;

d) $x - 2 = 0$; $y + 3 = 0$.

10. Arătați că dreptele de ecuații: $3x - 2y = 0$; $x + y - 5 = 0$ și $4x - 3y + 1 = 0$ sunt concurente.

11. Se consideră dreptele de ecuații d_1: $2x + 3y + 1 = 0$, d_2: $3x + y - 2 = 0$ și d_3: $x + y + a = 0$. Determinați a pentru care dreptele sunt concurente. *(Variante Bac, 2009)*

12. Determinați ecuația medianei duse din vârful A al triunghiului ABC, unde $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(2, -5)$.
(Variante Bac, 2009)

13. Determinați ecuația dreptei care trece prin O și mijlocul segmentului AB, unde $A(4, 0)$ și $B(0, 2)$.
(Variante Bac, 2007)

14. Paralelogramul $ABCD$ are vârfurile $A(-3, -1)$, $B\left(2, \frac{11}{4}\right)$. Punctul $Q\left(3, \frac{1}{2}\right)$ este intersecția diagonalelor paralelogramului. Aflați coordonatele vârfurilor C și D și scrieți ecuația dreptei BC.
(Variante Bac, 1998)

15. Arătați că punctele $A(-1, 2)$, $B(-2, 3)$, $C(-3, 4)$ sunt coliniare. *(Variante Bac, 2007)*

16. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n\left(\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n, \log_3 9^n\right)$ și $B_n(-n, 2n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Scrieți ecuația dreptei care trece prin B_1 și B_2.

b) Arătați că $A_n = B_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, punctul A_n aparține dreptei A_1A_2. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

17. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0, 0)$ și $A_n(n, 2n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Determinați ecuația dreptei A_1A_2.

b) Calculați aria triunghiului OA_1A_2.

c) Arătați că toate punctele A_n, $n \in \mathbb{N}$, sunt coliniare. *(Variante Bac, 2009)*

18. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$ și $C(3, 2)$. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Determinați ecuația dreptei OG. *(Variante Bac, 2009)*

19. Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele de ecuații $x + y + 2 = 0$ și $3x + ay + 5 = 0$ sunt paralele. *(Variante Bac, 2007)*

20. Se consideră dreapta d de ecuație $x - 2y + 1 = 0$. Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul $A(4, -1)$ și este paralelă cu dreapta d. *(Variante Bac, 2008)*

21. Determinați ecuația dreptei care conține $A(-2, 2)$ și este paralelă cu dreapta determinată de punctele $C(2, 1)$, $D(-1, -3)$. *(Variante Bac, 2009)*

22. Arătați că dreptele de ecuații: d_1: $3x - 4y + 1 = 0$ și d_2: $-9x + 12y + 1 = 0$ sunt paralele. Aflați distanța dintre cele două drepte.

23. Determinați numărul real a pentru care dreptele de ecuații $x + 2y + 1 = 0$ și $2x - ay - 1 = 0$ sunt perpendiculare. *(Variante Bac, 2007)*

24. Se consideră dreapta d de ecuație $5x - 4y + 1 = 0$. Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-1, 1)$ și este perpendiculară pe dreapta d. *(Variante Bac, 2008)*

25. Considerăm punctele $A(-4, -1)$, $B(2, 1)$. Determinați coordonatele punctului $M \in Oy$ dacă $m(\sphericalangle AMB) = 90°$.

26. Scrieți ecuația înălțimii din A în triunghiul ABC determinat de dreptele:
AB: $x - y + 2 = 0$; BC: $3x - y + 1 = 0$; AC: $x + 2y + 2 = 0$. *(Variante Bac, 1998)*

27. În sistemul cartezian xOy considerăm $A(-1, 3)$ și $B(1, -1)$. Scrieți ecuația mediatoarei segmentului AB. *(Variante Bac, 2009)*

28. Determinați coordonatele ortocentrului triunghiului ABC, unde $A(1, 4)$, $B(3, -1)$, $C(8, -2)$. *(Variante Bac, 1998)*

29. Într-un reper cartezian xOy se consideră dreptele d_1: $2x - y + 4 = 0$ și d_2: $2x + 3y - 8 = 0$.

a) Determinați coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.

b) Dacă ecuațiile dreptelor d_1 și d_2 sunt ecuațiile înălțimilor din B și C ale triunghiului ABC și $A(0, 2)$, aflați ecuația înălțimii din A.

30*. În sistemul de coordonate xOy considerăm $A(-2, 0)$; $B(5, 0)$; $C(0, 3)$ și punctele Q, H, G, respectiv centrul cercului circumscris, ortocentrul și centrul de greutate al triunghiului ABC.

a) Determinați coordonatele punctelor Q, H, G.

b) Arătați că punctele Q, H, G sunt coliniare.

c) Arătați că $HG = 2GQ$.

Scanned with OKEN Scanner

31. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, a)$ și $B(a, -2)$.
a) Determinați a, astfel încât $AB = 4$.
b) Determinați a, dacă ecuația dreptei AB este $3x - y - 5 = 0$.
c) Determinați a, astfel încât aria triunghiului AOB este minimă. *(Variante Bac, 2009)*

32. Considerăm punctele $A(4, 0)$, $B(4, 4)$, $C(0, 4)$ și $M(1, 3)$, iar E, F proiecțiile lui M pe OA și respectiv OC.
a) Demonstrați că $M \in (AC)$.
b) Arătați că $BM \perp EF$.
c) Arătați că $BM = EF$.

33. Considerăm punctele $A(1, 2)$, $B(-3, -1)$ și $C(3, -4)$ iar B', C' simetricele punctelor B și C față de mijloacele laturilor (AC), respectiv (AB).
a) Determinați coordonatele punctelor B' și C'.
b) Arătați că B', A', C' sunt coliniare.
c) Arătați că $B'C' \parallel BC$.
d) Demonstrați că $B'C' = 2BC$.

34. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 2\sqrt{3})$, $B(-1, 2\sqrt{3})$, $C(0, \sqrt{3})$.
a) Calculați aria triunghiului ABC.
b) Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC.
c) Determinați valorile lui a pentru care $B(-1, 2\sqrt{3})$, $C(0, \sqrt{3})$ și $D(a, 0)$ sunt coliniare.
d) Determinați lungimea înălțimii din B în triunghiul ABC.
e) Aflați distanța de la 0 la AB. *(Variante Bac, 2007)*

35. Se consideră punctele $A(3, 0)$, $B(0, 2)$, $M(3, -3)$ și $N(-2, 2)$. Demonstrați că dreptele AN, BM și perpendiculara din O pe AB sunt concurente. *(Variante Bac, 1998)*

36. Se consideră punctele $A(3, 0)$ și $B(0, 2)$. Fie d mediatoarea segmentului AB, D mijlocul lui AB, $\{E\} = d \cap OB$, $\{F\} = d \cap OA$, M mijlocul lui AE și N mijlocul lui BF. Arătați că dreptele DM și DN sunt perpendiculare. Sunt perpendiculare dreptele OM și ON? *(Variante Bac, 1999)*

37. Arătați că patrulaterul cu vârfurile în punctele $L(1, 0)$, $M(0, 1)$, $N(-1, 0)$ și $P(0, -1)$ este un pătrat. *(Variante Bac, 2007)*

38. Demonstrați că patrulaterul $MNPQ$ cu vârfurile $M(2, 0)$, $N(6, 4)$, $P(4, 6)$ și $Q(0, 2)$ este dreptunghi. *(Variante Bac, 2009)*

39. Se dă dreapta d de ecuație $2x - y + 4 = 0$. Cercetați dacă punctele $A(-5, 3)$ și $B\left(\frac{11}{5}, \frac{-3}{5}\right)$ sunt simetrice față de dreapta d. *(Variante Bac, 1998)*

40. Determinați coordonatele simetricului punctului $A(1, 2)$ față de dreapta d: $2x = y + 4$. *(Variante Bac, 1998)*

Scanned with OKEN Scanner

41. a) Calculați distanța de la punctul $A(3, 4)$ la dreapta $x + y + 3 = 0$. *(Variante Bac, 2007)*

b) Calculați distanța de la punctul $A(4, 3)$ la dreapta $2x + y + 1 = 0$. *(Variante Bac, 2007)*

42. Arătați că dreptele d_1: $3x + 4y + 1 = 0$ și d_2: $6x + 8y + 17 = 0$ sunt paralele. Calculați distanța dintre ele.

43. Calculați aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(1, 2)$, $B(1, 4)$ și $C(-1, 8)$. *(Variante Bac, 2007)*

44. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, -5)$, $B(-1, 2)$, $C(4, 7)$, $D(5, 0)$.

a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele A și C să aparțină dreptei $ax + by = 5$.

b) Determinați coordonatele centrului de greutate al triunghiului BCD.

c) Arătați că AC și BD sunt perpendiculare.

d) Calculați aria triunghiului ABC. *(Variante Bac, 2007)*

45. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $4x + 3y - 12 = 0$.

a) Determinați coordonatele punctelor A și B, intersecțiile dreptei d cu axele Ox, respectiv Oy. Reprezentați dreapta d. Precizați panta dreptei AB.

b) Știind că segmentul ABN este latura unui trapez dreptunghic $ABCD$ cu $m(\sphericalangle A) = 90°$ și $BC \parallel AD$, având toate vârfurile pe axele de coordonate, scrieți ecuațiile dreptelor BC și CD. Determinați coordonatele punctelor C și D. *(Bacalaureat 1999)*

46. În sistemul de coordonate Oxy se consideră punctele $A_n(n, 0)$ și $B_n(0, n)$, unde $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ și se notează cu M mulțimea formată din toate aceste 8 puncte.

a) Calculați distanța dintre A_2 și B_2.

b) Determinați ecuația dreptei A_1B_3.

c) Determinați ecuația paralelei prin B_1 la A_1B_3.

d) Calculați aria triunghiului $A_1A_4B_4$.

e) Calculați $\sin(\sphericalangle A_1A_2B_2)$.

f) Câte drepte trec prin cel puțin două puncte din mulțimea M? *(Variante Bac, 2007)*

47. În reperul xOy se consideră punctele $O(0, 0)$ și $A_n(n, 2^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Verificați dacă punctele O, A_1 și A_2 sunt coliniare.

b) Determinați numărul de drepte care trec prin cel puțin două dintre punctele O, A_0, A_1, A_2.

c) Calculați aria triunghiului determinat de punctele A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, $n \in \mathbb{N}$. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XI-a

3.1. Permutări

1. Se consideră permutările $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ şi $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$. Calculaţi $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^2, τ^{-2}.

2. Fie permutările $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}$ şi $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&4&3&1\end{pmatrix}$. Calculaţi $(\sigma\tau)^{-1}$, σ^{-1}, τ^{-1} şi arătaţi că $(\sigma\tau)^{-1}=\tau^{-1}\sigma^{-1}$.

3. Se consideră permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}\in S_4$. Calculaţi σ^{2009}.

4. Se consideră permutările $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ şi $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$. Determinaţi $x\in S_3$, ştiind că $\sigma x\tau=e$.

5. Se consideră următoarele permutări de gradul patru: $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$, $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $\sigma^2=\tau^2=e$, $\sigma^{-1}=\sigma$, $\tau^{-1}=\tau$ şi $\sigma\tau\neq\tau\sigma$.

b) Determinaţi o permutare $\alpha\in S_4$, astfel încât $\alpha^{-1}\neq\alpha$. *(Variante Bac, 2007)*

6. Se consideră permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\in S_3$.

a) Calculaţi σ^3.

b) Rezolvaţi ecuaţia $\sigma^{2009}\cdot x=e$, $x\in S_3$. *(Variante Bac, 2009)*

7. Fie $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\in S_3$ şi $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\in S_3$.

a) Calculaţi $\sigma\tau$ şi $\tau\sigma$.

b) Determinaţi numărul de inversiuni ale permutării σ.

c) Rezolvaţi ecuaţia $\sigma x=\tau$. *(Bac, 2002)*

8. Determinaţi semnul fiecăreia dintre următoarele permutări: $\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, $\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$, $\sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&1&2&4\end{pmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

9. Se consideră $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$.

a) Determinați σ^{-1}.

b) Arătați că σ și σ^{-1} au același număr de inversiuni. *(Variante Bac, 2009)*

10. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & i & 5 & 6 & j & 9 \end{pmatrix} \in S_9$. Determinați i și j, astfel încât σ să fie o permutare pară.

11. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$ și mulțimea $A = \{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii A.

b) Arătați că toate elementele mulțimii A sunt permutări pare. *(Variante Bac, 2009)*

12. Fie S_3 mulțimea permutărilor de gradul 3.

a) Calculați semnul tuturor permutărilor din S_3.

b)* Demonstrați că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 este o permutare impară. *(Variante Bac, 2009)*

13. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$.

a) Determinați numărul inversiunilor permutării σ.

b)* Arătați că ecuația $x^4 = \sigma$ nu are nicio soluție în S_6. *(Variante Bac, 2009)*

14*. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$.

a) Determinați toate permutările $x \in S_3$, astfel încât $x\sigma = \sigma x$.

b) Rezolvați ecuația $x^2 = \sigma$, $x \in S_3$. *(Variante Bac, 2009)*

3.2. Matrice

1. Câte elemente are mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{Z}, |a_{ij}| \leq 2, i,j = \overline{1,2} \right\}$?

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. Calculați $A + B$, $2A - 3B$, $A + A^t$.

3. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculați $A \cdot B$ și $B \cdot A$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ şi $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$. Calculaţi $a+b+c+d$, ştiind că $2X-AB=A$.

5. Determinaţi $x, y, z \in \mathbb{R}$, ştiind că $3\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & -1\\ z & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}x+y & 1\\ -1 & z\\ 2 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -9\\ 5 & 3\end{pmatrix}$.

6. Se consideră matricea $A_k=\begin{pmatrix}2^k & 2k\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Determinaţi matricea $B=A_1+A_2+\ldots+A_n$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

7. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $f(x)=x^2-3x+2$. Calculaţi $f(A)=A^2-3A+2I_3$.

8. Fie $\mathcal{M}$ mulţimea matricelor pătrate de ordin doi de forma $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Considerăm funcţia $f:\mathbb{C}\to\mathcal{M}, f(a+bi)=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$. Demonstraţi că:

a) f este bijectivă;

b) $f(z+z')=f(z)+f(z')$, oricare ar fi $z, z'\in\mathbb{C}$;

c) $f(z\cdot z')=f(z)\cdot f(z')$, oricare ar fi $z, z'\in\mathbb{C}$.

9. Dacă $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci numărul $\text{tr}(A)=a+d$ se numeşte urma matricei A.

a) Arătaţi că $\text{tr}(X+Y)=\text{tr}(X)+\text{tr}(Y)$, $\text{tr}(XY)=\text{tr}(YX)$ şi $\text{tr}(\lambda X)=\lambda\text{tr}(X)$, oricare ar fi $X, Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ şi $\lambda\in\mathbb{C}$.

b) Demonstraţi că nu există $X, Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $I_2=XY-YX$. *(Variante Bac, 2007)*

10. Se consideră mulţimea $G=\left\{X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\, a,b\in\mathbb{R}, a>0\right\}$.

a) Arătaţi că, dacă $A, B\in G$, atunci $AB\in G$.

b) Determinaţi două matrice $C, D\in G$ pentru care $CD\neq DC$.

c) Arătaţi că dacă $A\in G$, atunci $I_2-A+A^2\in G$. *(Variante Bac, 2009)*

11. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătaţi că dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relaţia $AX=XA$, atunci există $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

12. Determinați matricea $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{2007}$. *(Bac, iunie 2007)*

13. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculați A^{2008}. *(Variante Bac, 2009)*

14. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculați $A^n (n \in \mathbb{N}^*)$.

15. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $B = A - I_3$.

a) Calculați B^2 și B^3.

b) Calculați A^n $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.

16. Calculați B^n $(n \in \mathbb{N}^*)$, știind că $B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. *(Variante Bac, 2009)*

17*. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Calculați A^n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

18*. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Calculați A^n și B^n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

19. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_2 + aA$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab)$.

b) Calculați $(X(a))^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Determinați $t \in \mathbb{N}$, astfel încât $X(1)X(2) \cdot \ldots \cdot X(2009) = X(t-1)$. *(Variante Bac, 2009)*

20*. Arătați că ecuația $X^2 = I_2$ are o infinitate de soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. *(Variante Bac, 2009)*

21. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = I_3 + A$, $C = I_3 + aA$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $S = A - XY$.

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $BC = I_3$.

c) Arătați că $A^{n+1} = 14A^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

22. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&0\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A)=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid XA=AX\}$.

a) Arătați că $B\in C(A)$.

b) Demonstrați că dacă $X\in C(A)$, atunci există $x, y\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix}x&0\\y&x\end{pmatrix}$.

c)* Rezolvați ecuația $X+X^2=A$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *(Variante Bac, 2009)*

23. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ și mulțimea de matrice $M=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}\middle|\, a,b,c\in\mathbb{C}\right\}$.

a) Calculați A^3.

b)* Arătați că dacă $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ și $AX=XA$, atunci $X\in M$.

c)* Arătați că ecuația $X^2=A$ nu are soluții în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. *(Variante Bac, 2009)*

24. Se consideră matricele $A, B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât (1) $AB-BA=A$.

a) Arătați că matricele $A_0=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ și $B_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ verifică egalitatea (1).

b) Demonstrați că $A^nB-BA^n=nA^n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. *(Variante Bac, 2009)*

25. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Arătați că $A^3-A=A^2-I_3$.

b) Demonstrați că $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$.

c)* Arătați că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, suma elementelor matricei A^n este $n+3$. *(Variante Bac, 2009)*

3.3. Determinanți

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}4&-2\\-2&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculați $\det(I_2+A+A^2+A^3)$. *(Variante Bac, 2009)*

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&8\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Rezolvați ecuația $\det(A-xI_2)=0$, $x\in\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2007)*

3. Fie $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătați că $\det(X\cdot X^t)=(ad-bc)^2$. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

4. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arătați că $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3n & 1\end{pmatrix}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. b) Calculați $\det(A)+\det(A^2)+\ldots+\det(A^{2007})$.

c) Calculați $\det(A+A^2+\ldots+A^{2007})$. *(Variante Bac, 2007)*

5. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}z & w\\ -\overline{w} & \overline{z}\end{pmatrix}\middle| z, w\in\mathbb{C}\right\}$.

a) Arătați că, dacă $A\in G$, astfel încât $\det A=0$, atunci $A=O_2$.

b) Demonstrați că, dacă $A, B\in G$ și $A\cdot B=O_2$, atunci $A=O_2$ sau $B=O_2$. *(Variante Bac, 2007)*

6. Calculați determinanții: $\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 0\\ 6 & 0 & 0\end{vmatrix}$ și $\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ -2 & 0 & 4\end{vmatrix}$.

7. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}a & a+1 & a+2\\ b & b+1 & b+2\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătați că $\det(A)=(a-b)(a-1)$ și calculați $\det(A-A^t)$. *(Variante Bac, 2009)*

8. Rezolvați ecuația $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & x^2 & 2x+6\end{vmatrix}=0, x\in\mathbb{R}$.

9. Arătați că $\begin{vmatrix}a+b & c & c\\ a & b+c & a\\ b & b & c+a\end{vmatrix}=4abc$, oricare ar fi $a, b, c\in\mathbb{C}$.

10. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3-2x=0$. Calculați determinanții:

$\Delta_1=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_3 & x_1 & x_2\\ x_2 & x_3 & x_1\end{vmatrix}$ și $\Delta_2=\begin{vmatrix}x_1^3 & x_2^3 & x_3^3\\ x_2 & x_3 & x_1\\ x_3 & x_1 & x_2\end{vmatrix}$. *(Variante Bac, 2009)*

11. Calculați determinanții $\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$ și $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{vmatrix}$. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

12. a) Arătați că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{C}$.

b)* Demonstrați că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{C}$. Determinanții considerați se numesc determinanți Vandermonde (de ordinul trei, respectiv patru).

13. Se consideră determinantul $D(a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$, unde a este un număr real.

a) Calculați $D(9)$.
b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $D(a) = 0$.
c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $D(3^x) = 0$. *(Variante Bac, 2009)*

14. Calculați următorii determinanți de ordin n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$):

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$.

15. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci notăm cu $\overline{A}$ matricea $\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$, oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b) Demonstrați că $\det(A \cdot \overline{A}) \in \mathbb{R}_+$, oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

c)* Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$. Arătați că $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

16. a) Arătați că $\det(A+B) + \det(A-B) = 2 \cdot (\det(A) + \det(B))$, oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b)* Demonstrați că, oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avem $\det(A+B) \leq \det(A) + \det(B)$ sau $\det(A-B) \leq \det(A) + \det(B)$.

17. a) Demonstrați că $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$, oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Arătați că, dacă $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci $A^2 = 2A + I_2$.

18. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Demonstrați că $\det(A - xI_2) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că, dacă $A^2 = O_2$, atunci $a + d = 0$.

c) Calculați $\det(A + 2I_2)$, știind că $A^2 = O_2$. *(Variante Bac, 2009)*

19. Fără a calcula determinanții $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1x+b_1 & a_1+b_1x & c_1 \\ a_2x+b_2 & a_2+b_2x & c_2 \\ a_3x+b_3 & a_3+b_3x & c_3 \end{vmatrix}$ și $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, arătați că $\Delta_1 = (x^2 - 1)\Delta_2$.

20. a) Arătați că, oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{C}$ și $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, are loc egalitatea $\det(\lambda X) = \lambda^3 \det(X)$.

b) Demonstrați că, oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, avem $A - A^t = -(A - A^t)^t$ și $\det(A - A^t) = 0$.

(Variante Bac, 2009)

21. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x + 3$ și determinanții:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \text{ și } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}.$$

a) Arătați că $\Delta_1 = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

b) Arătați că $\Delta_1 = \Delta_2$.

c) Demonstrați că, oricare ar fi trei puncte A, B, C, aparținând graficului funcției f, cu coordonatele naturale, aria triunghiului ABC este un număr natural, divizibil cu 3. *(Variante Bac, 2009)*

22. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A(-3, 3)$, $B(4, 4)$, $C(5, -3)$. Calculați $\mathcal{A}_{[ABC]}$.

23. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A(2, 3)$, $B(m+1, 2)$, $C(3, m+2)$. Determinați valoarea lui m pentru care A_{ABC} este minimă.

24. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A(-2, 1)$, $B(2, 0)$, $C(1, 4)$ și $D(-2, 2)$. Calculați aria patrulaterului $ABCD$.

25. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A(-2, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 5)$. Arătați că punctele A, B și C sunt coliniare.

26. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A(1, 3)$, $B(2, 1)$ și $C(a, a-4)$ $(a \in \mathbb{R})$. Determinați a, astfel încât punctele A, B și C să fie coliniare.

27. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A(-1, 1)$ și $B(3, 7)$.

a) Scrieți ecuația generală a dreptei AB.

Scanned with OKEN Scanner

b) Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât $C(m, m+1) \in AB$.

28. Într-un reper cartezian xOy, se consideră punctele $A(-1, 1)$ și $B(3, 4)$.
a) Determinați ecuația generală a dreptei AB.
b) Determinați coordonatele unui punct $C \in Ox$, astfel încât $\mathcal{A}_{[ABC]} = 5(u^2)$.

29. Fie $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, trei puncte în plan (pentru care am ales un reper cartezian xOy) și matricea $M = \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
a) Arătați că, dacă punctele A, B, C se află pe dreapta $y = 2x$, atunci $\det(M) = 0$.
b) Demonstrați că, dacă triunghiul ABC este dreptunghic și are catetele de lungime 1, atunci $\det(M) = \pm 1$. *(Variante Bac, 2009)*

3.4. Inversa unei matrice. Ecuații matriceale

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculați A^{-1} și B^{-1}.

2. Stabiliți care dintre următoarele matrice este inversabilă și aflați inversa respectivei matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Determinați valorile lui $x \in \mathbb{R}$, pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ este inversabilă.

4. Fie matricele: $A, P, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât P este inversabilă și $X = P^{-1}AP$. Demonstrați că:
a) dacă $A^3 = I_n$, atunci $X^3 = I_n$;
b) dacă $aA^2 + bA + cI_n = O_n$, atunci $aX^2 + bX + cI_n = O_n$.

5. Fie matricea $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
a) Calculați B^3. b) Determinați B^{-1}. *(Variante Bac, 2009)*

6. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = I_3 + A$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Arătați că $A^2 = 10A$.

b) Demonstrați că matricea B este inversabilă și inversa ei este matricea $C = I_3 - \frac{1}{11}A$.

(Variante Bac, 2007)

7. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

a) Arătați că $A \cdot A^t = \alpha I_4$, unde $\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

b) Demonstrați că, dacă $A \neq O_4$, atunci A este inversabilă și determinați A^{-1}. *(Variante Bac, 2009)*

8. Fie mulțimea $G = \left\{ X(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & 2a \\ -a & 1-a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} - \{-1\} \right\}$.

a) Arătați că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$, oricare ar fi $X(a), X(b) \in G$.

b) Demonstrați că, orice matrice $X(a) \in G$ este inversabilă și inversa ei aparține mulțimii G.

(Variante Bac, 2009)

9. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & m & -1 \\ 3m+4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Calculați $\det(A)$.

b) Determinați valorile lui m pentru care A este inversabilă.

c) Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât $A^{-1} = A^*$. *(Variante Bac, 2009)*

10. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A^2 = O_2$. Arătați că matricele $A - I_2$ și $A + I_2$ sunt inversabile.

11. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Rezolvați ecuația matriceală $AX = B$.

12. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Rezolvați ecuația matriceală $AXB = C$.

13. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Rezolvați ecuația matriceală $XA = B$.

14. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Rezolvați ecuația matriceală $A(X + B) = C$.

Scanned with OKEN Scanner

15. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\ 2 & 3 & -2\\ 4 & 8 & -5\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $B=\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 0\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

a) Arătați că $A^2=I_3$.

b) Rezolvați ecuația matriceală $(A+A^{-1})X=B$. *(Variante Bac, 2006)*

16. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(X)=AX$. Arătați că funcția f este bijectivă. *(Variante Bac, 2009)*

17*. Fie $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă. Arătați că $\det(A^*)=(\det(A))^2$. *(Variante Bac, 2009)*

18. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\middle| a,b,c,d\in\mathbb{N}\right\}$ și matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\in M$.

a) Arătați că $A^{-1}\notin M$.

b) Determinați toate matricele inversabile $B\in M$ care au proprietatea $B^{-1}\in M$. *(Variante Bac, 2009)*

19*. Se consideră matricele $J=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $A=aI_3+bJ$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, $a+3b\neq 0$.

Demonstrați că A este inversabilă și determinați $x,y\in\mathbb{R}$, astfel încât $A^{-1}=xI_3+yJ$. *(Variante Bac, 2007)*

20*. Se consideră mulțimea $H=\{A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})\mid \det(A)\neq 0 \text{ și } A^{-1}=A^2+A\}$.

a) Demonstrați că $A^3+A^2-I_3=O_3$, oricare ar fi $A\in H$.

b) Arătați că, dacă $A\in H$, atunci matricele $A+I_3$ și $A-I_3$ sunt inversabile în $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$. *(Variante Bac, 2007)*

3.5. Rangul unei matrice

1. Determinați rangul fiecăreia dintre următoarele matrice:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4 & 1\\ -2 & -6 & 8 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 4\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix} \text{ și } C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 4 & 5 & 3 & -1\\ 2 & 1 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Determinați rangul fiecăreia dintre următoarele matrice: $I_3 + A$ și $I_3 + A + A^t$. *(Variante Bac, 2008)*

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & x & 2 \\ 1 & -1 & 1 & y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$. Determinați numerele x și y, astfel încât $\text{rang}(A) = 2$.

4. Determinați, în funcție de valorile lui $m \in \mathbb{R}$, rangul matricei $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

5. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Arătați că $\text{rang}(A) \geq 2$. *(Variante Bac, 2009)*

6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Determinați rangul matricei A.

(Variante Bac, 2009)

7. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Arătați că $A^2 = 32A$.

b) Demonstrați că $\text{rang}(A^n) = 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. *(Variante Bac, 2009)*

8. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Arătați că $\text{rang}(A) \neq 2$, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

(Variante Bac, 2009)

9. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Arătați că $\text{rang}(A + B) = \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$.

Scanned with OKEN Scanner

10. Determinați o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, astfel încât $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A^2)$. *(Variante Bac, 2007)*

11. Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 6)$, $B(1, 4)$, $C(-1, 8)$. Fie matricea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 6 & 4 & 8 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$.

a) Arătați că punctele A, B, C sunt coliniare.

b) Determinați rangul matricei M în cazul $a = 3$, $b = 0$.

c) Arătați că, dacă unul dintre minorii de ordin trei ai lui M, care conține ultima coloană, este nul, atunci $\text{rang}(M) = 2$. *(Variante Bac, 2009)*

12. Se consideră o matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ cu proprietatea $A \neq A^t$. Demonstrați că $\text{rang}(A - A^t) = 2$. *(Variante Bac, 2009)*

3.6. Sisteme de ecuații liniare

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x + 4y - 2z = 10 \\ x - 2y + 2z = 10 \end{cases}$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 6z = 2 \end{cases}$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} x - 2y + z + t = 1 \\ x - 2y + z - t = -1 \\ x - 2y + z + 5t = 6 \end{cases}$.

4. Determinați mulțimea soluțiilor sistemului: $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 3 \\ y + 2z + 3t = 2 \\ z + 2t = 1 \end{cases}$. *(Variante Bac, 2009)*

5. Rezolvați sistemul: $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z + t = 0 \\ x + y - z + t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases}$. *(Variante Bac, 2009)*

6. Fie $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ o rădăcină de ordinul trei a unității. Rezolvați, în $\mathbb{C}$, sistemul: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = 0 \\ x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z = 0 \end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

7. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele: $d_1: mx + y + 1 = 0$, $d_2: x + 3y + 2 = 0$, $d_3: -x - y + 4 = 0$. Determinați $m \in \mathbb{R}$, știind că cele trei drepte sunt concurente. *(Variante Bac, 2009)*

8. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ bcx+acy+abz=0 \end{cases}$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, și se notează cu A matricea sistemului.

a) Calculați $\det(A)$.

b) Rezolvați sistemul, știind că $a \neq b \neq c \neq a$.

c) Determinați mulțimea soluțiilor sistemului, dacă $a = b \neq c$.

9. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Arătați că sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=\frac{1}{2}x \\ cx+ay+bz=\frac{1}{2}y \\ bx+cy+az=\frac{1}{2}z \end{cases}$ admite numai soluția $x = y = z = 0$.

(Variante Bac, 2009)

10. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+ay=1 \\ y+az=a \\ x+z=1 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}^*$. Arătați că sistemul este compatibil determinat și soluția sa este formată din trei numere în progresie geometrică. *(Variante Bac, 2009)*

11. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-y-mz=1 \\ mx+y+mz=1-m \\ mx+3y+3z=-1 \end{cases}$. Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât sistemul să fie incompatibil. *(Variante Bac, 2009)*

12. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=a \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$ și $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

a) Arătați că determinantul matricei sistemului are valoarea $(a+2)(a-1)^2$.

b) Rezolvați sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

c) Rezolvați sistemul dacă $a \in \{-2, 1\}$.

13. Fie sistemul $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+(m^2-m+1)y+(m+1)z=2 \\ 2x+(m^2-m-2)y+2(m+1)z=3 \end{cases}$. Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât sistemul să fie:

a) compatibil determinat;

b) incompatibil.

(Variante Bac, 2009)

Scanned with OKEN Scanner

14. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ mx+y+z=m-1 \\ x+my+2z=-1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$, și se notează cu A matricea lui.

a) Determinați m, astfel încât $\det(A)=0$.

b) Arătați că sistemul este compatibil, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

c) Determinați m, știind că sistemul are o soluție (x_0, y_0, z_0) cu $z_0=2$. *(Variante Bac, 2009)*

15. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y+z=3 \\ mx+y+z=3m \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$. Pentru fiecare m, notăm cu S_m mulțimea soluțiilor reale ale sistemului.

a) Determinați m pentru care sistemul are soluție unică.

b) Arătați că sistemul este compatibil, oricare ar fi m.

c) Determinați $\min\{x^2+y^2+z^2 \mid (x,y,z) \in S_1\}$. *(Variante Bac, 2009)*

16. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+my+2z=1 \\ x+(2m-1)y+3z=1 \\ x+my+(m-3)z=2m-1 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinați m, astfel încât sistemul să aibă soluție unică.

b) Determinați m pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

c) Dacă $m=1$, găsiți soluțiile (x, y, z) ale sistemului, știind că $2x^2-y^2+3z^2=14$.

(Variante Bac, 2009)

17. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+my+mz=-2 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$. Determinați valorile lui m pentru care sistemul are o soluție cu componentele întregi. *(Variante Bac, 2009)*

18. Fie sistemul $\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+y-z=2 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinați m, astfel încât matricea sistemului să aibă rangul 2.

b) Determinați m, astfel încât sistemul să aibă soluții $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ care verifică relația $x+y+z=4$.

c) Determinați $m \in \mathbb{Z}$, astfel încât sistemul să admită o soluție unică $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$.

(Variante Bac, 2009)

19. Se consideră sistemul $\begin{cases} x_1-x_2=a \\ x_3-x_4=b \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Arătați că sistemul este compatibil, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Determinați a și b, astfel încât sistemul să admită o soluție (x_1, x_2, x_3, x_4) cu proprietatea că x_1, x_2, x_3, x_4 și $x_1 + x_2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

c) Demonstrați că, dacă sistemul are o soluție cu toate componentele strict pozitive, atunci $a + b < 1$.

(Variante Bac, 2009)

20. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x-y+z=m \\ nx+y-2z=4 \end{cases}$, $m, n \in \mathbb{R}$.

a) Determinați n pentru care sistemul are soluție unică.

b) Determinați m și n pentru care sistemul este compatibil nedeterminat. *(Variante Bac, 2009)*

21. Se consideră triunghiul ABC, cu laturile $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ și sistemul $\begin{cases} ay+bx=c \\ cx+az=b \\ bz+cy=a \end{cases}$.

a) Rezolvați sistemul în cazul $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

b) Arătați că sistemul are soluție unică, oricare ar fi triunghiul ABC.

c) Arătați că, dacă (x_0, y_0, z_0) este soluția sistemului, atunci $x_0, y_0, z_0 \in (-1, 1)$. *(Variante Bac, 2009)*

22. Fie a, b, c trei numere reale distincte și sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ a^3x+b^3y+c^3z=1 \end{cases}$.

a) Arătați că, dacă A este matricea sistemului, atunci $\det(A) = (a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$.

b) Rezolvați sistemul, știind că $a + b + c \neq 0$.

c) Demonstrați că, dacă $a + b + c = 0$, atunci sistemul este incompatibil. *(Variante Bac, 2009)*

23. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 7x-y+az=b \end{cases}$, unde a și b sunt parametri reali.

a) Determinați a, astfel încât determinantul matricei sistemului să fie nul.

b) Determinați valorile parametrilor a și b pentru care sistemul este incompatibil.

(Variante Bac, 2009)

24. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+2y+3z=6 \\ 3x-y-2z=b \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinați a, b pentru care sistemul are soluția $(1, 1, 1)$.

b) Determinați a, b, astfel încât sistemul să fie incompatibil. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

25. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x-3y+4z-5t=-1 \\ x+9y+mz+t=3 \\ 5x-6y+10z+nt=p \end{cases}$, unde $m, n, p \in \mathbb{R}$.

a) Determinați p, astfel încât sistemul să admită o soluție (x_0, y_0, z_0, t_0), cu $z_0 = t_0 = 0$.

b) Determinați m, n, p, astfel încât sistemul să fie compatibil și matricea sistemului să aibă rangul 2.

(Variante Bac, 2009)

3.7. Probleme de sinteză – algebră

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ și $B = A + I_4$.

a) Calculați A^2 și arătați că $B^2 = 2B - I_4$.

b) Demonstrați că matricea B este inversabilă și calculați B^{-1}.

c) Determinați B^n $(n \in \mathbb{N}^*)$. *(Bac, august 2000)*

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ și funcția $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z}), f(X) = AX$, oricare ar fi $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$.

a) Arătați că $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$ și $f(\lambda X) = \lambda f(X)$, $\forall X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$ și $\lambda \in \mathbb{Z}$.

b) Demonstrați că, dacă $\det(A) \neq 0$, atunci f este injectivă.

c) Arătați că, dacă $\det(A) \in \{-1, 1\}$, atunci f este bijectivă. *(Bac, august 2001)*

3. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 3x+4y+5z=0 \end{cases}$, unde $x, y, z \in \mathbb{C}$. Notăm cu A matricea sistemului.

a) Calculați determinantul și rangul matricei A.

b) Rezolvați sistemul.

c) Arătați că $A^n \neq I_3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *(Bac, august 2001)*

4. Se consideră numerele reale distincte a, b, c, d, funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \cdot (x-d), g(x) = x^3 + x + 1$ și determinanții $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$, $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ g(a) & g(b) & g(c) & g(d) \end{vmatrix}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Arătați că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $f'(a) = (a-b)(a-c)(a-d)$ și arătați că $A = \Delta$.

c)* Dezvoltând determinantul A după ultima linie, arătați că $\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} + \frac{g(d)}{f'(d)} = 1$.

(Bac, iunie 2001)

5. Fie mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \,\middle|\, a^2 - 3b^2 = 1 \right\}$.

a) Arătați că matricea $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii G.

b) Arătați că, dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.

c)* Arătați că, dacă $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \in G$ și $a > 0$, $b > 0$, atunci $B^n \neq I_2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Deduceți că mulțimea G este infinită.

6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați determinantul și rangul matricei A.

b) Rezolvați ecuația $\det(A + xI_3) = 0, x \in \mathbb{C}$.

c) Determinați o matrice nenulă $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, cu proprietatea $AU = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *(Bac, 2002)*

7. Se consideră mulțimile $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ și $U(G) = \{A \in G \mid A \text{ este inversabilă și } A^{-1} \in G\}$.

a) Arătați că, dacă $A, B \in G$, atunci $A + B \in G$ și $A \cdot B \in G$.

b) Arătați că, dacă $A \in U(G)$, atunci $\det(A) = 1$.

c)* Arătați că, dacă $A \in U(G)$, atunci $A^4 = I_2$. *(Bac, iunie 2004)*

8. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Arătați că, dacă $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ și $YA = AY$, atunci există $a, b, c \in \mathbb{C}$, astfel încât $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

b) Arătați că, dacă $Z = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ și $\det(Z) = 0$, atunci $Z^3 = O_3$.

c)* Demonstrați că ecuația $X^3 = A$ nu are soluții în mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. *(Bac, august 2004)*

9. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

a) Arătați că $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O_2$.

b) Verificați identitatea $A^2 - 5I_2 = (A - \sqrt{5}I_2)(A + \sqrt{5}I_2)$.

c)* Arătați că, dacă polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^2 - (a+d)X + ad - bc$ are rădăcina $\sqrt{5}$, atunci $a + d = 0$ și $ad - bc = -5$.

d)* Arătați că, dacă $\det(A^2 - 5I_2) = 0$, atunci $A^2 = 5I_2$. *(Bac, august 2004)*

10. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Verificați că $A^2 = B^2 = I_3$. Arătați că A este inversabilă și determinați inversa ei.

b)* Calculați determinantul matricei $X = A + A^2 + \ldots + A^{2004}$.

c)* Arătați că $(AB)^n \neq I_3$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

11. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

a) Rezolvați sistemul $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.

b)* Găsiți o matrice $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $D \neq O_2$, astfel încât $A \cdot D = D \cdot A = O_2$.

c)* Arătați că, dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ verifică relația $AX = XA = O_2$, atunci $(A + X)^n = A^n + X^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

12. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = I_3 + A$.

a) Verificați că $A^2 = 10A$ și arătați că matricea B este inversabilă și inversa sa este matricea $B^{-1} = I_3 - \frac{1}{11}A$.

Scanned with OKEN Scanner

b)* Găsiți trei matrice $U, V, W \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, de rang 1, astfel încât $B = U + V + W$.

c)* Arătați că, oricare ar fi două matrice $C, D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, de rang 1, avem $C + D \neq B$.

(Bac, iunie 2004)

13. Fie matricele $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Spunem că matricea $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este nilpotentă dacă există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $M^n = O_2$.

a) Verificați că matricele O_2 și J sunt nilpotente și arătați că matricea K nu este nici inversabilă, nici nilpotentă.

b) Arătați că, oricare ar fi $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, are loc egalitatea $X^2 - (p+s)X + (ps - qr)I_2 = O_2$.

c)* Demonstrați că, dacă $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este nilpotentă, atunci $B^2 = O_2$.

14. Fie matricea $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

a) Calculați J^2. Determinați o matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pentru care $\text{rang}(M) = \text{rang}(M^2)$.

b)* Utilizând, eventual, metoda inducției matematice, arătați că, dacă matricea $C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nu este inversabilă, atunci $C^n = (p+s)^{n-1}C$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

c)* Arătați că, dacă matricea $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ verifică $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^2)$, atunci $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^n)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

15. Notăm cu M mulțimea matricelor pătratice de ordinul doi cu elemente din $\mathbb{N}$. Fie $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că, dacă $A, B \in M$, atunci $A + B \in M$ și $A \cdot B \in M$.

b) Arătați că matricea E este inversabilă și $E^{-1} \notin M$.

c)* Determinați toate matricele $X \in M$, inversabile, cu proprietatea că $X^{-1} \in M$.

16. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $I(A) = \{aA + bI_2 \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

a) Demonstrați că $A^2 - A + I_2 = O_2$ și $A^3 = -I_2$.

b) Calculați A^{2007}.

c)* Arătați că, dacă $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ și $AB = BA$, atunci $B \in I(A)$.

Scanned with OKEN Scanner

17. Se consideră mulțimea $M=\left\{A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) Arătați că, dacă $A(x)\in M$ și $A(y)\in M$, atunci $A(x)+A(y)\in M$ și calculați $A(-2)+A(-1)+A(0)+A(1)+A(2)$.

b) Demonstrați că, dacă $A(x), A(y)\in M$, atunci $A(x)\cdot A(y)\in M$ și calculați $A(-2)\cdot A(-1)\cdot A(0)\cdot A(1)\cdot A(2)$.

c) Calculați $A^{2007}(1)$.

18. Fie $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Utilizând metoda inducției matematice, arătați că $A^n=5^{n-1}A$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Calculați suma $A+A^2+A^3+\ldots+A^{100}$.

c)* Arătați că toate elementele matricei $A+A^2+A^3+\ldots+A^{100}-A^{101}$ sunt strict negative.

19. Fie sistemul $\begin{cases} x+my+z=0 \\ x+y+z=0 \\ mx+y+z=0 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$.

a) Calculați determinantul matricei sistemului.

b) Stabiliți, în funcție de m, rangul matricei sistemului.

c) Determinați valorile lui m pentru care sistemul are soluție unică și precizați-o.

(Admitere la Facultatea de Informatică, Iași, 2012)

20. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & p & 1 \\ p & 1 & 1 \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Determinați p, știind că $\det(A)=0$.

b) Pentru ce valori ale lui p rangul matricei A este minim?

c) Rezolvați sistemul $AX=O_{3,1}$, $X\in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, pentru $p=-2$. (Am notat cu $O_{3,1}$ matricea cu trei linii și o coloană, având toate elementele egale cu zero).

(Admitere la Facultatea de Informatică, Iași, 2012)

3.8. Șiruri

1. Studiați monotonia șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ dacă:

a) $x_n=\dfrac{n+1}{n}$;

b) $x_n=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $x_n = \frac{2^n}{n!}$; d) $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$.

2. Studiați mărginirea șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ al cărui termen general este:

a) $x_n = 1 + (-1)^n$; b) $x_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n}$;

c) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$; d) $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

3. Arătați că următoarele șiruri sunt divergente:

a) $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{n+2}$; b) $b_n = \sin\frac{n\pi}{2}$;

c) $c_n = n^2 - n$; d) $d_n = 2^n - 3^n$.

4. Calculați limita fiecăruia dintre următoarele șiruri, având termenul general:

a) $a_n = \frac{7n+3}{8n-2}$; b) $b_n = \frac{n^2 - n + 2}{n+3}$; c) $c_n = \frac{n^2+1}{(n+1)^3}$;

d) $d_n = \frac{(n-1)^2 - (n+1)^2}{2n+1}$; e) $e_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2+2}$; f) $f_n = \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^3$.

5. Calculați limita șirului cu termenul general a_n în fiecare dintre următoarele situații:

a) $a_n = \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{n}$; b) $a_n = \frac{3\sqrt{n}+5}{2\sqrt{n}+7}$; c) $a_n = \frac{\sqrt{n+2}}{1+\sqrt[3]{n+1}}$;

d) $a_n = \sqrt{n^2+1} - 2n$; e) $a_n = \sqrt{3n+1} - \sqrt{2n+3}$; f) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n\sqrt{n}$.

6. Calculați limita fiecăruia dintre următoarele șiruri având termenul general:

a) $a_n = \frac{\ln n + 3}{\ln n - 2}$; b) $b_n = \ln(n+1) - \ln n$; c) $c_n = \frac{\ln(e^n+1)}{n+1}$;

d) $d_n = \frac{\ln(4^n+1)}{\ln(2^n+3)}$; e) $l_n = \frac{1+\ln n^2}{2+\ln n^3}$; f) $f_n = n - \ln n$.

7. Calculați limita fiecăruia dintre următoarele șiruri:

a) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$; b) $b_n = n(n - \sqrt{n^2+1})$; c) $c_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}$;

d) $d_n = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}$; e) $e_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$; f) $f_n = \sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n})$.

8. Calculați limita fiecăruia dintre următoarele șiruri:

a) $a_n = 2^n + 3^n - 5^n$; b) $b_n = \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$; c) $c_n = \frac{5^n - 3^n}{4^n + 5^n}$;

Scanned with OKEN Scanner

d) $d_n = \dfrac{a^n}{1+a^n}$ $(a>0)$; e) $e_n = \dfrac{3^n}{2^n+a^n}$ $(a>0)$; f) $f_n = \dfrac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{2^n}$.

9. Determinaţi limita fiecăruia dintre următoarele şiruri:

a) $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{n+2}\right)^n$; b) $b_n = \left(\dfrac{1-2n}{3n+4}\right)^{n+1}$; c) $c_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n+3}\right)^{1-n}$;

d) $d_n = \left(\dfrac{4n+1}{3n+2}\right)^{1-n}$; e) $e_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^n$; f) $f_n = \left(\dfrac{n}{n^2+1}\right)^{3-n}$.

10. Calculaţi limita fiecăruia dintre următoarele şiruri:

a) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$; b) $b_n = \left(\dfrac{n+3}{n}\right)^n$; c) $c_n = \left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^{n+2}$;

d) $d_n = \left(\dfrac{2^n-1}{2^n+1}\right)^{3^n}$; e) $e_n = \left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)^n$; f) $f_n = n(\ln(n+1)-\ln n)$.

11. Calculaţi limita şirului cu termenul general a_n în fiecare dintre următoarele situaţii:

a) $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$; b) $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$; c) $a_n = \dfrac{n^k}{n!}$ $(k>0)$.

(Variante Bac, 2007)

12. Calculaţi limita şirului cu termenul general a_n în fiecare dintre următoarele situaţii:

a) $a_n = \dfrac{n\sin n}{n^2+1}$; b) $a_n = \dfrac{[nx]}{n}$, unde $x \in \mathbb{R}$;

c) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; d) $a_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+n}$.

13. Calculaţi limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}\right):\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

(Variante Bac, 1999)

14. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că $a_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. *(Variante Bac, 2009)*

15. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Verificați că $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Arătați că $a_1 + a_2 + ... + a_n = \sqrt{n+1} - 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{\sqrt{n}}$. *(Bac, august 2002)*

16. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} (f(1) + f(2) + ... + f(n))$.

(Variante Bac, 2007)

17. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x+1) - \ln x$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} (f(1) + f(2) + ... + f(n))$.

(Variante Bac, 2007)

18. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$. Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_n = f(1) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} f\left(\frac{1}{3}\right) + ... + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ este divergent. *(Variante Bac, 2009)*

19. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$. Calculați limita șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = f(1) + f(2) + ... + f(n) - \ln\frac{n(n+1)}{2}$. *(Variante Bac, 2009)*

20. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{3x} + 2x + 1$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} (f(-1) + f(-2) + f(-3) + ... + f(-n) + n^2)$. *(Variante Bac, 2009)*

21. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} (f(1) + f(2) + ... + f(n))^{n^2}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. *(Variante Bac, 2009)*

22. Se consideră șirul cu termenul general $a_n = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot ... \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$, $n \geq 2$, și funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$.

a) Verificați identitatea $\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{f(x+1)}{f(x)}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) Arătați că $a_n = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)}$, oricare ar fi $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3a_n}{2}\right)^{n^2}$. *(Bac, iunie 2001)*

23. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} (a\sqrt{n+2} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n})$, știind că $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a + b + c = 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Scanned with OKEN Scanner

24. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_n = n^a(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})$, unde $a \in \mathbb{R}$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (discuţie după valorile lui a).

25. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât limita şirului cu termenul general $a_n = \sqrt{n^2+1} - a\cdot n + b$ să fie 2.

26. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, astfel încât limita şirului cu termenul general $a_n = \left(a + \frac{n+1}{bn^2+n+2}\right)^{n+2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ să fie $\frac{1}{e}$.

27. a) Arătaţi că $\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

b) Arătaţi că $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, este convergent.

(Variante Bac, 2007)

28. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general $a_n = \frac{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!}{(n+1)!}$.

a) Verificaţi identitatea $k \cdot k! = (k+1)! - k!$ $(k \in \mathbb{N})$.

b) Arătaţi că $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{(n+1)!}$. *(Bac, iunie 2001)*

29. Se consideră şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, definite prin $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $y_n = x_n - 2\sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Arătaţi că $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Demonstraţi că $2\sqrt{n+1} - 2 < x_n \leq 2\sqrt{n} - 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

d) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}$.

e) Arătaţi că $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $-2 \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n \leq -1$. *(Variante Bac, 2007)*

Scanned with OKEN Scanner

30. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$, definite prin $a_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}$, $b_n=a_n+\frac{1}{n}$ și $c_n=a_n+\frac{1}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Admitem cunoscut faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{\pi^2}{6}$.

a) Arătați că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător, iar șirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

b) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\frac{\pi^2}{6}$.

c)* Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(a_n-\frac{\pi^2}{6}\right)=-1$. *(Bac, iunie 2002)*

3.9. Șiruri date prin formule de recurență

1. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_1=3$ și $x_{n+1}-x_n-2=0$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $a_1=-2$ și $a_{n+1}=4a_n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. Notăm cu S_n suma primilor n termeni ai șirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

a) Determinați a_n și S_n.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{n+2}}{S_{n+1}}$. *(Bac, august 1999)*

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir definit prin: $a_1\in\mathbb{R}$, $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{10}a_n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. Determinați a_n în funcție de a_1 și calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0=1$ și $x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{3}{2}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

a) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton și mărginit.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

5. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_1=a$, $a\in\mathbb{R}$ și $x_{n+1}=\frac{n+1}{n}x_n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. Determinați x_n în funcție de a și calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

6. Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ definite astfel: $a_1>0$, $a_{n+1}=\frac{5a_n+3}{a_n+3}$, $b_n=\frac{a_n-3}{a_n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică, determinați b_n, a_n și calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Scanned with OKEN Scanner

7. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin $a_0 = 2$ şi $2a_{n+1} + a_n = 3$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_0 + a_1 + \ldots + a_n - n - 1)$. *(Variante Bac, 2004)*

8. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2^n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi x_n şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

9. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_0 = 0$ şi $a_n = a_{n-1} + 2n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)^n$.

10. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ are limită. *(Variante Bac, 2009)*

11. Se consideră şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ definite astfel: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 1$ şi $y_n = x_{n+1} - x_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că $(y_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu raţia 1.

b) Determinaţi x_n şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$.

12. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_1 = 3$ şi $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător şi $x_n \in (2, 3]$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. *(Variante Bac, 2007)*

13. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_0 = a > 0$ şi $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătaţi că $x_n = (a-1)^{2^n} + 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

b) Determinaţi valorile lui a pentru care şirul este convergent şi calculaţi limita sa.

14. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $a_1 = 15$, $a_{n+1} = \frac{5 + a_n^2}{2a_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că $a_n \geq \sqrt{5}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Studiaţi monotonia şi mărginirea şirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. *(Variante Bac, 2008)*

15. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin: $x_1 > 0$ şi $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$, oricare ar fi $n \geq 1$.

a) Arătaţi că $x_n \geq 1$, oricare ar fi $n \geq 2$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent și calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

16. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_1 = a \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{\sqrt{1+x_n^2}}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați x_n în funcție de a și calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\sqrt{n}$.

17. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Arătați că $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

b) Arătați că $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

c)* Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}$. *(Variante Bac, 2009)*

18. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \dfrac{2x_n+1}{x_n+2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător și $x_n \in (0, 2]$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătați că $(x_n)_{n\geq 1}$ are limita 1. *(Variante Bac, 2009)*

19. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 \in (0, 1)$ și $x_{n+1} = \dfrac{x_n^5+3x_n}{4}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Arătați că $x_n \in (0, 1)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

c)* Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+2}}{x_n} = \dfrac{9}{16}$. *(Variante Bac, 2009)*

20. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale pozitive astfel încât $(n+1)x_{n+1} - nx_n < 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător și mărginit.

b) Demonstrați că $x_{n+1} < \dfrac{1}{n+1}x_1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

21. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$, $x_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{x_n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați x_{n+2}, x_{n+3} în funcție de x_n.

b) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit și divergent.

Scanned with OKEN Scanner

3.10. Limite de funcții

1. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x+1)$; b) $\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x^2+5}-1)$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-x-3)$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x+7)$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x})$; f) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x})$.

2. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2}{2x^2+1}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$; e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x}}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3}{x^3-4x+5}$.

3. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)^3}$;

d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)^2}{x^3+1}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x+1)^2-(x-1)^2}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

4. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt[3]{x^3+x}\right)$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

5. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x+3}{2^x-3}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x+3}{2^x-3}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x-2}-1}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-1}{2^x-1}$; f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-(0,5)^x}{2+(0,5)^{x+1}}$.

6. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 7x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin 5x}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; e) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 3x}$.

7. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$;

Scanned with OKEN Scanner

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}\operatorname{arctg} x$; e) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\cos x$; f) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-x^3-\sin x)$.

8. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^{x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+x-2}\right)^{\frac{1}{(x-1)^2}}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$; f) $\lim\limits_{x\to 2}(x+1)^{\ln|x-2|}$.

9. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+5}\right)^{2x}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{1-x}$.

10. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x+2^x-2}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x-4}{x-2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\sin x}{x^2}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+3x)}$.

11. Se consideră funcția $f:(0,3)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}-3}{x}$. Calculați următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\searrow 0}(1+f(x))^{\frac{1}{x}}$. *(Bac, august 1999)*

12. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to(0,\infty), f(x)=\frac{x^2-x+1}{x}$. Calculați $\lim\limits_{x\searrow 0}\left(\frac{1}{f(x)}\right)^{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{\sin\pi x}$ și $\lim\limits_{x\to\infty}(x-f(x))^x$. *(Variante Bac, 2009)*

13. Calculați limitele laterale în punctele indicate pentru fiecare dintre următoarele funcții:

a) $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x-2}$ în $x=2$;

b) $f:\mathbb{R}-\{-1,1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ în $x=-1$ și $x=1$;

c) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ în $x=0$;

Scanned with OKEN Scanner

d) $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$ în $x=1$.

14. Arătați că niciuna dintre următoarele funcții nu are limită în punctul indicat în dreptul ei.

a) $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ în $x=1$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$ în $x=\infty$;

c) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ în $x=0$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\0, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ în $x=a$, unde $a\in\mathbb{R}$.

15. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1-2x, x<-1\\x^2+x+3, x\geq -1\end{cases}$. Cercetați dacă f are limită în $x=-1$.

16. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sin x}{x^2-x}, x<0\\3x+1, x\geq 0\end{cases}$. Cercetați dacă f are limită în $x=0$.

17. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x+\sin 2x}{x}, x<0\\3+x, x\geq 0\end{cases}$. Calculați $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

18. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2ax, x<1\\3x^2-a^2x, x\geq 1\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați a, astfel încât funcția f să aibă limită în $x=1$.

19. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x+a, x\leq 1\\x^2+2x+b\ln(x^2-1), x>1\end{cases}$. Determinați a, $b\in\mathbb{R}$, astfel încât funcția f să aibă limită în $x=1$.

20. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea $|f(x)-x^2|\leq|x^3|$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

21. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}(f(e^x))^{\frac{1}{x}}$. *(Variante Bac, 2009)*

22*. Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R}$ (D este domeniul maxim de definiție), $f(x)=x-\sqrt{ax^2+bx+1}$, unde $a, b\in\mathbb{R}, a>0$. Determinați a, b, astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$. *(Bac, august 1999)*

23*. Determinați $a, b\in\mathbb{R}$, astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+4x+1}-ax-b)=2\sqrt{2}$. *(Variante Bac, iunie 1998)*

Scanned with OKEN Scanner

24*. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ $(a > 0)$, astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{2x-1}\right)^x = e^2$.

3.11. Asimptote

1. Determinați asimptotele graficului funcției $f: \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} - \{-1, 0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$. Determinați asimptotele graficului funcției f. *(Variante Bac, 2009)*

3. Determinați asimptotele funcției $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{|x-1|}$. *(Bac, 1998)*

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} - \{1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$. Determinați asimptotele graficului funcției f. *(Variante Bac, 2009)*

5. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}$. Determinați ecuația asimptotei spre ∞ la graficul funcției. *(Variante Bac, 2009)*

6. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}$. Arătați că graficul funcției f admite asimptotă spre $-\infty$. *(Variante Bac, 2009)*

7. Determinați asimptotele la graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}$. *(Variante Bac, 2009)*

8. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x^3+3x^2-4}$. Determinați asimptota oblică a graficului funcției f spre ∞. *(Variante Bac, 2009)*

9. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - ax$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați asimptota oblică la graficul funcției f către $-\infty$. *(Variante Bac, 2009)*

10. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x}$. Determinați asimptotele graficului funcției f. *(Variante Bac, 2009)*

11. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$. Determinați ecuația asimptotei la graficul funcției f spre ∞. *(Variante Bac, 2009)*

12. Determinați asimptotele graficului funcției $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x$. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

13. Arătați că graficul funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\ln x$ nu are asimptotă spre ∞.

(Variante Bac, 2009)

14. Se consideră funcția $f:(-2,2)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$. Determinați asimptotele graficului funcției f.

15. Determinați asimptota spre ∞ a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arcctg}x$.

(Variante Bac, 2009)

16. Arătați că graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-\sin x$ nu are asimptote. *(Variante Bac, 2009)*

17*. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-1}$, unde $a, b\in\mathbb{R}$. Determinați a, b, astfel încât graficul funcției f să aibă asimptota $y=x+2$ la ∞, iar $P(2,6)$ să fie punct al graficului.

(Bac, august 1999)

18*. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}-\{-d\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x+d}$, unde $a, b, c, d\in\mathbb{R}$. Determinați a, b, c, d, astfel încât graficul funcției f să admită asimptotele $x=3$ și $y=x+2$ (la ∞), iar punctul $A(1,1)$ să aparțină graficului funcției f. *(Bac, iunie 1998)*

19*. Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R}$ (D este domeniul maxim de definiție), $f(x)=ax+\sqrt{bx^2+cx+1}$, unde $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a>0$, $b>0$. Determinați a, b, c, astfel încât graficul funcției să admită spre ∞ o asimptotă paralelă cu dreapta $y=4x+1$, iar spre $-\infty$ să aibă asimptota orizontală $y=-1$.

(Bac, august 1999)

20*. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}-\{-1,1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+x+a}{x^2-1}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați valoarea lui a, știind că graficul funcției are exact o asimptotă verticală. *(Variante Bac, 2009)*

3.12. Funcții continue

1. Studiați continuitatea următoarelor funcții în punctul indicat în dreptul fiecăreia dintre ele:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-x+1, x<1\\ 2x-1, x\geq 1\end{cases}$ în $x_0=1$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1+\sqrt{x}, x\geq 0\\ e^x, x<0\end{cases}$ în $x_0=0$.

2. Demonstrați că funcția $f:[0,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\{x\}\cdot(1-\{x\})$ este continuă. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

3. Studiați continuitatea fiecăreia dintre funcțiile:

a) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, x\neq 1\\ 1, x=1\end{cases}$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-x, x\geq 1\\ -x^2+x, x<1\end{cases}$.

(Variante Bac, 2009)

4. Arătați că, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, x\neq 1\\ a, x=1\end{cases}$ nu este continuă în $x=1$.

5. Demonstrați că, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$ nu este continuă.

6. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^x-1, x<0\\ x^2+x+a, x\geq 0\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați $a\in\mathbb{R}$, astfel încât funcția f să fie continuă în $x_0=0$. *(Variante Bac, 2009)*

7. Considerăm funcția $f:(-\infty,4)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}a\log_2(4-x), x\leq 2\\ \dfrac{x^2+x-6}{x^2-7x+10}, 2<x<4\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați a, astfel încât f să fie continuă pe $(-\infty,4)$. *(Bac, iunie 1999)*

8. Considerăm o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $xf(x)=e^x-1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}^*$. Arătați că f este continuă în $x=0$ dacă și numai dacă $f(0)=1$. *(Variante Bac, 2009)*

9. Determinați constantele reale a, b, astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+a, x\leq 2\\ ax+b, x>2\end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$ și, în plus, să existe $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$. *(Bac, iunie 1998)*

10. Considerăm funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}ae^x, x\leq 0\\ \dfrac{\sqrt{1-x}-b}{x}, x>0\end{cases}$. Determinați $a, b\in\mathbb{R}$, astfel încât f să fie continuă.

11*. Studiați continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+xe^{nx}}{1+e^{nx}}$ $(n\in\mathbb{N})$. *(Bac, iunie 1998)*

12. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x, x\in\mathbb{Q}\\ x^3, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$.

a) Arătați că $|f(x)|\leq|x|$, oricare ar fi $x\in[-1,1]$.
b) Demonstrați că f este continuă în $x=0$. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

13. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{\{x\}-\{x\}^2}$.

a) Arătați că $f(x)=\sqrt{x-x^2}$, oricare ar fi $x\in[0,1)$.

b) Demonstrați că $f(x+1)=f(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

c) Arătați că f este continuă pe $\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2007)*

14. Arătați că următoarele ecuații au cel puțin câte o soluție în intervalul indicat în dreptul fiecăreia:

a) $x^3+x^2+7x-1=0$ în $(-1,1)$;

b) $e^x+\ln x+2x=1$ în $(0,1)$.

15. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, considerăm funcția $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f_n(x)=x^n+\ln x$. Arătați că ecuația $f_n(x)=0$ are exact o rădăcină, situată în intervalul $\left(\frac{1}{e},1\right)$. *(Variante Bac, 2009)*

16. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+x+1$.

a) Arătați că, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, ecuația $f(x)=3+\frac{1}{n+1}$ are o soluție unică $x_n\in\mathbb{R}$.

b)* Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$. c)* Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} n(x_n-1)$. *(Variante Bac, 2009)*

17. Considerăm funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{\pi}{x}, x\in(0,1]\\ 0, x=0\end{cases}$.

a) Arătați că funcția f este continuă pe $[0,1]$.

b)* Arătați că, dacă $n\in\mathbb{N}^*$, atunci ecuația $f(x)=\cos\frac{\pi}{x}$ are cel puțin o soluție în intervalul $\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$.

(Variante Bac, 2009)

18. Considerăm o funcție continuă $f:[-1,1]\to[-1,1]$. Demonstrați că există $u, v\in[-1,1]$, astfel încât $f(u)=u$ și $f(v)=-v$.

19. Stabiliți semnul fiecăreia dintre funcțiile:

a) $f:[0,5]\to\mathbb{R}, f(x)=3-x-\sqrt{5x-x^2}$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x+1|-|3x-1|$.

20. Demonstrați că funcția $f:(0,\infty)\to(-\infty,0), f(x)=\ln(1+x)-x$ este surjectivă. *(Variante Bac, 2009)*

21. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{3x}+2x+1$ este inversabilă. *(Variante Bac, 2009)*

22. Determinați $\operatorname{Im} f$ pentru fiecare dintre următoarele funcții:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+2x^2+3$;

b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-x}-\ln x$.

Scanned with OKEN Scanner

23*. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1-\sqrt{|1-x^2|}}{x^2}$. Demonstrați că f este mărginită.

(Variante Bac, 2009)

24*. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă în $x=0$, astfel încât $f(0)=1$ și $f(x)-f\left(\dfrac{x}{e}\right)=x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{x}{e^{n+1}}\right)$, unde $x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$.

b) Arătați că $f\left(\dfrac{x}{e}\right)-f\left(\dfrac{x}{e^2}\right)=\dfrac{x}{e}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

c) Demonstrați că $f\left(\dfrac{x}{e^n}\right)-f\left(\dfrac{x}{e^{n+1}}\right)=\dfrac{x}{e^n}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*$.

d) Determinați $f(x), x\in\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2007)*

3.13. Derivata unei funcții

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2+5x+2$. Folosind definiția derivatei unei funcții într-un punct, calculați $f'(-1)$ și $f'(0)$.

2. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x(x^2+1), x\le 0\\ \operatorname{arctg} x, x>0\end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2009)*

3. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x^2-x|$. În câte puncte nu este derivabilă? *(Bac, iunie 2004)*

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{|x^2-1|}$. Calculați derivatele laterale în 0, –1, 1. *(Bac, iunie 1998)*

5. Determinați domeniul de derivabilitate al funcției $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{\pi}{x}, x\in(0,1]\\ 0, x=0\end{cases}$.

(Variante Bac, 2009)

6. Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x, x\in\mathbb{Q}\\ x^3, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ nu este derivabilă în origine.

(Variante Bac, 2009)

7. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, x\in\mathbb{R}^*\\ 0, x=0\end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Arătați că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. *(Variante Bac, 2009)*

8. Determinați constantele a, b, astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x^2+b, x\le 2\\ 2ax^3+11a, x>2\end{cases}$ să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$. *(Bac, 1998)*

9. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-e^{-x}$. Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. *(Variante Bac, 2009)*

10. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-3)\ln x$. Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. *(Variante Bac, 2009)*

11. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^2+(m-2)x-m+2}$, $m\in\mathbb{R}$. Determinați valorile lui m pentru care domeniul de continuitate al funcției coincide cu domeniul de derivabilitate. *(Bac, iunie 1998)*

12. Calculați derivata fiecăreia dintre următoarele funcții:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+4$;

b) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x^2}$;

c) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}$;

d) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=(\sqrt[3]{x})^7+1$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+5^x$;

g) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-x+1$;

h) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sin x+3\cos x$;

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2^{-x}$;

j) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x$;

k) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\arcsin x$;

l) $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$.

(Variante Bac, 2007-2009)

13. Calculați derivata fiecăreia dintre următoarele funcții:

a) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)\ln x$;

b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\ln x$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+2x+3)e^x$;

d) $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$;

g) $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$;

h) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

Scanned with OKEN Scanner

i) $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x+\ln x}$; j) $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

(Variante Bac, 2007-2009)

14. Calculați derivata fiecăreia dintre următoarele funcții:

a) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}, f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+\ln(1+x^2)$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg} x$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$;

e) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$; f) $f:(-2,2)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$;

g) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{2}\ln^2 x$; h) $f:\mathbb{R}-\{-1,1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-1}$;

i) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$; j) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{3x}+2x+1$;

k) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$; l) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

(Variante Bac, 2007-2009)

15. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x$. Determinați punctul în care tangenta la graficul funcției este paralelă cu prima bisectoare. *(Variante Bac, 2009)*

16. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției. *(Variante Bac, 2009)*

17. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$. Determinați punctele graficului funcției f în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuație $9y=2x$.

(Variante Bac, 2009)

18. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-ex-1$. Determinați coordonatele punctului de intersecție dintre tangenta la graficul funcției f în punctul $O(0,0)$ și dreapta de ecuație $x=1$.

(Variante Bac, 2009)

19. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg} x$ în punctul $(1, f(1))$.

(Variante Bac, 2009)

20. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $(0, f(0))$. *(Variante Bac, 2009)*

21. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\operatorname{arctg} x-\ln(1+x^2)$. Demonstrați că funcția f' este mărginită. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

22. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=e^{x\ln x}$. Arătați că $f'(x)=f(x)(1+\ln x)$, oricare ar fi $x>0$.

(Variante Bac, 2009)

23. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2-4}$.

a) Arătați că $f^2(x)\cdot f'(x)=x^2+2x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

b) Determinați derivatele laterale ale funcției în punctul $x_0=-2$. *(Variante Bac, 2009)*

24. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\frac{x}{x+1}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n[f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)]$.

(Variante Bac, 2007)

25. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-\frac{x^3}{6}-\sin x$. Determinați derivata a doua a funcției f.

(Variante Bac, 2009)

26. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(ax^2+bx+c)$, unde $a, b, c\in\mathbb{R}$. Determinați $a, b, c\in\mathbb{R}$, astfel încât $f(0)=0$, $f'(0)=1$ și $f''(0)=4$. *(Variante Bac, 2009)*

27. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+e^x$. Rezolvați ecuația $f'(x)-f''(x)+f(x)=e^x-3$, $x\in\mathbb{R}$.

(Variante Bac, 2009)

28. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Arătați că $(x^2+1)\,f''(x)+x\cdot f'(x)=\sqrt{x^2+1}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2009)*

29. Fie $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_0(x)=e^{2x}$. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, se definește funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ prin $f_n(x)=f'_{n-1}(x)$.

a) Arătați că $f_3(x)=8e^{2x}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_1(a)+f_2(a)+\ldots+f_{n-1}(a)}{f_n(a)}$, unde $a\in\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2009)*

30. Fie funcția $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_0(x)=e^x+e^{-x}$. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, definim funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=f'_{n-1}(x)$.

a) Demonstrați că, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, avem $f_{2n}(x)=f_0(x)$ și $f_{2n+1}(x)=f_1(x)$ $(x\in\mathbb{R})$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_0(0)+f_1(0)+\ldots+f_n(0)}{n}$. *(Variante Bac, 2007)*

31. Considerăm funcțiile $f, g:\mathbb{R}-\{1,2\}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)(x-2)$ și $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$.

a) Arătați că $g(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Demonstrați că $(f'(x))^2 \geq f(x) \cdot f''(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$. *(Variante Bac, 2009)*

32. Determinați derivata de ordin n ($n \in \mathbb{N}^*$) a funcției $f: E \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+a}$ (precizând mulțimea E a punctelor unde f este de n ori derivabilă). *(Bac, iunie 1998)*

33*. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$. Calculați $f^{(2004)}(0)$. *(Bac, iunie 2003)*

34*. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + x)e^x$.

a) Arătați că $f^{(n)}(x) = (x^2 + (2n+1)x + n^2)e^x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f'(0) + f''(0) + \ldots + f^{(n)}(0)}{n^3}$. *(Bac, iunie 2002)*

3.14. Teorema lui Fermat. Teorema lui Rolle. Teorema lui Lagrange

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

a) Arătați că $x = 0$ este punct de minim pentru f.

b) Satisface funcția f ipoteza teoremei lui Fermat (pentru $x = 0$)?

2. Determinați punctele de extrem pentru fiecare dintre funcțiile următoare (folosiți teorema lui Fermat!):

a) $f: (-1, 3) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 6x + 1$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - \operatorname{arctg} x$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

3. Arătați că funcția $f: \mathbb{R} - \{-1, 0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ nu are puncte de extrem local. *(Variante Bac, 2009)*

4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x + ax$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați a, știind că $x = 1$ este punct de extrem pentru f.

5. Considerăm numărul real $a > 0$ și funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - ax$. Determinați a, știind că $f(x) \geq 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2009)*

6. Fie $a > 0$ și $b > 0$. Demonstrați că $a^x + b^x \geq 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $ab = 1$.

7. Fie $n \in \mathbb{N}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(1 + x)^n \geq 1 + ax$, oricare ar fi $x > -1$.

8. Determinați $a > 0$, astfel încât $2^x + a^x \geq 3^x + 4^x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

9. Arătați că fiecare dintre următoarele funcții îndeplinește condițiile teoremei lui Rolle:

Scanned with OKEN Scanner

a) $f:[1,3]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+2$; b) $g:[-1,\pi]\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases}x^2+x+2, x\in[-1,0]\\ 2+\sin x, x\in(0,\pi]\end{cases}$.

10. Studiați dacă se poate aplica teorema lui Rolle următoarelor funcții:

a) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x+2$; b) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\in[-1,0]\\ x+1, x\in(0,1]\end{cases}$.

11. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$. Arătați că ecuația $f'(x)=0$ are exact trei rădăcini reale. *(Variante Bac, 2009)*

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^6+x^4-x^2-x$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Arătați că ecuația $6x^5+4x^3-2x-1=0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $(0,1)$.

13. Fie o funcție $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, continuă pe $[1,2]$ și derivabilă pe $(1,2)$.

a) Arătați că funcția $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x)=(x-1)(f(x)-f(2))$ îndeplinește condițiile din ipoteza teoremei lui Rolle.

b) Deduceți că există $c\in(1,2)$, astfel încât $(c-1)f'(c)+f(c)=f(2)$. *(Variante Bac, 2009)*

14. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ o funcție derivabilă.

a) Arătați că funcția $g:[a,b]\to\mathbb{R}, g(x)=(x-a)(x-b)f(x)$ verifică condițiile din ipoteza teoremei lui Rolle.

b) Deduceți că există $c\in(a,b)$, astfel încât $\frac{f'(c)}{f(c)}=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}$.

15*. Fie $f, g:[0,1]\to\mathbb{R}$ două funcții continue pe intervalul $[0,1]$ și derivabile pe intervalul $(0,1)$. Demonstrați că, dacă $f(0)=f(1)=0$ și $f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in(0,1)$, atunci există cel puțin un punct $c\in[0,1]$ astfel încât $g(c)=0$.

16. Studiați dacă se poate aplica teorema lui Lagrange pentru următoarele funcții și, în caz afirmativ, determinați punctele corespunzătoare:

a) $f:[1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x$; b) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)$;

c) $f:[1,e]\to\mathbb{R}, f(x)=x+\ln x$; d) $f:[-1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}3-x^2, x\le 1\\ \frac{2}{x}, x>1\end{cases}$.

17. Determinați $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcției $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^x, x\in[-1,0]\\ ax+b, x\in(0,1]\end{cases}$ să i se poată aplica teorema lui Lagrange.

Scanned with OKEN Scanner

18. Fie funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(\ln x)$.

a) Utilizând teorema lui Lagrange, arătați că, pentru orice $k>1$, există $c_k\in(k,k+1)$, astfel încât $f(k+1)-f(k)=\dfrac{1}{c_k\ln c_k}$.

b) Demonstrați că $\dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)}<\ln(\ln(k+1))-\ln(\ln k)<\dfrac{1}{k\ln k}$, oricare ar fi $k>1$.

(Variante Bac, 2007)

19. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg} x$.

a) Utilizând teorema lui Lagrange, arătați că, oricare ar fi $k\geq 0$, există $c_k\in(k,k+1)$, astfel încât $f(k+1)-f(k)=\dfrac{1}{c_k^2+1}$.

b) Demonstrați că $\dfrac{1}{(k+1)^2+1}<\operatorname{arctg}(k+1)-\operatorname{arctg} k<\dfrac{1}{k^2+1}$, oricare ar fi $k\geq 0$.

(Variante Bac, 2007)

20. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ și șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $\dfrac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}}<f(k)-f(k+1)<\dfrac{1}{2k\sqrt{k}}$, oricare ar fi $k\in\mathbb{N}^*$.

b) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent. *(Variante Bac, 2009)*

21. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$.

a) Arătați că, pentru orice $k\in(0,\infty)$, există $c_k\in(k,k+1)$, astfel încât $f(k+1)-f(k)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{c_k}}$.

b) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}-f(n)$, este strict descrescător.

(Variante Bac, 2009)

22. Fie șirul $(c_n)_{n\geq 1}$ definit prin $c_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

a) Arătați că $\dfrac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\dfrac{1}{x}$, oricare ar fi $x>0$.

b) Demonstrați că șirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

c)* Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{n+n}\right)=\ln 2$. *(Variante Bac, 2007)*

Scanned with OKEN Scanner

23. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. Demonstrați că $f(x+1)-f(x)\le 1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2009)*

24*. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{x^4+3}$. Arătați că $|f(x)-f(y)|\le|x-y|$, oricare ar fi $x, y\in\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2009)*

25*. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(t)=t^a$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $f'(t)$, $t\in(0,\infty)$.

b) Utilizând teorema lui Lagrange, arătați că există $c_a\in(3,4)$ și $d_a\in(5,6)$ astfel încât $4^a-3^a=a(c_a)^{a-1}$ și $6^a-5^a=a(d_a)^{a-1}$.

c) Rezolvați ecuația $4^x-3^x=6^x-5^x$. *(Variante Bac, 2007)*

26*. Considerăm funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(\ln x)$. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f'(x)}$. *(Variante Bac, 2009)*

27. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{e^x}{x}$. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(f(x)-f(x+1))$. *(Variante Bac, 2009)*

28. Fie funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=e^{\frac{1}{x}}$. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(f(x+1)-f(x))$. *(Variante Bac, 2009)*

29. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}x)$. *(Variante Bac, 2009)*

3.15. Regulile lui l'Hospital

1. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{x-\operatorname{arctg}x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$;

f) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}$;

g) $\lim\limits_{x\searrow0}\dfrac{2e^{-x}-x-2}{\sin x}$;

h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$;

i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{x^2}$;

j) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x+\cos x-1}{x^2-x}$;

Scanned with OKEN Scanner

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{tg} x}{x^3}$;

l) $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{xe^{-\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg}^2 x}$. *(Variante Bac, 1998-2009)*

2. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$;

b) $\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln x$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(x-\ln(e^x+1))$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\operatorname{arctg} x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg} x)$.

(Variante Bac, 2007-2009)

3. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x-x^2)$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln(1+x)-x)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(2^x-\ln x)$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\dfrac{1+x}{x}\right)$.

4. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}}$;

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$. *(Variante Bac, 1998)*

5. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x-1)^{\frac{1}{\ln x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

6. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

d) $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$.

Scanned with OKEN Scanner

7. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$.

a) Se poate folosi regula lui l'Hospital pentru a calcula limita la ∞ a funcției f? Justificați răspunsul.
b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

8*. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\ln x$.

a) Arătați că ecuația $f(x)=0$ are o soluție unică $x_0\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$.

b) Demonstrați că $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xe^x-1}{x-x_0}=f'(x_0)$, unde x_0 este numărul definit la punctul a).

(Variante Bac, 2009)

3.16. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x|$. Arătați că $x=0$ este punct de minim local al lui f, deși f nu este derivabilă în $x=0$.
2. Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+1$. Arătați că $x=0$ este punct de minim al lui f, iar $x=1$ este punct de maxim al lui f, deși $f'(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in[0,1]$.
3. Folosind șirul lui Rolle, stabiliți rădăcinile reale și precizați intervalele în care acestea se află pentru fiecare dintre următoarele ecuații:
   a) $2x^3-6x^2+3=0$; b) $e^{2x}-6e^x+4x+4=0$;
   c) $x^2=2\ln x+10$; d) $x^3-3x-24\operatorname{arctg} x=0$.
4. Stabiliți, în funcție de parametrul real m, numărul rădăcinilor reale ale ecuației $x^3-3x+m=0$.
5. Determinați numărul de rădăcini reale ale ecuației $18x^2-\ln x-m=0$ $(m\in\mathbb{R})$. *(Variante Bac, 2009)*
6. Determinați numărul soluțiilor reale ale ecuației $x+e^{-x}-m=0$ $(m\in\mathbb{R})$. *(Variante Bac, 2009)*
7. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{|x-1|}{e^x}$. Determinați numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f(x)=m$ $(m\in\mathbb{R})$. *(Variante Bac, 2009)*
8. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x+2}e^{|x|}$. Determinați numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x)=m$ $(m\in\mathbb{R})$. *(Variante Bac, 2009)*
9. Determinați valorile reale ale lui m pentru care dreapta cu ecuația $y=mx$ intersectează graficul funcției $f(x)=x, x\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

10. Demonstrați identitățile:

a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, oricare ar fi $x \in (-1, 1)$;

b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

11. Arătați că funcțiile $f, g : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$, diferă printr-o constantă.

12. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{C_n^0}{1}x + \frac{C_n^1}{2}x^2 + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}x^n$, $g(x) = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}$.

a) Arătați că $f'(x) = g'(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Deduceți că $f(x) = g(x) - \frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Demonstrați că $\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

13. Studiați monotonia următoarelor funcții:

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = x - \sin x$;

b) $f_2 : (-2, \infty) \to \mathbb{R}, f_2(x) = \frac{2x+1}{x+2}$;

c) $f_3 : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f_3(x) = 2e^x + 3x^2 - 2x + 5$;

d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_4(x) = 3x - x^3 - 3\operatorname{arctg} x$;

e) $f_5 : (0, \infty) \to (-\infty, 0), f_5(x) = \ln(1 + x) - x$;

f) $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_6(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

14. Determinați intervalele de monotonie și punctele de extrem ale funcțiilor:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x + 1$;

b) $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = e^{x \ln x}$;

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$;

d) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

15. Studiați monotonia funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - ax$ ($a \in \mathbb{R}, a > 0$). *(Variante Bac, 2009)*

16. Determinați parametrul real m, astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = mx - \ln(x^2 + 1)$ să fie descrescătoare pe $\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 1998)*

Scanned with OKEN Scanner

17. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+e^{-x}$, are exact un punct de extrem local. *(Variante Bac, 2009)*

18. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}-\{-1,1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}$ are un singur punct de extrem local. *(Variante Bac, 2009)*

19. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$ are două puncte de extrem local. *(Variante Bac, 2009)*

20. Determinați punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x+2}e^{|x|}$. *(Variante Bac, 2009)*

21. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+x+a}{x^2-1}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați a, știind că 3 este un punct de extrem local al funcției f. *(Variante Bac, 2009)*

22. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați toate valorile lui a pentru care f are trei puncte de extrem local. *(Variante Bac, 2009)*

23. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=18x^2-\ln x$.

a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

b) Determinați $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $f(x)\geq a$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$. *(Variante Bac, 2009)*

24. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+e^x$.

a) Arătați că $f(x)\geq 2x+1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că, dacă $f(x)\geq mx+1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, atunci $m=2$. *(Variante Bac, 2009)*

25. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+1$. Determinați cel mai mare număr real a cu proprietatea $f(x)\geq a+2\ln x$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$. *(Variante Bac, 2009)*

26. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg}x$. Demonstrați că $0<f(x)\leq\frac{\pi}{2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2009)*

27. Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{x^4+3}$. *(Variante Bac, 2009)*

28. Determinați mulțimea valorilor funcției $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{4-3x^2}{x^3}$. *(Variante Bac, 2009)*

29. Arătați că funcția $f:[1,\infty)\to[1,\infty), f(x)=\frac{x^2-x+1}{x}$ este bijectivă. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

30. Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-3x+3\operatorname{arctg}x$ este bijectivă. *(Variante Bac, 2009)*

31. Arătați că $e^x\geq x+1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2009)*

32. Demonstrați că $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$, oricare ar fi $x\in[0,1]$. *(Variante Bac, 2007)*

33. Demonstrați că $\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$, oricare ar fi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$. *(Variante Bac, 2007)*

34. Arătați că $\ln x\geq\frac{2(x-1)}{x+1}$, oricare ar fi $x\in[1,\infty)$. *(Variante Bac, 2009)*

35. Arătați că $(1+x)^\alpha>1+\alpha x$, oricare ar fi $x\in(-1,\infty)-\{0\}$ și $\alpha>1$. *(Variante Bac, 2009)*

36. Demonstrați că $x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2009)*

37. Arătați că $x-\frac{x^3}{6}-\sin x\leq 0$, oricare ar fi $x\in[0,\infty)$. *(Variante Bac, 2009)*

38. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-e\ln x$.

a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

b) Arătați că $f(x)\geq 0$, oricare ar fi $x>0$.

c) Deduceți inegalitatea $e^x\geq x^e$, oricare ar fi $x>0$.

d) Demonstrați că $e^x>\frac{x^{e+1}}{e+1}+1$, oricare ar fi $x>0$. *(Variante Bac, 2001)*

39. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-3x$.

a) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

b) Determinați numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f^2(x)$.

(Variante Bac, 2009)

40. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{ax+b}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

a) Calculați $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că f este crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $a=2b, b\geq 0$.

c) Pentru $a=2$ și $b=1$, determinați imaginea funcției f. *(Variante Bac, 2009)*

41. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x^2+mx)e^{-x}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Determinați asimptota graficului funcției f spre ∞.

b) Arătați că, oricare ar fi valoarea lui m, f are două puncte de extrem.

c) Dacă x_1 și x_2 sunt punctele de extrem ale lui f, arătați că $e^{x_1}f(x_1)+e^{x_2}f(x_2)$ nu depinde de m.

42. a) Arătați că $\sqrt{x}-\ln x>0$, oricare ar fi $x>0$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Arătați că graficul funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(\sqrt{x}-\ln x)$ are o asimptotă verticală.

c) Arătați că funcția de la punctul b) are un singur punct de extrem, situat sub axa Ox.

43. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^5-5x^2+3$.

a) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

b) Arătați că $f(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\geq 0$.

c) Demonstrați că $2a^2\sqrt{a}+3\geq 5a$, oricare ar fi $a\geq 0$.

44. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)\arcsin x$. Determinați punctele în care f nu este derivabilă. *(Variante Bac, 2009)*

45. Fie funcția $f:[0,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\{x\}(1-\{x\})$. Determinați toate punctele în care f nu este derivabilă. *(Variante Bac, 2009)*

46. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$. Determinați domeniul de derivabilitate al funcției f. *(Variante Bac, 2009)*

47. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}xe^x, x\leq 1\\ ax+b, x>1\end{cases}$, unde $a, b\in\mathbb{R}$. Determinați a și b, astfel încât f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 1998)*

48. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcctg} x$.

a) Arătați că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_1=0, x_{n+1}=f(x_n)$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, este convergent. *(Variante Bac, 2009)*

49. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x+1}-\ln\left(x+\frac{3}{2}\right)+\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)$ și șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)$.

a) Demonstrați că f este strict crescătoare.

b) Arătați că $f(x)<0$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

c) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. *(Variante Bac, 2009)*

50. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln x$.

a) Studiați monotonia funcției f.

b) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin $x_0\in(0,1), x_{n+1}=e^{f(x_n)}$, este convergent. *(Variante Bac, 2009)*

51. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$, considerăm funcția $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f_n(x)=x^n-nx+1$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Arătați că f_n este strict descrescătoare pe $[0, 1]$ și strict crescătoare pe $[1, \infty)$.

b) Arătați că ecuația $f_n(x) = 0$, $x \geq 0$, are exact două rădăcini $a_n \in (0, 1)$ și $b_n \in (1, \infty)$.

c) Calculați $f_n\left(\frac{2}{n}\right)$ și apoi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. *(Variante Bac, 2009)*

52. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, considerăm funcția $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = f_n(x)$ și notăm cu x_n abscisa punctului de inflexiune din intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ al graficului funcției f.

a) Arătați că $\sin x_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$, $n \geq 3$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)$. *(Variante Bac, 2009)*

53. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x$.

a) Arătați că f este strict crescătoare.

b) Demonstrați că, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, ecuația $f(x) = n$ are o soluție unică x_n.

c) Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit și calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$. *(Variante Bac, 2009)*

54. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \cos x$ și șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_0 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătați că f este crescătoare.

b) Demonstrați că $0 \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

c)* Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent la $\frac{\pi}{2}$. *(Variante Bac, 2009)*

55. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se definește funcția $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - nx - 1$.

a) Arătați că f_n este convexă.

b) Demonstrați că ecuația $f_n(x) = 0$ are o soluție unică x_n.

c)* Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. *(Variante Bac, 2009)*

56. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și funcția $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^{n+1} - (n+2)x + n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, f_n are exact un punct de extrem x_n.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^{n^2}$. *(Variante Bac, 2009)*

57. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

a) Arătați că funcția f este strict crescătoare.

Scanned with OKEN Scanner

b) Studiați convergența șirului $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_1 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(Variante Bac, 2009)

58. Arătați că funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = e^{x \ln x}$ este convexă. *(Variante Bac, 2009)*

59. Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)$ este convexă. *(Variante Bac, 2009)*

60. Arătați că funcția $f: (-\infty, -2) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ este concavă pe intervalul $(-\infty, 2)$.

(Variante Bac, 2009)

61. Arătați că funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x$ este convexă pe $(0, e]$ și concavă pe $[e, \infty)$.

(Variante Bac, 2009)

62. Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției $f: (-2, 2) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\frac{2+x}{2-x}$.

(Variante Bac, 2009)

63. Fie $\alpha \in (1, \infty)$ și funcția $f: (-1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (1 + x)^\alpha - \alpha x$.

a) Arătați că funcția f este convexă.

b) Demonstrați că $2f(x + y) \leq f(2x) + f(2y)$, oricare ar fi $x, y \in [0, \infty)$. *(Variante Bac, 2009)*

64. Fie funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (x + a)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați a, astfel încât funcția să fie convexă. *(Variante Bac, 2009)*

3.17. Reprezentarea grafică a funcțiilor

1. Determinați punctele unghiulare ale fiecăruia dintre graficele următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 + 2|x| + x^2$; b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

2. Determinați punctele de întoarcere ale fiecăruia dintre graficele următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \sqrt{|x-1|}$; b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 4}$.

3. Considerăm funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 5$, $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{4}{x^2}$. Determinați punctele de intersecție a graficelor celor două funcții și rezolvați inecuația $g(x) \leq f(x)$. *(Bac, iunie 1998)*

4. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} - \{-3, -2\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$. *(Variante Bac, 1999)*

Scanned with OKEN Scanner

5. Considerăm funcția $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^2 + ax + b}$ (D este domeniul maxim de definiție).

a) Determinați a, b pentru care graficul funcției admite ca asimptotă verticală dreapta $x = -2$ și funcția are un maxim în punctul $x = 2$.

b) Pentru $a = -4$ și $b = -12$, reprezentați grafic funcția obținută. *(Variante Bac, 1998)*

6. Fie funcția $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 1}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinați a, b, astfel încât funcția f să admită un extrem egal cu 1 în punctul de abscisă $x = 0$.

b) Pentru $a = 1$ și $b = -1$, reprezentați graficul funcției obținute. *(Variante Bac, 1999)*

7. Fie mulțimea $A = \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$ și funcția $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}$.

a) Trasați graficul funcției f.

b) Determinați numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2009)*

8. Considerăm familia de funcții $f_m: \mathbb{R} - \{m\} \to \mathbb{R}, f_m(x) = \dfrac{(2m-1)x + m}{x - m}$, unde $m \in \mathbb{R}^*$. Notăm cu H_m graficul funcției f_m.

a) Reprezentați graficul funcției f_1 ($m = 1$).

b) Demonstrați că, pentru orice m, graficele H_m trec printr-un punct fix. *(Variante Bac, 1998)*

9. Considerăm funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + m}{x^2}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinați m, astfel încât funcția să admită un extrem local în $x = 2$.

b) Pentru $m = 4$, reprezentați grafic funcția obținută.

c) Discutați numărul rădăcinilor reale ale ecuației $x^3 - \lambda x^2 - 3x + 4 = 0$ după valorile parametrului real λ. *(Variante Bac, 1998)*

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Reprezentați grafic funcția f.

b) Câte soluții reale are ecuația $x - 2 = m\sqrt{x^2+1}$, unde $m \in \mathbb{R}$?

11. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x+2} e^{|x|}$. *(Variante Bac, 1999)*

12. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = xe^{\frac{2}{x}}$. *(Variante Bac, 1999)*

13. Reprezentați grafic funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

14. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 2)$ și $B(1, 4)$. Determinați ecuația cercului $\mathcal{C}$ de centru A și care trece prin B. Reprezentați grafic cercul $\mathcal{C}$. *(Variante Bac, 1999)*

Scanned with OKEN Scanner

15. În sistemul cartezian de coordonate xOy considerăm cercul $\mathcal{C}$ de ecuație $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$. Determinați coordonatele centrului și raza cercului $\mathcal{C}$. Reprezentați cercul. *(Variante Bac, 1999)*

16. În sistemul cartezian de coordonate xOy considerăm punctele $A(0, 3)$, $B(-6, 0)$. Determinați coordonatele centrului cercului circumscris și ale ortocentrului triunghiului AOB. Arătați că aceste două puncte și G, centrul de greutate al triunghiului AOB, sunt coliniare. Scrieți ecuația cercului circumscris lui AOB. *(Variante Bac, 1999)*

17. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 4)$, $B(-2, 0)$, $C(3, 0)$.

a) Scrieți ecuațiile mediatoarelor segmentelor AB și BC.

b) Determinați centrul și raza cercului circumscris triunghiului ABC. *(Variante Bac, 1999)*

18. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(2, -1)$.

a) Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

b) Precizați coordonatele centrului și raza cercului circumscris triunghiului ABC.

(Variante Bac, 1999)

19. În sistemul cartezian de coordonate xOy considerăm punctele $A(5, 0)$, $B(1, 4)$ și dreapta de ecuație $x + y - 3 = 0$.

a) Reprezentați dreapta și punctele. Scrieți ecuația mediatoarei segmentului AB și determinați intersecția ei cu dreapta d.

b) Scrieți ecuația cercului care trece prin A, B și are centrul pe dreapta d. *(Variante Bac, 1999)*

20. În sistemul cartezian de coordonate xOy considerăm cercul $\mathcal{C}$ de ecuație $x^2 + (y - 4)^2 = 16$.

a) Precizați centrul și raza cercului $\mathcal{C}$. Reprezentați cercul.

b) Verificați, prin calcul, că punctul $A(0, -2)$ nu aparține cercului. *(Variante Bac, 1999)*

21. Calculați distanța dintre centrele cercurilor $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$, știind că ecuațiile acestora, raportate la același sistem de coordonate xOy, sunt: $x^2 + y^2 + 2x = 5$ și $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 7$.

22. Aflați coordonatele punctelor de intersecție a cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 16$ cu parabola de ecuație $y^2 = 6x$. Reprezentați grafic cele două conice. *(Variante Bac, 1998)*

23. În sistemul cartezian de coordonate xOy considerăm dreapta d: $x + 5 = 0$ și elipsa E: $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$.

a) Reprezentați grafic dreapta și elipsa.

b) Fie B și C vârfurile elipsei de pe semiaxa pozitivă Oy, respectiv de pe semiaxa negativă Ox. Determinați coordonatele unui punct $P \in d$, astfel încât $PB = PC$. *(Variante Bac, 1999)*

24. Se dă hiperbola H de ecuație $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1 = 0$. Calculați aria triunghiului format de asimptotele hiperbolei H și dreapta de ecuație $9x + 2y - 24 = 0$. *(Variante Bac, 1998)*

25. Determinați coordonatele focarelor hiperbolei H cu ecuația $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Scanned with OKEN Scanner

3.18. Probleme de sinteză – analiză matematică

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

a) Verificați că $f(x)=x+2+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}-\{1\}$.

b) Determinați asimptotele la graficul funcției f.

c)* Calculați $f^{(n)}(x)$, $x\neq 1$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. *(Variante Bac, 2001)*

2. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg} x$ și șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin:

$$a_n=\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1+2^2}+\ldots+\frac{1}{1+n^2}.$$

a) Arătați că funcția f' este strict descrescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

b) Aplicând teorema lui Lagrange, arătați că $\dfrac{1}{1+(k+1)^2}<\operatorname{arctg}(k+1)-\operatorname{arctg} k<\dfrac{1}{1+k^2}$, oricare ar fi $k\in\mathbb{N}^*$.

c)* Utilizând rezultatul de la punctul c), arătați că $a_n<\dfrac{\pi}{2}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. *(Variante Bac, 2001)*

3. Considerăm funcțiile $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\cos\dfrac{\pi}{x}$ și $g:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, g(x)=\cos x+x\sin x$.

a) Verificați că $g'(x)>0$, oricare ar fi $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) Arătați că $g(x)>1$, oricare ar fi $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

c)* Utilizând teorema lui Lagrange pentru funcția f, demonstrați inegalitatea $f(x+1)-f(x)>1$, oricare ar fi $x>2$.

4. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{x^4}{4!}$.

a) Calculați $f'(0), f^{(2)}(0), f^{(3)}(0), f^{(4)}(0)$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^5}$.

c) Arătați că $f'(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2001)*

5. Considerăm funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg} x$, $g(x)=\operatorname{arctg} x-x$ și șirul $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin $a_0=1$, $a_{n+1}=f(a_n)$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Arătați că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și că funcția g este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Arătați că $g(x) = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$.

c) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este descrescător, mărginit și calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

6. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, unde $m \in \mathbb{R}, m > 0$.

a) Determinați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b)* Demonstrați că, dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $0 < a < b < c < d$ și $a + d = b + c$, atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, are loc relația $a^n + d^n > b^n + c^n$.

c)* Considerând $m = 10$, arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, avem $f^{(n)}(0) > 0$. *(Variante Bac, 2002)*

7. Considerăm funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x \ln a - a \ln x$, unde $a \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Calculați $f'(x)$, $x > 0$.

b) Utilizând teorema lui Fermat, determinați $a > 0$, cu proprietatea $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x > 0$.

c) Arătați că $e^x \geq x^e$, oricare ar fi $x > 0$.

8. Considerăm funcțiile $f, g: (-1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1 + x) - x$ și $g(x) = \ln(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2}$.

a) Verificați că $f'(x) = \dfrac{-x}{1+x}$ și $g'(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$, oricare ar fi $x > -1$.

b) Arătați că $f(x) < 0 < g(x)$, oricare ar fi $x > 0$.

c)* Folosind formulele $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ și $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \dfrac{n(4n^2 - 1)}{3}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\dfrac{2n-1}{n^2}\right)\right]$. *(Variante Bac, 2002)*

9. Considerăm funcțiile $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_0(x) = e^{3x}$ și $f_{n+1}(x) = f_n'(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$.

a) Demonstrați că $f_n(x) = 3^n e^{3x}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$.

b) Determinați ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f_0.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_1(0) + f_2(0) + \ldots + f_n(0)}{f_{n+1}(0)}$. *(Bac, 2004)*

10. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x + 1)^{2004} - 2004x - 1$.

a) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Arătați că $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. *(Bac, 2004)*

Scanned with OKEN Scanner

11. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ și șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$.

a) Determinați ecuația asimptotei către ∞ la graficul funcției f.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$. *(Bac, 2004)*

12. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b) Arătați că f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Demonstrați că f este convexă pe $\mathbb{R}$. *(Bac, 2004)*

13. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ și șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$.

a) Verificați că $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$ și calculați $f'(x)$, $x>0$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

c) Determinați ecuația asimptotei către ∞ și ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f. *(Bac, 2004)*

14. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3^x+3^{-x}$.

a) Arătați că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$ și strict crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

b) Arătați că f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Rezolvați în $(0,\infty)$ ecuația $f(x)+f(x^{27})=f(x^5)+f(x^{1986})$. *(Bac, 2004)*

15. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}$.

a) Arătați că f este strict descrescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\sqrt{1})+f(\sqrt{2})+\ldots+f(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$. *(Bac, 2005)*

Scanned with OKEN Scanner

16. Considerăm mulțimea $A = \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$ și funcțiile $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, $g(x) = f'(x)$, $h(x) = g'(x)$ și $u : A \to \mathbb{R}$, $u(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$.

a) Arătați că $u'(x) < 0$, $x \in A$ și $g(x) = f(x) \cdot u(x)$, $x \in A$

b) Arătați că $u'(x) = \frac{f(x) \cdot h(x) - g^2(x)}{f^2(x)}$, oricare ar fi $x \in A$.

c) Arătați că $g^2(x) > h(x)f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. *(Bac, iunie 2006)*

17. Considerăm funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ și șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin $a_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Verificați că $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, oricare ar fi $x > 0$ și calculați $f'(x)$, $x > 0$.

b) Arătați că $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n)^{2n}$. *(Bac, iunie 2007)*

18. Fie funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

a) Arătați că f este strict descrescătoare pe intervalul $[e, \infty)$.

b) Arătați că $f(x) \leq \frac{1}{e}$, oricare ar fi $x > 0$.

c) Determinați $x > 0$, cu proprietatea $f(x) + f\left(\frac{x^2}{e}\right) = \frac{2}{e}$. *(Bac, august 2007)*

19. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

a) Arătați că $(x^2 + 1) f''(x) \cdot f(x) = f'(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că funcția f este convexă.

c) Determinați asimptotele graficului funcției f.

20. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

b) Arătați că funcția f are două puncte de extrem.

c) Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât ecuația $f(x) = m$ să aibă trei soluții reale (distincte).

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XII-a

4.1. Legi de compoziție

1. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = 2^{x+y}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $2009 \circ (-2009)$.

b) Rezolvați ecuația $x \circ x^2 = 64$.

c) Demonstrați că, dacă $(x \circ y) \circ z = 2^{z+1}$, atunci $x = -y$. *(Variante Bac, 2009)*

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție „$\circ$", definită prin $x \circ y = x + y + 11$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Găsiți două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.

c) Determinați cel mai mare număr natural n, pentru care $1 \circ 2 \circ \ldots \circ n < 2001$.

d) Determinați cel mai mic număr natural n, pentru care $2 \circ 2^2 \circ \ldots \circ 2^n > 2001$.

(Variante Bac, 2001)

3. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție „$\circ$" prin $x \circ y = -xy + x + y$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Verificați identitatea $x \circ y = -(x-1)(y-1) + 1$.

b) Demonstrați că $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = (-1)^{n-1}(x_1 - 1)(x_2 - 1)\ldots(x_n - 1) + 1$, pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$. *(Variante Bac, 2001)*

4. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ definim operația $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Verificați identitatea $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $x \circ (-4) = -4$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Arătați că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

d) Calculați $(-2009) \circ (-2008) \circ \ldots \circ 2009$.

Scanned with OKEN Scanner

e) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 12$. *(Variante Bac, 2000)*

5. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$. Mai considerăm $x_0 \in \mathbb{Q}^*$ și $x_n = x_0 \circ x_{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că x_3 este număr irațional.

c) Determinați cel mai mic număr natural nenul n pentru care $x_n \in \mathbb{Q}$. *(Variante Bac, 2008)*

6. Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$, pe care se definește legea de compoziție $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că legea $*$ este asociativă și comutativă.

b) Determinați elementul neutru ale legii „$*$”.

c) Demonstrați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, are loc identitatea $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{de\ n\ ori\ x} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. *(Variante Bac, 2000)*

7. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim operația $x * y = ax + by$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$. Determinați numerele reale a și b, știind că operația introdusă este asociativă și comutativă. *(Bac, 1994)*

8. Studiați asociativitatea, comutativitatea și existența elementului neutru pentru fiecare dintre următoarele legi de compoziție:

a) $x \top y = \dfrac{x+y}{2}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*$;

b) $x \perp y = \sqrt{xy}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*$;

c) $A * B = AB + BA$, $\forall\, A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *(Variante Bac, 1992)*

9. Se consideră mulțimea $G = (-\infty, 0)$ și operația $x * y = \dfrac{xy}{x+y}$, oricare ar fi $x, y \in G$.

a) Demonstrați că G este parte stabilă în raport cu operația dată.

b) Arătați că legea de compoziție este comutativă și asociativă.

c) Legea admite element neutru? *(Variante Bac, 1999)*

10. Pe mulțimea $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ considerăm operația $x \circ y = x^{3 \ln y}$, oricare ar fi $x, y \in G$.

a) Demonstrați că $x \circ y \in G$, oricare ar fi $x, y \in G$.

b) Arătați că $x \circ y = y \circ x$, oricare ar fi $x, y \in G$.

c) Rezolvați în G ecuația $x \circ x = e^3$. *(Variante Bac, 2008)*

11. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $5^x * 5^x = 11$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Demonstrați că mulțimea $H = [3, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $*$.

c) Găsiți două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, astfel încât $a * b \in \mathbb{Z}$. *(Variante Bac, 2008)*

12. Pe mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$, se consideră legea de compoziție „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + ix + iy - 1 - i$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{C}$.

a) Demonstrați că $x \circ y = (x + i)(y + i) - i$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{C}$.

b) Verificați că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{C}$.

c) Găsiți două elemente $a, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, astfel încât $a \circ b \in \mathbb{R}$.

d) Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$, are loc egalitatea $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = (x_1 + i)(x_2 + i)\ldots(x_n + i) - i$.

e) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 1 - i$. *(Variante Bac, 2002)*

13. Pentru a, b din mulțimea $M = [0, \infty)$, se definește operația $a * b = \ln(e^a + e^b - 1)$.

a) Arătați că, pentru orice $a, b \in M$, rezultă că $a * b \in M$.

b) Demonstrați că legea de compoziție $*$ este asociativă.

c) Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, determinați elementele $a \in M$, astfel încât $\underbrace{a * a * \ldots * a}_{\text{de } n \text{ ori } a} = 2a$.

(Variante Bac, 2009)

14. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim operația $x \circ y = xy + a(x + y) + a^2 - a$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

a) Aflați elementul neutru al operației în funcție de a.

b) Determinați numerele reale care sunt simetrizabile în raport cu operația introdusă.

(Variante Bac, 1993)

15. Fie mulțimea $G = [3, \infty)$, pe care se definește operația $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$, oricare ar fi $x, y \in G$.

a) Demonstrați că „$*$" este lege de compoziție internă pe G.

b) Arătați că legea este asociativă, comutativă și admite element neutru.

c) Care sunt elementele simetrizabile în raport cu această operație? *(Variante Bac, 1999)*

16. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție $x * y = 5xy + 6x + 6y + 6$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Demonstrați că legea $*$ este asociativă.

b) Determinați elementele simetrizabile ale mulțimii $\mathbb{Z}$ în raport cu legea $*$.

c) Rezolvați ecuația $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{de 2009 ori } x} = -1$. *(Variante Bac, 2009)*

17. Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ și submulțimea $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ și } a^2 - 2b^2 = 1\}$.

a) Demonstrați că, dacă $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ și $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, atunci $a = c$ și $b = d$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Arătați că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ față de înmulțirea numerelor reale.

c) Dovediți că, dacă $x = a + b\sqrt{2}$ și $x \in G$, atunci $x \neq 0$ și $\frac{1}{x} \in G$.

d) Găsiți un element $x = a + b\sqrt{2}$ și $x \in G$, cu proprietatea că $b \neq 0$.

e)* Demonstrați că G are o infinitate de elemente.

f)* Găsiți un element $z \in G$ cu $0 < z < \frac{1}{10}$. *(Variante Bac, 2000)*

18. Se consideră mulțimea $G = (0, \infty) \times \mathbb{R}$, pe care se definește legea de compoziție $\circ$ prin:

$(a_1, x_1) \circ (a_2, x_2) = (a_1a_2, a_1x_2 + x_1)$.

a) Demonstrați că $((a_1, x_1) \circ (a_2, x_2)) \circ (a_3, x_3) = (a_1, x_1) \circ ((a_2, x_2) \circ (a_3, x_3))$, oricare ar fi (a_1, x_1), $(a_2, x_2), (a_3, x_3) \in G$.

b) Verificați că $(a, x) \circ (1, 0) = (1, 0) \circ (a, x) = (a, x)$, pentru orice $(a, x) \in G$.

c) Arătați că $(a, x) \circ \left(\frac{1}{a}, -\frac{x}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}, -\frac{x}{a}\right) \circ (a, x) = (1, 0)$, oricare ar fi $(a, x) \in G$.

d) Găsiți două elemente (a_1, x_1) și $(a_2, x_2) \in G$, pentru care $(a_1, x_1) \circ (a_2, x_2) \neq (a_2, x_2) \circ (a_1, x_1)$.

e)* Demonstrați că, pentru orice $(a, x) \in G$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $(u, v) \in G$, astfel încât $\underbrace{(u,v) \circ (u,v) \circ \ldots \circ (u,v)}_{\text{de } n \text{ ori } (u,v)} = (a, x)$. *(Variante Bac, 2005)*

19. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și submulțimea $G = \{X(a) \mid X(a) = I_2 + aA, a > -1\}$.

a) Verificați că $A^2 = A$.

b) Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab)$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

c) Arătați că, dacă $X, Y \in G$, atunci $XY \in G$.

d) Demonstrați că $X(1) \cdot X(2) \cdot \ldots \cdot X(n) = X[(n + 1)! - 1]$. *(Variante Bac, 2002)*

20. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = x + y + xy$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că legea „$*$" este asociativă.

b) Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Verificați egalitatea $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$.

c)* Calculați $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \ldots * \frac{1}{2009}$. *(Variante Bac, 2009)*

21. Fie legea de compoziție „$\circ$" definită pe $\mathbb{R}$ prin $x \circ y = xy - x - y + 2$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, și funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Arătați că $(1, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu „$\circ$”.

b) Demonstrați că $f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de 10 ori } x} = 1025$. *(Variante Bac, 2009)*

4.2. Grupuri

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ și submulțimea $G = \{B = aA + bI_2, a, b \in \mathbb{R}\}$.

a) Arătați că $A^2 = 2A - I_2$.

b) Demonstrați că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor și că $(G, \cdot)$ are o structură de monoid. Este monoidul comutativ? *(Variante Bac, 1999)*

2. Se consideră intervalul $G = [2, \infty)$ și operația $x * y = xy - 2(x + y) + 6$, oricare ar fi $x, y \in G$.

a) Demonstrați că $*$ este lege de compoziție internă pe G.

b) Arătați că legea $*$ este asociativă și admite element neutru. Care sunt elementele simetrizabile în raport cu această lege?

c) $(G, *)$ are o structură de grup? *(Variante Bac, 1999)*

3. Se consideră $w \in \mathbb{C}$, $w = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ și mulțimea $\mathbb{Q}(w) = \{a + bw \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

a) Pentru $z_1, z_2 \in \mathbb{Q}(w)$, $z_1 = a_1 + b_1 w$, $z_2 = a_2 + b_2 w$, arătați că $z_1 = z_2$ dacă și numai dacă $a_1 = a_2$ și $b_1 = b_2$.

b) Verificați că $w^2 + w + 1 = 0$ și $w^3 = 1$.

c) Demonstrați că $\mathbb{Q}(w)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ față de operația de înmulțire a numerelor complexe și că $(\mathbb{Q}(w), \cdot)$ formează o structură de monoid comutativ. *(Variante Bac, 1999)*

4. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se definește operația $x \circ y = x + y + 10$. Demonstrați că $(\mathbb{R}, \circ)$ este grup abelian. *(Variante Bac, 1990)*

5. Se consideră pe $\mathbb{R}$ operația $x * y = xy - 5x - 5y + 30$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, iar $G = (5, \infty)$.

a) Determinați $e \in \mathbb{R}$, dacă $x * e = e * x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $(G, *)$ este grup comutativ.

c) Rezolvați în G sistemul $x * y = z; y * z = x; z * x = y$. *(Variante Bac, 2009)*

6. Se consideră $G = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^2 - 3b^2 = 1\}$ și operația $(a, b) * (c, d) = (ac + 3bd, ad + bc)$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Determinați $a \in \mathbb{Z}$, dacă $(a, 15) \in G$.

b) Arătați că, pentru orice $(a, b), (c, d) \in G$, $(a, b) * (c, d) \in G$.

c) Demonstrați că $(G, *)$ este grup. *(Variante Bac, 2009)*

7. Se consideră mulțimea $G = (2, \infty) \setminus \{3\}$, pe care se definește operația $x * y = (x-2)^{\frac{1}{3}\ln(y-2)} + 2$, oricare ar fi $x, y \in G$.

a) Arătați că operația $*$ este lege de compoziție internă pe G.

b) Demonstrați că $(G, *)$ este grup comutativ. *(Variante Bac, 1999)*

8. Fie a un număr real pozitiv și funcția $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = \begin{cases} ax, x < 0 \\ 0, x \geq 0 \end{cases}$.

a) Arătați că $f_a \circ f_b = f_{ab}$, oricare ar fi $a, b > 0$.

b) Arătați că mulțimea $G = \{f_a \mid a > 0\}$ este grup în raport cu compunerea funcțiilor.

9. Se consideră mulțimea $G = \{A(x) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\}$.

a) Verificați egalitatea $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Folosind eventual rezultatul de la a), demonstrați că, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$,

(i) $A(x) \cdot A(y) = A(y) \cdot A(x)$; (ii) $A(x) \cdot A(0) = A(x)$; (iii) $A(x) \cdot A(-x) = A(0)$.

c) Deduceți că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

d) Calculați $A^n(2)$, $n \in \mathbb{N}^*$. *(Variante Bac, 2000)*

10. Se consideră matricele $A_x = \begin{pmatrix} 2009^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și mulțimea $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Verificați că $I_3 \in G$.

b) Arătați că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup. *(Variante Bac, 2009)*

11. Se consideră mulțimea de matrice $G = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$. Demonstrați că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor și că legea indusă determină pe G o structură de grup comutativ. *(Variante Bac, 1998)*

Scanned with OKEN Scanner

12. Se consideră mulțimea $M=\left\{A_x=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix}\middle| a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$. Demonstrați că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe M și că $(M,\cdot)$ este grup abelian. *(Variante Bac, 1998)*

13. Se consideră mulțimea matricelor pătratice de ordin trei peste $\mathbb{R}$ și submulțimea:

$$G=\left\{A(x)\middle| A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ 2x+2x^2 & 4x & 1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}.$$

a) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ față de operația de înmulțire a matricelor și G, împreună cu legea indusă, formează un grup comutativ. *(Variante Bac, 1999)*

14. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ și submulțimea $G=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})\mid \det A=1 \text{ sau } \det A=-1\}$.

a) Stabiliți dacă $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),\cdot)$ are structură de grup.

b) Arătați că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ față de înmulțirea matricelor.

c) Demonstrați că $(G,\cdot)$ este grup. *(Variante Bac, 1999)*

15. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}a & 2b\\ b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{Z}, a^2-2b^2=1\right\}$.

a) Arătați că $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G$.

b) Demonstrați că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Dacă $A\in G$, arătați că $A^{-1}\in G$.

d) Demonstrați că G, împreună cu legea indusă pe a de înmulțire a matricelor, are o structură de grup.

e) Găsiți o matrice $A=\begin{pmatrix}a & 2b\\ b & a\end{pmatrix}, A\in G$, cu $b\neq 0$.

f) Demonstrați că G are o infinitate de elemente. *(Variante Bac, 2000)*

16. Fie $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $G=\{1,\varepsilon,\varepsilon^2\}\subset\mathbb{C}$. Demonstrați că G este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe și alcătuiți tabla operației induse. Deduceți că $(G,\cdot)$ este grup comutativ. *(Variante Bac, 1998)*

Scanned with OKEN Scanner

17. În mulțimea S_3 a permutărilor de ordin 3 se consideră $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $\tau^2 = e$, $\sigma^3 = e$ și $\sigma\tau = \tau\sigma^2$.

b) Arătați că $S_3 = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$.

c) Alcătuiți tabla operației de compunere pe mulțimea S_3 și deduceți că $(S_3, 0)$ este grup neabelian.

18. Se consideră mulțimea $H = \{-1, i, 1, i\} \subset \mathbb{C}$. Arătați că H este subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

(Variante Bac, 1990)

19. Fie $\sigma, \pi \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\sigma\pi \neq \pi\sigma$.

b) Determinați numărul elementelor mulțimii $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

c) Demonstrați că $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este un subgrup al grupului $(S_5, \circ)$. *(Variante Bac, 2009)*

20. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = A \cdot B$ și mulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \det X = 1\}$.

a) Arătați că $A^4 = B^6 = I_2$.

b) Demonstrați că $(G, \cdot)$ este subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile de ordin doi cu elemente complexe.

c) Arătați că $C^n \neq I_2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. *(Variante Bac, 2009)*

21. Notăm cu $GL_3(\mathbb{R})$ grupul matricelor inversabile de ordin trei cu elemente reale, în raport cu operația de înmulțire. Demonstrați că grupul G de la problema 11 este subgrup al lui $GL_3(\mathbb{R})$, în timp ce grupul M de la problema 12 nu este subgrup al lui $GL_3(\mathbb{R})$.

22. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției P: „$\mathbb{Z}_4 \subset \mathbb{Z}_5$”. *(Variante Bac, 2005)*

23. Determinați subgrupurile grupului $(\mathbb{Z}_4, +)$. *(Variante Bac, 2006)*

24. Câte elemente de ordin 5 are grupul $(\mathbb{Z}_5, +)$? *(Variante Bac, 2004)*

25. Fie $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ și $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ două permutări din grupul $(S_5, \cdot)$.

a) Rezolvați în S_5 ecuația $ax = b$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Determinați ordinul elementului ab în grupul $(S_5, \cdot)$.

c)* Fie $k \in \mathbb{Z}$, cu $b^k = e$. Demonstrați că 6 divide k. *(Variante Bac, 2009)*

26. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $M = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$.

a) Arătați că, dacă $X, Y \in M$, atunci $XY \in M$.

b) Demonstrați că $G = \{X \in M \mid \det X \neq 0\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Determinați elementele de ordin doi din grupul G, definit la punctul b). *(Variante Bac, 2009)*

27. Se consideră mulțimea de funcții $G = \{f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_{a,b}(x) = ax + b, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$.

a) Determinați $f_{-1,2} \circ f_{-1,2}$.

b) Demonstrați că $(G, \circ)$ este grup, unde „$\circ$” este compunerea funcțiilor.

c)* Arătați că grupul $(G, \circ)$ conține o infinitate de elemente de ordin 2. *(Variante Bac, 2009)*

28.* Fie un grup $(G, \cdot)$, cu elementul neutru e, cu proprietatea (p) dacă $x^2 = e$, $\forall\, x \in G$.

a) Verificați că mulțimea $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, împreună cu legea de compoziție dată de legea $(a, b) \cdot (c, d) = (a + c, b + d)$, oricare ar fi $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$, este un grup care are proprietatea (p).

b) Arătați că, dacă un grup are proprietatea (p), atunci $(xy)^2 = x^2y^2$, oricare ar fi $x, y \in G$.

c) Demonstrați că orice grup care are proprietatea (p) este comutativ. *(Variante Bac, 2009)*

29.* Se consideră un grup $K = \{e, a, b, c\}$, cu e elementul neutru și $a^2 = b^2 = c^2 = e$.

a) Rezolvați în K ecuația $x^3 = e$.

b) Arătați că $ab = c$.

c) Demonstrați că grupul $(K, \cdot)$ nu este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_4, +)$. *(Variante Bac, 2009)*

30. Se consideră $\alpha > 0$ un număr real și $G_\alpha = (\alpha, \infty)$. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = 3xy - 6(x + y) + 7\alpha$.

a) Demonstrați că, pentru $\alpha = 2$, cuplul $(G_2, *)$ este grup abelian.

b) Arătați că grupurile $(G_2, *)$ și $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sunt izomorfe, prin funcția $f : G_2 \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 3x - 6$.

c)* Demonstrați că, pentru orice $\alpha \geq 2$, mulțimea G_α este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu $*$.

(Variante Bac, 2009)

31. Se consideră mulțimea $G = (2, \infty)$, pe care definim $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru $x, y \in G$.

a) Arătați că $*$ este lege de compoziție pe G și că $(G, *)$ este grup abelian.

b) Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \to (2, \infty)$, $f(x) = e^x + 2$ este un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(G, *)$.

(Variante Bac, 1998)

32. Considerăm intervalul $G = (-1, 1)$.

a) Dacă $x, y \in G$, arătați că $x * y \in G$, unde $x * y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Demonstrați că $(G, *)$ este grup abelian.

c) Arătați că funcția $f:(0,\infty)\to(-1,1)$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ la grupul $(G,*)$.

(Variante Bac, 1984)

33. Se consideră mulțimea $G=\{A_x \mid x\in\mathbb{Z}\}$, unde $A_x=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{Z}$.

a) Dovediți că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{Z}$.

b) Demonstrați că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Arătați că funcția $f:\mathbb{Z}\to G, f(x)=A_x$ este un izomorfism între grupurile $(\mathbb{Z},+)$ și $(G,\cdot)$.

(Variante Bac, 2009)

34. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}x&iy\\iy&x\end{pmatrix}\middle| x,y\in\mathbb{R} \text{ și } x^2+y^2\neq 0\right\}$.

a) Dovediți că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b) Arătați că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

c) Demonstrați că funcția $f:\mathbb{C}^*\to G, f(x+iy)=\begin{pmatrix}x&iy\\iy&x\end{pmatrix}$ este izomorfism între grupurile $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ și $(G,\cdot)$.

(Variante Bac, 2009)

35. Pe mulțimea $G=\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, definim operația $x*y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y)$, oricare ar fi $x,y\in G$.

a) Demonstrați că $(G,*)$ este grup abelian.

b) Arătați că grupul $(G,*)$ este izomorf cu grupul aditiv $(\mathbb{R},+)$.

(Bacalaureat, 1986)

36. Se consideră mulțimea $G=(0,1)\cup(1,\infty)$ și legea de compoziție $*$ pe G, definită prin $x*y=x^{\ln y}$. Fie $H=\{e^a \mid a\in\mathbb{Q}^*\}$.

a) Arătați că $(G,*)$ este grup abelian.

b) Arătați că $(H,*)$ este subgrup al grupului $(G,*)$.

c) Arătați că funcția $f:G\to\mathbb{R}^*, f(x)=\ln x$, este un izomorfism între grupurile $(G,*)$ și $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

(Bacalaureat, 1996)

37*. Se consideră mulțimea $G=\{f_n:(2,\infty)\to(2,\infty) \mid f_n(x)=2+(x-2)^{2^n}, n\in\mathbb{Z}\}$. Demonstrați că $(G,\circ)$ este grup comutativ (unde $\circ$ desemnează compunerea funcțiilor), iar acest grup este izomorf cu $(\mathbb{Z},+)$.

(Bacalaureat, 1995)

Scanned with OKEN Scanner

4.3. Inele și corpuri

1. Definim pe $\mathbb{Z}$ legile de compoziție $x * y = x + y + 3$ și $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$.

a) Demonstrați că $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este inel comutativ.

b) Verificați dacă inelul are divizori ai lui zero.

c) Determinați elementele inversabile ale acestui inel. *(Variante Bac, 1998)*

2. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și submulțimea sa $B = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \middle| a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Demonstrați că B este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ față de adunarea și înmulțirea matricelor.

b) Demonstrați că $(B, +, \cdot)$ formează o structură de inel comutativ.

c) Arătați că inelul $(B, +, \cdot)$ are divizori ai lui zero. *(Variante Bac, 1999)*

3. Se consideră mulțimea de matrice $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Arătați că, dacă $X \in A$ și $Y \in A$, atunci $X + Y \in A$.

b) Demonstrați că, dacă $X \in A$, $Y \in A$ și $XY = O_2$, atunci $X = O_2$ sau $Y = O_2$.

c) Admitem cunoscut faptul că A este inel în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor. Determinați elementele inversabile ale acestui inel. *(Variante Bac, 2009)*

4. Se consideră mulțimea de matrice $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Arătați că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.

b) Demonstrați că G, împreună cu operațiile induse, formează o structură de inel comutativ, fără divizori ai lui zero. *(Variante Bac, 1998)*

5. Admitem că mulțimea $A = \{f : \{0, 1\} \to \mathbb{R} \mid f \text{ funcție}\}$, înzestrată cu adunarea și înmulțirea funcțiilor, formează un inel. Inelul $(A, +, \cdot)$ are divizori ai lui zero? *(Variante Bac, 1999)*

6*. Fie inelul $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Dați exemplu de număr complex z, astfel încât $z \notin \mathbb{Z}[i]$, dar $z^2 \in \mathbb{Z}[i]$.

b) Determinați elementele inversabile ale inelului $\mathbb{Z}[i]$.

c) Demonstrați că mulțimea $H = \{(m + n) + (m - n)i \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}[i]$ în raport cu înmulțirea. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

7. Se consideră cunoscut că $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este un inel comutativ, unde $x * y = x + y - 3$ și $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12, x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Arătați că elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$" este 4.

b) Determinați $a, b \in \mathbb{Z}$, astfel încât între inelele $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ să existe un izomorfism de forma $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = ax + b$.

c) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de 2009 ori } x} = 2^{2009} + 3$. *(Variante Bac, 2009)*

8*. Se consideră inelele $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ și $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Arătați că, dacă $x \in \mathbb{R}$ și $x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, atunci $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

b) Arătați că $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \mathbb{Z}$.

c) Demonstrați că nu există morfism de inele de la $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ la $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. *(Variante Bac, 2009)*

9. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Pe mulțimea numerelor reale se definesc operațiile $x \perp y = ax + by - 2$, $x \top y = xy - 2x - 2y + c$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Determinați a, b, c pentru care $(\mathbb{R}, \perp, \top)$ este corp.

b) Determinați α, β, astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \alpha x + \beta$ să stabilească un izomorfism între $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, \perp, \top)$. *(Bacalaureat, sesiunea specială, 1988)*

10. Se consideră mulțimea $A = \{f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_{a,b}(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}\}$.

a) Calculați $(f_{1,1} - f_{1,0})(x)$ și $(f_{1,1} \circ f_{0,1})(x), x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $f_{a,b} + f_{c,d} \in A$ și $f_{a,b} \circ f_{c,d} \in A$, oricare ar fi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

c) Știind că adunarea și compunerea funcțiilor determină pe A o structură de inel, demonstrați că $(A, +, \circ)$ nu este corp. *(Simulare Bac, Iași, 2013)*

11. Câte elemente inversabile față de înmulțire are inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$? *(Variante Bac, 2004)*

12. Găsiți probabilitatea ca un element al inelului $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ să fie inversabil. *(Variante Bac, 2004)*

13*. Dați un exemplu de inel finit și necomutativ. *(Bacalaureat, 1990)*

14. Dați un exemplu de inel finit, cu divizori ai lui zero.

15. Calculați:

a) $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5}$ în $(\mathbb{Z}_6, +)$; b) $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \ldots \cdot \hat{6}$ în $(\mathbb{Z}_7, \cdot)$. *(Variante Bac, 2004)*

Scanned with OKEN Scanner

16. a) Verificați că $\hat{a}^3 = \hat{a}$, $\forall\, a \in \mathbb{Z}_6$.

b) Demonstrați că $\hat{a}^{2n} = \hat{a}^2$ și $\hat{a}^{2n+1} = \hat{a}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și $a \in \mathbb{Z}_6$.

c) Calculați $\hat{1}^{2001} + \hat{2}^{2001} + \hat{3}^{2001} + \hat{4}^{2001} + \hat{5}^{2001}$ în inelul $\mathbb{Z}_6$. *(Variante Bac, 2001)*

17. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$. a) Rezolvați ecuația $\hat{2}x + \hat{5} = \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_6$.

b) Calculați determinantul $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$. c) Rezolvați în $\mathbb{Z}_6$ sistemul $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{y} = \hat{4} \\ x + \hat{2}y = \hat{5} \end{cases}$.

(Variante Bac, 2009)

18. Rezolvați în inelul $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ ecuația $\hat{x}^2 = \hat{x}$. *(Variante Bac, 2004)*

19*. Rezolvați ecuația $x^2 - x - \hat{1} = \hat{0}$ în: a) $\mathbb{Z}_5$; b) $\mathbb{Z}_{100}$. *(Bacalaureat, 1994)*

20. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, precum și mulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \mid X^2 = I_2\}$.

a) Verificați că $I_2 \in G$.
b) Arătați că $A \in G$ și $B \in G$.
c) Demonstrați că $AB \notin G$.
d) Găsiți cel mai mic număr natural n, nenul, pentru care $(AB)^n = I_2$. *(Variante Bac, 2002)*

21. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ -\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \middle| \, \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

a) Verificați că $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $T = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ -\hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G$.

b) Arătați că, dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.
c) Determinați numărul de elemente din G.
d) Găsiți cel mai mic număr natural nenul n, pentru care $T^n = I_2$. *(Variante Bac, 2002)*

22. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2 și A^3. b)* Determinați A^{2002} și A^{2003}.

c) Demonstrați că $A^n \neq I_2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. *(Variante Bac, 2002)*

Scanned with OKEN Scanner

23. Fie mulțimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

a) Dați un exemplu de matrice nenulă din mulțimea A care are determinantul egal cu $\hat{0}$.

b)* Arătați că există o matrice nenulă $M\in A$, astfel încât $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}\cdot M=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

c)* Rezolvați ecuația $X^2=\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$. *(Variante Bac, 2009)*

24. Se consideră mulțimea $A=\left\{\begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ b & c & a \end{pmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbb{Z}_2\right\}$.

a) Determinați numărul de elemente din A.

b) Arătați că, pentru orice $X\in A$, $X^2=I_3$ sau $X^2=O_3$.

c) Determinați numărul matricelor X din A care au proprietatea că $X^2=O_3$. *(Variante Bac, 2009)*

25. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ se consideră submulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix}\middle| \hat{x},\hat{y}\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

a) Verificați că $I_2\in G$ și $O_2\in G$.

b) Arătați că, dacă $\hat{x},\hat{y}\in\mathbb{Z}_5$ și $\hat{x}^2-\hat{2}\hat{y}^2=\hat{0}$, atunci $\hat{x}=\hat{y}=\hat{0}$.

c) Dacă $A,B\in G$, atunci $A+B\in G$ și $A\cdot B\in G$.

d) Determinați numărul elementelor lui G.

e) Dacă $A\in G$, $A\neq O_2$, arătați că există $B\in G$, astfel încât $A\cdot B=I_2$.

f) Dați exemplu de structură de corp cu 25 de elemente. *(Variante Bac, 2002)*

26*. Se consideră mulțimile $H=\{a^2\mid a\in\mathbb{Z}_7\}$ și $G=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{Z}_7, a\neq\hat{0} \text{ sau } b\neq\hat{0}\right\}$.

a) Determinați elementele lui H.

b) Fie $x,y\in H$, astfel încât $x+y=\hat{0}$. Arătați că $x=y=\hat{0}$.

c) Demonstrați că G este grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

4.4. Polinoame

1. Determinați polinomul f de gradul trei, cu coeficienți reali, pentru care $f(1+i) = -1+2i$ și $f(i) = 1-i$.

2. Se consideră polinomul $f_n = 1+\frac{X}{1!}+\frac{X(X+1)}{2!}+\ldots+\frac{X(X+1)\ldots(X+n-1)}{n!} \in \mathbb{C}[X], n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați $f_n(0)$ și $f_n(-1)$.

b) Demonstrați că $f_n = \frac{1}{n!}(X+1)(X+2)\ldots(X+n)$. *(Variante Bac, 2007)*

3. Considerăm polinomul $f = (X+1)^{10} + (X-1)^{10}$, cu forma algebrică $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_{10}X^{10}$.

a) Determinați suma coeficienților polinomului f.

b) Calculați $f(i)$.

c) Arătați că $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{10} = \frac{1}{2}[f(1)+f(-1)]$.

d) Calculați suma $a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9$. *(Variante Bac, 2002)*

4. Determinați polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ cu $\text{grad}(f) = 1$, $\text{grad}(g) = 2$, în fiecare din următoarele cazuri:

a) $f \cdot g = X^3 - X^2 - 5X + 2$; b) $g(f(X)) = X^2$.

5. Arătați că polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$ este element inversabil în inelul $(\mathbb{C}[X], +, \cdot)$ dacă și numai dacă f este constantă nenulă.

6. Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f prin polinomul g în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $f = X^5 + 2X^3 - 3X + 2, g = X^2 + X + 1, f, g \in \mathbb{R}[X]$;

b) $f = X^4 - (2+i)X^2 + X - i, g = X + i, f, g \in \mathbb{C}[X]$;

c) $f = X^3 + X^2 + X + \hat{2}, g = X + \hat{1}, f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$.

7. Determinați numerele reale a și b, știind că polinomul $f = X^3 + aX + b$ dă restul 2 la împărțirea prin $X-1$ și restul -4 la împărțirea prin $X+1$.

8. Împărțind polinomul f prin $X-1$ obținem restul 2, iar la împărțirea prin $X+1$ obținem restul -4. Aflați restul împărțirii lui f prin X^2-1.

9. Se consideră polinomul $f = (1+X+X^2)^{1004}$, cu forma algebrică $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_{2008}X^{2008}$.

a) Calculați $f(-1)$.

b) Arătați că $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2008}$ este număr întreg impar.

c) Determinați restul împărțirii polinomului f la X^2-1. *(Variante Bac, 2009)*

10. Determinați polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ care prin împărțire la $X^2 - 3X + 1$, dă restul, $2X+1$, iar prin împărțire la X^2-1 dă restul $-2X+2$. *(Variante Bac, 1999)*

11. Se consideră polinomul $f = X^{99} + X^{66} + X^{33} + 1$. Determinați restul împărțirii lui f prin $g = X(X^2-1)$.

Scanned with OKEN Scanner

12°. Împărțind polinomul f prin $(X+1)^2$ se obține restul $2X+1$. Aflați restul împărțirii lui f prin $(X-1)(X+1)^2$, știind că f se divide cu $X-1$.

13. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^{30} - 3X^{20} + aX^{10} + 3X^5 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$.

a) Arătați că restul împărțirii polinomului f la $X+1$ nu depinde de a.

b) Determinați a și b, astfel încât restul împărțirii polinomului f la $X^2 - X$ să fie X.

c) Determinați a și b, astfel încât f să fie divizibil cu $(X-1)^2$. *(Variante Bac, 2009)*

14. Determinați numerele reale a, b, astfel încât polinomul $f = aX^4 + bX^3 - 3$ să fie divizibil cu $(X-1)^2$. *(Variante Bac, 1998)*

15. Se consideră polinomul $f = X^3 + 4X^2 - 20X - 48$.

a) Calculați $f(-2)$.

b) Rezolvați ecuația $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{C}$.

c) Rezolvați ecuația $8^x + 4 \cdot 4^x - 20 \cdot 2^x - 48 = 0$. *(Variante Bac, 2001)*

16. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = 2X^3 - 7X^2 + 7X - 2$.

a) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X-1$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $f(x) = 0$.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2 \cdot 8^x - 7 \cdot 4^x + 7 \cdot 2^x - 2 = 0$.

d) Rezolvați ecuația $2 \cdot (\log_4 x)^3 - 7 \cdot (\log_4 x)^2 + 7 \cdot (\log_4 x) - 2 = 0$, $x > 0$. *(Variante Bac, 2002)*

17. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^4 + aX^3 - 28X^2 + bX + 96$.

a) Găsiți forma algebrică a polinomului $h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4)$.

b) Determinați numerele reale a și b, astfel încât polinoamele f și h să fie egale.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $16^x + 2 \cdot 8^x - 28 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 96 = 0$. *(Variante Bac, 2009)*

18. Se consideră polinomul $f = X^4 - 6X^3 + 18X^2 - 30X + 25 \in \mathbb{C}[X]$.

a) Justificați că f se divide cu $X^2 - 2X + 5$.

b) Arătați că f nu are rădăcini reale.

c) Demonstrați că toate rădăcinile polinomului f au același modul. *(Variante Bac, 2009)*

19. Considerăm polinomul $f = X^4 - 2X^3 + X^2 - 4 \in \mathbb{R}[X]$.

a) Arătați că restul împărțirii polinomului f la $X-1$ este -4.

b) Calculați câtul împărțirii polinomului f la polinomul $(X-1)^2$.

c) Arătați că polinomul f are exact două rădăcini reale. *(Simulare Bac, București, 2013)*

20. Se consideră familia de polinoame $f_m = X(X+1)(X+2)(X+3) + 1 - m$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Verificați egalitatea $f_m - (X^2 + 3X + 1)^2 = -m$.

b) Rezolvați ecuația $f_1(x) = 0$.

c) Determinați m, astfel încât ecuația $f_m(x) = 0$ să aibă toate soluțiile reale.

Scanned with OKEN Scanner

21*. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^4 - 6X^3 + 13X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$. Determinați a, b, astfel încât f să aibă două rădăcini duble. *(Variante Bac, 2009)*

22. Demonstrați că polinomul $f = X^{999} + X^{333} + X^2 + X - 1$ se divide cu $g = X^2 + X + 1$.

23. Se consideră polinomul $f = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Calculați $f(1)$ și $f(-1)$.

b) Determinați $a \in \mathbb{C}$, astfel încât $f(X) = a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$.

c) Arătați că $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) = 1$.

d) Demonstrați că $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4) = 5$. *(Variante Bac, 2002)*

24. Se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$, și $g = X^3 + X^2 + X + 1$, cu rădăcinile $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{C}$.

a) Determinați câtul și restul împărțirii lui f la g.

b) Aflați y_1, y_2, y_3.

c) Calculați $a = y_1^{2002} + y_2^{2002} + y_3^{2002}$.

d) Arătați că $b = g(x_1)g(x_2)g(x_3)g(x_4)$ este număr natural.

e) Demonstrați că $f(y_1) + f(y_2) + f(y_3) = 3$. *(Variante Bac, 2002)*

25*. Știind că g este un polinom cu coeficienți întregi, astfel încât $g(-2) = g(-1) = g(1) = g(2) = 2$, demonstrați că ecuația $g(x) = 0$ nu are soluții întregi. *(Variante Bac, 2009)*

26*. Demonstrați că, dacă a, b, c sunt trei numere reale, astfel încât $a + b + c < 0$, $ab + ac + bc > 0$ și $abc < 0$, atunci $a, b, c \in (-\infty, 0)$. *(Variante Bac, 2009)*

27. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -2 \end{cases}$.

a) Aflați $x_1x_2x_3$.

b) Determinați a, b, c, știind că ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ are soluțiile x_1, x_2, x_3.

c) Determinați x_1, x_2, x_3. *(Variante Bac, 2009)*

28. Se notează cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 + 8x^2 - 8 = 0$ și fie $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

a) Calculați S_1, S_2, S_3.

b) Demonstrați că $S_n \in \mathbb{Z}$, oricare ar fi $n \geq 1$. *(Variante Bac, 2000)*

29. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX + a + 2$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați numărul a și rădăcinile polinomului, știind că acestea sunt în progresie aritmetică.

30. Se consideră polinomul $g \in \mathbb{R}[X]$, $g = X^3 - 3X^2 - 6X + c$. Determinați $c \in \mathbb{R}$, astfel încât rădăcinile polinomului g să fie în progresie geometrică. *(Variante Bac, 1999)*

Scanned with OKEN Scanner

31. Considerăm ecuația $x^3 - x + a = 0$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.
a) Calculați $(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)$.
b) Calculați x_2 și x_3, dacă $x_1 = 2$.
c) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care x_1, x_2, x_3 sunt numere întregi. *(Variante Bac, 2009)*

32. Se consideră polinomul $f = X^4 - 2X^3 + 5X^2 - X - 1$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3, x_4. Calculați:
a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$; b) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$.

33. Se consideră polinomul $f = X^4 - (a-1)X^3 - 10X^2 + (a-1)X + 9$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați numărul a și aflați rădăcinile polinomului, știind că acestea formează o progresie aritmetică. *(Bacalaureat, 1997)*

34. Rezolvați ecuația $6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6 = 0$. *(Variante Bac, 1998)*

35. Se consideră ecuațiile (i) $z^3 - 3iz^2 - 3z + 8 + i = 0$ și (ii) $z^3 + 8 = 0$, $z \in \mathbb{C}$.
a) Arătați că z_0 este soluție a ecuației (i) dacă și numai dacă $z_0 - i$ este soluție a ecuației (ii).
b) Rezolvați ecuațiile date. *(Variante Bac, 1998)*

36. Rezolvați ecuația $z^3 - (2\sqrt{3} + 3i)z^2 + (1 + 4\sqrt{3}i)z - 3i - 6\sqrt{3} = 0$, știind că admite soluții de forma bi, $b \in \mathbb{R}$. *(Bacalaureat, 1998)*

37. Se consideră ecuația $5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$.
a) Determinați soluțiile raționale ale ecuației.
b) Rezolvați ecuația în mulțimea numerelor complexe. *(Variante Bac, 1999)*

38. Considerăm ecuația $x^4 + x^3 + x^2 - x - 2 = 0$.
a) Determinați soluțiile raționale ale ecuației.
b) Rezolvați ecuația în mulțimea numerelor complexe. *(Variante Bac, 1999)*

39. Se consideră polinomul cu coeficienții reali $f = X^4 + aX^3 + bx + c$.
a) Determinați coeficienții a, b, c și rădăcinile polinomului f, știind că $f(0) = f(1)$ și una dintre rădăcini este $x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.
b) Demonstrați că, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}^*$, există $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât f să se dividă prin $g = (X^2 - 1)(X - t)$. *(Bacalaureat, 1983)*

40. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + 1$. Determinați numerele raționale a și b și rădăcinile polinomului f, știind că una dintre rădăcini este $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. *(Bacalaureat, 1981)*

41. Se consideră ecuația cu coeficienți reali $x^4 - 7x^3 + 21x^2 + ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă $x_1 = 1 + 2i$ este o soluție a ecuației, determinați parametrii a, b și rezolvați ecuația. *(Variante Bac, 1999)*

42. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^4 - 4X^3 + 6X^2 + aX + b$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3, x_4.
a) Determinați a și b, știind că f are rădăcina i.

Scanned with OKEN Scanner

b) Calculați $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2+(x_4-1)^2$.

c) Aflați a și b, știind că toate rădăcinile lui f sunt reale. *(Variante Bac, 2009)*

43. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f=X^4+2X^3+aX^2+bX+c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Determinați, în funcție de coeficienți, suma pătratelor rădăcinilor polinomului.

b) Pentru $a=3$ și $b, c \in \mathbb{R}$, arătați că polinomul f nu poate avea toate rădăcinile reale.

c) Aflați $a, b, c \in \mathbb{Q}$, știind că restul împărțirii lui f la $X-1$ este 3 și f are rădăcina $-1+\sqrt{2}$.

Pentru a, b, c determinați, rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $f(x)=0$. *(Variante Bac, 1999)*

44. Se consideră $a, b, c \in \mathbb{Q}$ și polinomul $f=X^3+aX^2+bX+c$.

a) Determinați a, b, c, astfel încât $x_1=x_2=1$ și $x_3=-2$.

b) Arătați că, dacă f are rădăcina $\sqrt{2}$, atunci are o rădăcină rațională.

c)* Demonstrați că, dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, iar numerele $f(0)$ și $f(1)$ sunt impare, atunci f nu are rădăcini întregi. *(Variante Bac, 2009)*

45. Se consideră polinomul $p=X^4-aX^3-aX+1$, cu $a \in \mathbb{R}$ și cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Verificați că $x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$.

b) Arătați că polinomul p nu se divide cu X^2-1 pentru nicio valoare a lui a.

c)* Demonstrați că, pentru $a=\frac{1}{2}$, toate rădăcinile lui p au modulul egal cu 1. *(Variante Bac, 2009)*

46. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3-X-1$, unde $a \in \mathbb{Z}$.

a) Determinați a, știind că $x=1$ este rădăcină a polinomului f.

b) Pentru $a=1$, aflați toate rădăcinile reale ale polinomului.

c) Demonstrați că $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. *(Variante Bac, 2009)*

47. Se consideră polinomul $f=X^5-X^4+3X^3-X^2-2 \in \mathbb{C}[X]$.

a) Determinați o rădăcină întreagă a polinomului f.

b) Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2$, unde x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sunt rădăcinile lui f.

c)* Demonstrați că f are o singură rădăcină reală. *(Variante Bac, 2009)*

48. Se consideră $a, b \in \mathbb{Z}$ și polinomul $p=X^3+aX^2+X+b$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Știind că $a=b=1$, aflați rădăcinile lui p.

b) Determinați a, b, știind că polinomul p are rădăcină dublă 1.

c) În cazul $b=1$, găsiți valorile lui a pentru care p are o rădăcină rațională. *(Variante Bac, 2009)*

49. Considerăm polinomul $f=X^4+1$.

a) Arătați că $f=(X^2+X\sqrt{2}+1)(X^2-X\sqrt{2}+1)$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Demonstrați că f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$. *(Variante Bac, 2002)*

50. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, se definește polinomul $P_n(X) = X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

a) Determinați rădăcinile complexe ale polinomului P_4.

b) Descompuneți polinomul P_3 în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$.

c) Descompuneți polinomul P_6 în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$. *(Variante Bac, 2009)*

51. Se consideră polinomul $f = X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 5$.

a) Verificați că $f = (X-1)^2(X-2)^2 + 1$.

b) Arătați că f nu are rădăcini reale.

c) Arătați că f nu poate fi descompus în produs de polinoame cu coeficienți întregi. *(Bac, 2001)*

52. Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_0 = 0$ și $a_{n+1} = a_n^2 + 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, și polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, cu $f(0) = 0$ și cu proprietatea $f(x^2 + 1) = f^2(x) + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $f(5)$.

b) Demonstrați că $f(a_n) = a_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

c) Deduceți că $f = X$. *(Variante Bac, 2009)*

53. Se consideră polinomul $f = X^4 - 14X^2 + 9$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$, elementul $a = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ și mulțimile $A = \{g(a) \mid g \in \mathbb{Z}[X]\}$, $B = \{g(a) \mid g \in \mathbb{Z}[X], \text{grad } g \leq 3\}$.

a) Calculați $f(a)$.

b) Determinați x_1, x_2, x_3, x_4.

c) Calculați suma $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ și produsul $P = x_1x_2x_3x_4$.

d) Determinați mulțimea $A \setminus B$. *(Variante Bac, 2003)*

54. Se consideră polinoamele $f = X^5 - 1$ și $g = X^2 + pX + q$, unde $p, q \in \mathbb{Q}$. Știind că cele două polinoame au o rădăcină rațională comună, determinați cel mai mare divizor comun al lor. *(Simulare Bac, Iași, 2013)*

55. Se consideră polinomul $f = \hat{2}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_4[X]$.

a) Determinați gradul lui f^2.

b) Arătați că f este element inversabil în inelul $(\mathbb{Z}_4[X], +, \cdot)$.

c) Determinați toate polinoamele $g \in \mathbb{Z}_4[X]$, de gradul 1, cu proprietatea că $g^2 = \hat{1}$. *(Variante Bac, 2009)*

56. Fie polinoamele $f = X^3 + aX^2 + X + \hat{1}$ și $g = X + \hat{3}$, cu coeficienți din inelul $\mathbb{Z}_5[X]$.

a) Determinați $a \in \mathbb{Z}_5$, astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

b) Pentru $a = \hat{1}$, arătați că $f = (X + \hat{1})(X^2 + \hat{1})$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Pentru $a = \hat{1}$, rezolvați în $\mathbb{Z}_5$ ecuația $f(x) = \hat{0}$. *(Variante Bac, 2009)*

57. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{Z}_6[X], f = X^3 + (\hat{2}a + \hat{1})X + a + \hat{4}$.

a) Arătați că $b^3 = b$, oricare ar fi $b \in \mathbb{Z}_6$.

b) Determinați $a \in \mathbb{Z}_6$, știind că $f(\hat{2}) = \hat{0}$.

c) Pentru $a = \hat{2}$, aflați rădăcinile polinomului f în $\mathbb{Z}_6$. *(Variante Bac, 2009)*

58*. Se consideră $a \in \mathbb{Z}_7$ și polinomul $f = X^6 + aX + \hat{5} \in \mathbb{Z}_7[X]$.

a) Verificați că, pentru orice $b \in \mathbb{Z}_7$, $b \neq 0$, are loc relația $b^6 = \hat{1}$.

b) Arătați că $X^6 + \hat{5} = (X^3 - \hat{4})(X^3 + \hat{4})$.

c) Demonstrați că, pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$, polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$. *(Variante Bac, 2009)*

59*. Aflați numărul polinoamelor $f \in \mathbb{Z}_3[X]$ care au gradul egal cu trei și pentru care $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = f(\hat{2})$.

60. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ și polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_3[X], f = X^3 - X, g = X^3 + \hat{2}X + \hat{2}$.

a) Determinați rădăcinile din $\mathbb{Z}_3$ ale polinomului f.

b) Arătați că polinomul g este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

c) Determinați toate polinoamele $h \in \mathbb{Z}_3[X]$ de gradul trei, astfel încât $h(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}_3$. *(Variante Bac, 2009)*

61. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X], f = (a^2 + a + \hat{1})X^3 + (a + \hat{2})X + a$.

a) Discutați, în raport cu $a \in \mathbb{Z}_3$, gradul lui f.

b) Pentru $a = \hat{2}$, descompuneți f în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_3$. *(Variante Bac, 1998)*

62. Se consideră polinomul $f = X^3 + \hat{2}X^2 + a \in \mathbb{Z}_3[X]$.

a) Calculați $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2})$.

b) Pentru $a = \hat{2}$, determinați rădăcinile din $\mathbb{Z}_3$ ale lui f.

c) Găsiți elementele $a \in \mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$. *(Variante Bac, 2009)*

63. Se consideră funcția $f: \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5, f(x) = x^4 + \hat{4}x$.

a) Calculați $f(\hat{0})$ și $f(\hat{1})$.

b) Demonstrați că f nu este surjectivă.

c) Descompuneți polinomul $X^4 + \hat{4}X \in \mathbb{Z}_5[X]$ în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

4.5. Probleme de sinteză – algebră

1. Se consideră mulțimea $H = (0, 1)$.

a) Demonstrați că $a \circ b = \dfrac{ab}{ab + (1-a)(1-b)}$ definește o lege de compoziție internă pe H.

b) Arătați că funcția $f: (0, \infty) \to (0, 1), f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, are proprietatea că $f(xy) = f(x) \circ f(y)$, oricare ar fi $x, y > 0$.

c) Știind că legea $\circ$ definită la punctul a) este asociativă, rezolvați în H ecuația $x \circ x \circ x = \dfrac{1}{2}$.

(Variante Bac, 2009)

2*. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $x * y = x + y - xy$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $(\mathbb{R}, *)$ este un monoid izomorf cu monoidul multiplicativ $(\mathbb{R}, \cdot)$.

b) Există o lege de compoziție $\circ$ pe $\mathbb{R}$, astfel încât $(\mathbb{R}, \circ, *)$ să fie corp?

(Bacalaureat, sesiunea specială, 1994)

3. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ se consideră submulțimea $G = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5) \middle| X = \begin{pmatrix} a & b \\ \hat{2}b & a \end{pmatrix} \right\}$ și matricele

$I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

a) Verificați că $I_2 \in G$ și $O_2 \in G$.

b) Arătați că $A + B \in G, \forall A, B \in G$.

c) Demonstrați că $(G, +)$ este grup comutativ. *(Variante Bac, 2009)*

4. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Pentru fiecare $a \in G$, se definește funcția $f_a: G \to G, f_a(x) = ax, x \in G$.

a) Demonstrați că f_a este bijectivă, pentru orice $a \in G$.

b) Arătați că $f_a \circ f_b = f_{ab}$, oricare ar fi $a, b \in G$.

c)* Fie $\mathcal{F}(G) = \{f_a : G \to G, a \in G\}$. Demonstrați că $\mathcal{F}(G)$ împreună cu operația de compunere a funcțiilor formează un grup. *(Variante Bac, 2009)*

5*. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție și mulțimea $H = \{T \in \mathbb{R} \mid f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$.

a) Dacă $T \in H$, arătați că $-T \in H$.

b) Demonstrați că H este subgrup al grupului $(\mathbb{R}, +)$.

c) Determinați mulțimea H pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \{x\}$. *(Variante Bac, 2009)*

6. Se știe că $(G, \circ)$ este grup, unde $G = (3, \infty)$ și $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3, \forall x, y \in G$. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to G, f(x) = x + 3$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Calculați $4 \circ 5 \circ 6$.

b) Demonstrați că f este izomorfism de grupuri între $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ și $(G, \circ)$.

c) Dacă H este subgrup al lui G care conține toate numerele naturale $k \geq 4$, atunci H conține toate numerele raționale $q > 3$. *(Variante Bac, 2009)*

7. Pentru fiecare $t, n \in \mathbb{Z}$, se consideră $A(n) = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}$ și mulțimile $G = \{A(k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $H_t = A(kt-1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Se admite faptul că $(G, \cdot)$ este grup, unde „$\cdot$” este înmulțirea matricelor.

a) Arătați că $A(n)\,A(p) = A(n+p+1)$, $\forall\, n, p \in \mathbb{Z}$.

b) Demonstrați că H_t este subgrup al grupului $(G, \cdot)$ pentru orice $t \in \mathbb{Z}$.

c) Demonstrați că grupurile $(G, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}, +)$ sunt izomorfe. *(Variante Bac, 2009)*

8. Se consideră inelul $\mathbb{Z}_6$ și funcția $f: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $f(\hat{x}) = \hat{x}^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Verificați că $\hat{a}^3 = \hat{a}, \forall\, \hat{a} \in \mathbb{Z}_6$.

b) Demonstrați că $(\hat{x} + \hat{y})^3 = \hat{x}^3 + \hat{y}^3, \forall\, \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_6$.

c) Determinați cel mai mic număr natural $n \geq 2$ pentru care f este izomorfism de inele.

9. Se consideră mulțimea de numere complexe $G = \{\cos q\pi + i \sin q\pi \mid q \in \mathbb{Q}\}$.

a) Arătați că $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \in G$.

b) Demonstrați că G este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

c) Arătați că polinomul $f = X^6 - 1 \in \mathbb{C}[X]$ are toate rădăcinile în G. *(Variante Bac, 2009)*

10. Se consideră $a \in \mathbb{C}$, x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 - 2x^2 + 2x - a = 0$ și determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}.$$

a) Pentru $a = 1$, rezolvați ecuația în $\mathbb{C}$.

b) Arătați că ecuația are o singură soluție reală, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

c) Demonstrați că valoarea determinantului Δ nu depinde de a. *(Variante Bac, 2009)*

11. Se consideră $a, b, c \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|x_1| \leq 1$, $|x_2| \leq 1$, $|x_3| \leq 1$.

a) Demonstrați că $|a| \leq 3$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă $c < 0$, arătați că polinomul are cel puțin o rădăcină reală în intervalul $(0, \infty)$.

c) Dacă $a = 1$, $c = -1$, arătați că $b = -1$. *(Variante Bac, 2008)*

12. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f(x) = X^4 - 5X^2 + 5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Calculați $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

b) Arătați că toate rădăcinile lui f sunt numere reale.

c)* Dacă g este polinom cu coeficienți reali astfel încât $|(g(x)| \leq |f(x)|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, demonstrați că există $a \in [-1, 1]$ pentru care $g = af$. *(Variante Bac, 2008)*

13. Se consideră polinomul $f = X^3 - 1$ și numărul $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $f(\varepsilon) = 0$.

a) Arătați că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

b) Rezolvați în $\mathbb{C}$ sistemul $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = 0 \\ x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z = 0 \end{cases}$.

c)* Dacă f divide $f_1(X^3) + Xf_2(X^3) + X^2 f_3(X^3)$, unde $f_1 f_2 f_3 \in \mathbb{C}[X]$, atunci fiecare dintre polinoamele f_1, f_2, f_3 este divizibil cu $X - 1$. *(Variante Bac, 2008)*

14. Se consideră șirul $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall\, n \geq 1$ și polinoamele P, $Q_n \in$ $\in \mathbb{Z}[X]$, $P = X^2 - X - 1$, $Q_n = X^n - F_n X - F_{n-1}$, $\forall\, n \geq 2$.

a) Arătați că polinomul $X^3 - 2X - 1$ este divizibil cu P.

b) Determinați rădăcinile reale ale polinomului Q_3.

c)* Demonstrați că polinomul Q_n este divizibil cu P, oricare ar fi $n \geq 2$. *(Variante Bac, 2008)*

15. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Notăm: $S_k = x_1^k +$ $+ x_2^k + x_3^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, $S_0 = 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$ și $\Delta = \det(A \cdot A^t)$, unde A^t este transpusa matricei A.

a) Arătați că $S_{n+3} + aS_{n+1} + bS_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

b) Demonstrați că $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{pmatrix}$ și deduceți că $\Delta = -4a^3 - 27b^2$.

c)* Demonstrați că x_1, x_2, x_3 sunt numere reale dacă și numai dacă $\Delta \geq 0$. *(Variante Bac, 2004)*

Scanned with OKEN Scanner

4.6. Primitive

1. Considerăm funcția $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}$. Determinați funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, astfel încât F să fie o primitivă a funcției f. *(Variante Bac, 2009)*

2. Determinați funcția a cărei primitivă este $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$. *(Variante Bac, 1998)*

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}$. Demonstrați că f admite o primitivă de forma $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{ax+b}{x^2+x+1}$, $a,b\in\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 1998)*

4. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Arătați că funcția $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$ este o primitivă a funcției f.

b) Demonstrați că orice primitivă G a funcției f este crescătoare pe $[1,\infty)$. *(Variante Bac, 2009)*

5. Se dă funcția $f:\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{3-2x}$. Determinați numerele reale a, b, c, astfel încât $F:\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{3-2x}$ să fie primitivă a lui f. *(Variante Bac, 1999)*

6. Precizați dacă există numere reale a și b, astfel încât funcția $F(x)=\left(\frac{a}{x}+b\right)e^{\frac{-2}{x}}$ să fie primitivă a funcției $f(x)=\frac{1}{x^3}e^{\frac{-2}{x}}$ pe $(0,\infty)$. *(Variante Bac, 1999)*

7. Determinați primitivele funcțiilor f de mai jos, știind că au o primitivă F de forma indicată:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x}$, $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-3x}\sin 2x$, $F(x)=e^{-3x}(a\sin 2x+b\cos 2x)$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4}$, $F(x)=(ax+b)\sqrt{x^2+4}+c\ln(x+\sqrt{x^2+4})$;

d) $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $F(x)=(ax+b)\sqrt{4-x^2}+c\cdot\arcsin\frac{x}{2}$.

8. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ și funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}ax+b, & x<1\\ \ln^2 x+1, & x\geq 1\end{cases}$. Determinați a și b, astfel încât F să fie primitiva unei funcții f. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

9. Se consideră funcțiile $f, F:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)^2\ln(x+1)$ și

$F(x)=\frac{(x+1)^3}{3}\ln(x+1)-\frac{(x+1)^3}{9}+\frac{1}{9}$.

a) Arătați că F este primitivă a funcției f.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^2}$. *(Variante Bac, 2000)*

10. Se consideră funcțiile $f, F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)e^x$ și $F(x)=(x-2)e^x+e$.

a) Demonstrați că F este primitivă a funcției f.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\frac{F(x)}{(x-1)^2}$. c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)}{xe^x}$. *(Variante Bac, 2000)*

11. Se consideră $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.

a) Găsiți $a, b, c\in\mathbb{R}$, astfel încât $f(x)=ax+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$, $\forall x>-1$.

b) Determinați primitivele funcției f pe $(-1,\infty)$.

c) Aflați primitiva care se anulează în zero. *(Variante Bac, 1999)*

12. Se consideră funcția $f:(-\infty,3)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2}{2}-3x+\frac{2}{(x-3)^3}$.

a) Determinați primitivele lui f.

b) Precizați primitiva F care verifică $F(-1)=0$. *(Variante Bac, 1999)*

13. Determinați primitivele funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(2x+1)^2-\frac{1}{x^2+9}$;

b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-x+1}{4\sqrt{x}}-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}$;

c) $f:(0,1)\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2-5x+\frac{1}{x}-x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

d) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x(x^2-4)+\frac{1}{x}-2^x$;

e) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=-3x^4+\frac{2}{x}-\sqrt{x}+3\sin x+\frac{1}{x^2+1}$. *(Variante Bac, 1998)*

14. Determinați primitivele funcțiilor: a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)^4-(x-1)^4$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(2x-3)^5$; c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x(x-1)^4$. *(Variante Bac, 2007)*

Scanned with OKEN Scanner

15. Determinați primitivele funcțiilor: a) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{-x^2+3x-2}{x^2}$;

b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{(x-2)(2x+1)}{x}$; c) $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{3x^2-6x+5}{(x-1)^2}$. *(Bacalaureat, 1999)*

16. Determinați primitivele funcțiilor:

a) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3-3x+4}{x^2}$; b) $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3+x+1}{x^2+1}$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{x^2+1}$. *(Variante Bac, 2000)*

17. Calculați:

a) $\int\frac{2x+1}{x^2+1}dx, x\in\mathbb{R}$; b) $\int\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}dx, x>0$. *(Variante Bac, 2001)*

18. Determinați primitivele funcțiilor: a) $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3}{x+1}$;

b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x(x^2+1)}$; c) $f:(-3,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-3x}{(x+3)^2}$. *(Variante Bac, 1998)*

19. Determinați primitivele funcțiilor:

a) $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+4x+5}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+2}{x^2+2x+2}$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$;

e) $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^4+1}{x^3+1}$. *(Variante Bac, 1998)*

20. Determinați primitivele funcțiilor:

a) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+\ln x$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)e^{-x}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(3x^2-2x-5)$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg} x$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln^2 x$; f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\cos x$. *(Variante Bac, 1998)*

21. Determinați primitivele următoarelor funcții: a) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2}{e^x}$; c) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\operatorname{arctg} x$.

22. Determinați primitivele funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{2x}\sin x$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{3x}\cos 2x$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+1}$; d) $f:(-2,2)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

23. Determinați primitivele funcțiilor:

a) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{x^2+1}$;

c) $f:(-3,3)\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{9-x^2}$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin^3 x\cos x$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x(x^2+1)^{2001}$.

24. Determinați primitivele funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\operatorname{arctg} x$; b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

c)* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$; d)* $f:(0,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\arcsin x}{x^2}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

25. Determinați primitivele următoarelor funcții:

a) $f:(4,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{4x-10}{x^2-5x+4}$; b) $f:(e^4,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{4\ln x-10}{\ln^2 x-5\ln x+4}\cdot\dfrac{1}{x}$.

(Variante Bac, 1999)

26. Determinați primitivele funcției $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$. Aflați primitiva F cu proprietatea că $F(e^{e-1})=2$. *(Variante Bac, 2008)*

27. Se consideră funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)^2\ln(x+1)$.

a) Determinați primitiva $F:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f, pentru care $F(1)=0$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(x)}{x-1}$, unde F este primitiva de la punctul a). *(Variante Bac, 2000)*

28. Se consideră funcțiile $f, F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-x\ln x$. Știind că F este o primitivă a funcției f:

a) arătați că $f(x)=x-\ln x, x\in(0,\infty)$;

b) determinați o primitivă a funcției $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)\cdot F(x)$. *(Variante Bac, 2009)*

29. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}xe^x, x\le 1\\ 2ex-e, x>1\end{cases}$. Demonstrați că f are primitive și determinați o primitivă a sa. *(Variante Bac, 1998)*

Scanned with OKEN Scanner

30. Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} xe^x, x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1}, x>0 \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$. Determinați o astfel de primitivă. *(Variante Bac, 1998)*

4.7. Formula lui Leibniz–Newton

1. Determinați $a\in\mathbb{R}$, dacă $\int_1^a (a-4x)\,dx = 6-5a$. *(Variante Bac, 1999)*

2. Determinați $a>0$, dacă $\int_0^a (2-4x+3x^2)\,dx = a$. *(Variante Bac, 1998)*

3. Considerăm integrala $I=\int_1^2 (m^2+(4-4m)x+4x^3)\,dx$, $m\in\mathbb{R}$.

a) Calculați I în funcție de m.

b) Determinați m, dacă $I\le 12$. *(Variante Bac, 1999)*

4. Determinați $x\in\mathbb{R}$, astfel încât $\int_0^x e^t(2e^t-3)\,dt = 0$. *(Variante Bac, 1998)*

5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a\cos\frac{x}{3}+b\sin\frac{x}{3}$, $a, b\in\mathbb{R}$. Determinați a, b, astfel încât $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=0$ și $\int_0^{\pi} f(x)\,dx=3$. *(Variante Bac, 1999)*

6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x+1$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\int_0^n f(x)\,dx$. *(Variante Bac, 2002)*

7. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+4x-3$. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}\int_x^{x+1} f(t)\,dt$. *(Variante Bac, 2001)*

8. Se consideră $I(t)=\int_0^t (\cos x+2\sin x)\,dx$, $t>0$.

a) Determinați $I(t)$. b) Calculați $\lim\limits_{t\to 0}\frac{I(t)}{t}$. *(Variante Bac, 2000)*

9. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2002x^{2001}}{x^{2002}+1}$.

a) Verificați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\ln(x^{2002}+1)$ este o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

b) Calculați $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. *(Variante Bac, 2002)*

10. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$.

a) Verificați că $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=e^x\sin x$ este o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Calculaţi $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. *(Variante Bac, 2002)*

11. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

a) Arătaţi că $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $x\in\mathbb{R}$, este o primitivă a funcţiei f.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f(x)\,dx$, $n\in\mathbb{N}^*$. *(Variante Bac, 2009)*

12. Calculaţi:

a) $\int_{-1}^{1}(x+1)^{2002}\,dx$; b) $\int_0^1((x+1)^5-(x-1)^5)\,dx$. *(Variante Bac, 2002)*

13. Calculaţi $\int_1^2 \dfrac{4x+4}{x^2(x+2)^2}dx$. *(Variante Bac, 2005)*

14. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^{2002}+x+1$. Calculaţi:

a) $\int_0^1 f(x)\,dx$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^{2003}}\int_0^x f(t)\,dt$. *(Variante Bac, 2002)*

15. Calculaţi $\int_0^1(2002^x+2002^{-x})\,dx$. *(Variante Bac, 2002)*

16. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(2^x+3^x)(2^{-x}+3^{-x})$. Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{f(x)}\int_0^x f(t)\,dt$.

(Variante Bac, 2009)

17. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x+1}{x+2}$. Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x f(t)\,dt$. *(Variante Bac, 2001)*

18. Calculaţi: a) $\int_0^1 \dfrac{x+1}{x^2+1}dx$; b) $\int_0^1 \dfrac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+3}dx$.

19. Calculaţi:

a) $I_1=\int_0^1 \dfrac{1}{x^2+2x+2}dx$; b) $I_2=\int_0^1 \dfrac{x}{x^2+2x+2}dx$.

20. Calculaţi $\int_0^1 \dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)}dx$. *(Variante Bac, 2009)*

21. Se consideră integralele $I_n=\int_2^3 \dfrac{x^n}{x^2-1}dx$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Calculaţi I_0 şi I_1.

b) Demonstraţi că $I_{n+2}-I_n=\dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. *(Variante Bac, 2009)*

22. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $I_0(x)=1$, $I_{n+1}(x)=\int_0^x I_n(t)\,dt$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Determinați $I_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $I_{10}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2004)*

23. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Calculați:

a) $\int_2^3 \frac{f(x)}{x-1} dx$; b) $\int_{-1}^0 \frac{x^2+4}{f(x)} dx$. *(Variante Bac, 2009)*

24. Se consideră $f: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-3x+2}$.

a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ să avem $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$.

b) Găsiți primitivele lui f pe $(2, \infty)$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_3^n f(x)\,dx$. *(Variante Bac, 2001)*

25. Considerăm funcțiile $f, F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ și $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a) Verificați că $f(x) = x - \frac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați $F(x)$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{F(x)}{xf(x)}$. *(Variante Bac, 2001)*

26. Pentru $a > 0$, se notează $I(a) = \int_0^a \frac{x}{(x+1)(x^2+4)} dx$. Calculați $I(a)$ și $\lim\limits_{a\to\infty} I(a)$. *(Variante Bac, 2000)*

27. Calculați:

a) $\int_{\frac{1}{e}}^e \left|\frac{\ln x}{x}\right| dx$; b) $\int_{-1}^2 |e^x - e^{-x}|\,dx$; c) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$. *(Variante Bac, 2009)*

28. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x$.

a) Calculați $\int_1^e \left(f(x) - \frac{\ln x}{x}\right) dx$.

b) Demonstrați că $\int_1^e f(x)\,dx = \frac{e^2}{2}$.

c) Determinați rația progresiei aritmetice având termenul general $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - x)dx$, $n \geq 1$.

(Variante Bac, 2009)

Scanned with OKEN Scanner

29. Fie $I_n = \int_{\frac{1}{e^2}}^{e^{n^2}} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică.

(Variante Bac, 1998)

30. Considerăm funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{e^x + a}$, cu $a > 0$ și $g(x) = \frac{1}{(e^x + 1)(e^x + 2)}$.

a) Determinați o primitivă a funcției f.

b) Calculați $\int_0^1 g(x)\,dx$.

(Variante Bac, 2000)

31. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, x \leq 0 \\ x + \sqrt{x}, x > 0 \end{cases}$.

a) Demonstrați că f admite primitive pe $\mathbb{R}$. Determinați primitiva care se anulează în zero.

b) Calculați $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$.

c) Dacă $\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx$, unde a, b, c sunt numere reale și $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, arătați că numerele $F(a)$, $F(b)$, $F(c)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

(Variante Bac, 2009)

32. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, x \in (-\infty, 0] \\ 1 + \sin x, x \in (0, \infty) \end{cases}$.

a) Demonstrați că f este integrabilă pe $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Calculați $\int_{-1}^{\pi} f(x)\,dx$.

(Variante Bac, 2009)

33. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ și $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

a) Arătați că $\int_0^1 f'(x)\,dx = \ln 2$.

b) Demonstrați că $\int g(x)\,dx = f(x) + \mathcal{C}$.

c) Calculați $\int_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)}\,dx$.

(Variante Bac, 2009)

34. Se consideră funcțiile $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ și $F(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left[1 - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$.

a) Arătați că F este o primitivă a funcției f pe $(0, \infty)$.

b) Calculați $\int_1^e f(x)F(x)\,dx$.

(Variante Bac, 2008)

35. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$ și $g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Arătați că g este o primitivă a funcției f.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. *(Variante Bac, 2009)*

36. Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$ și $F(x) = (x-1)e^x$.

a) Verificați că F este o primitivă a funcției f.

b) Demonstrați că $I = \int_1^x \frac{f(t)f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)}\,dt = \frac{x+1}{x} - 2$, pentru orice $x > 1$. *(Variante Bac, 2009)*

37. Se consideră funcțiile $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definite astfel: $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$ și $f_{n+1}(x) = \int_2^x f_n(t)\,dt$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $f_1(x) = x - 2$ și $f_2(x) = \frac{(x-2)^2}{2!}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $f_n(x) = \frac{(x-2)^n}{n!}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in \mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2001)*

38. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Verificați egalitatea $f(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Deduceți că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea $C_n^0 + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

39*. Se consideră numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ și funcțiile $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_n\cos nx$ și $F(x) = a_1 \sin x + \frac{a_2}{2}\sin 2x + \ldots + \frac{a_n}{n}\sin nx$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a) Arătați că F este o primitivă a funcției f.

b) Verificați că $F(k\pi) = 0$, oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$.

c) Arătați că, dacă $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, atunci $F(x) = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

d) Arătați că, dacă $F(x) = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, atunci $f(x) = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

e) Notăm $J(p, q) = \int_0^{2\pi} \cos px \cos qx\,dx$, $p, q \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $J(p, q) = 0$ dacă $p \neq q$ și $J(p, p) = \pi$, oricare ar fi $p \in \mathbb{N}^*$.

f) Arătați că, dacă $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, atunci $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. *(Variante Bac, 2001)*

Scanned with OKEN Scanner

4.8. Formula de integrare prin părți

1. Fie $f:[1,e]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\ln x}$. Calculați:

a) $\int_0^1 f(e^x)dx$; b) $\int_1^e f^2(x)dx$. *(Variante Bac, 2009)*

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$. Calculați:

a) $\int_0^1 f(x)dx$; b) $\int_0^1 e^x f(x)dx$. *(Variante Bac, 2009)*

3. Se consideră funcțiile $f, g:(0,3)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{3-x}$ și $g(x)=\dfrac{\ln(3-x)}{x}$, $x\in(0,3)$.

a) Calculați $\int_1^e (3-x)f(x)dx$.

b) Arătați că $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 g(x)dx$. *(Variante Bac, 2009)*

4. Determinați $a, b\in\mathbb{R}$, astfel încât funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=a\ln x+b$ să verifice condițiile $f'(1)=2$ și $\int_1^e f(x)dx=7$. *(Variante Bac, 1999)*

5. Calculați:

a) $\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx$; b) $\int_1^3 \log_3 x dx$. *(Variante Bac, 2001)*

6. Calculați $\int_0^1 (x-\ln(1+x))dx$. *(Variante Bac, 2005)*

7. Calculați:

a) $\int_1^e (\ln(x+2)-\ln x)dx$; b) $\int_0^1 (\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg} x)dx$. *(Variante Bac, 2001)*

8. Calculați $\int_1^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)dx$. *(Variante Bac, 2005)*

9. Calculați $I=\int_1^4 \ln\dfrac{5-x}{4x}dx$. *(Variante Bac, 1999)*

10. Calculați:

a) $\int_0^1 (x^2-x)e^x dx$; b) $\int_0^1 \dfrac{1-x}{e^x}dx$;

c) $\int_1^e (x\ln x+x)dx$; d) $\int_1^e \ln^2 x dx$.

11. Calculați $\int_0^1 (\sqrt{x^2+1}-x)dx$. *(Variante Bac, 2005)*

12. Calculați:

a) $\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$; b) $\int_0^1 x^2 e^x dx$. *(Variante Bac, 2002)*

Scanned with OKEN Scanner

13. Calculați:

a) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$;

b) $\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx$;

c) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$.

14. Se consideră funcțiile $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{x}$, $g(x) = \frac{1}{4}\ln x$.

a) Arătați că $\int_1^4 f(x)dx = \ln 4 + 2$.

b) Verificați că $\int_1^4 g(x)dx = \ln 4 - \frac{3}{4}$.

c) Calculați $\int_1^e f(x^2)g(x^2)dx$. *(Variante Bac, 2009)*

15. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (x+2)e^x, & x \le 0 \\ 2x+2, & x > 0 \end{cases}$.

a) Arătați că f are primitive pe mulțimea $\mathbb{R}$.

b) Găsiți primitiva funcției f pentru care $F(0) = 0$.

c) Calculați $\int_{-1}^1 f(x)dx$. *(Variante Bac, 2008)*

16. Se consideră șirul $(I_n)_{n \ge 1}$, $I_n = \int_0^1 x^n \sin x dx$. Arătați că $I_n + n(n-1)I_{n-2} = n \sin 1 - \cos 1$.

(Variante Bac, 2009)

17. Se consideră $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $a_n = \frac{2n-1}{2n} a_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

b) Arătați că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton și mărginit.

c) Calculați a_3. *(Variante Bac, 1998)*

18*. Se consideră $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx$ și $I_k = \int_0^1 x^k \sqrt{1-x}\, dx$, $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați I_0.

b) Arătați că $I_k = \frac{2k}{2k+3} I_{k-1}$, $k \ge 1$. *(Variante Bac, 2000)*

19*. Se consideră șirurile $(I_n)_{n \ge 0}$ și $(J_n)_{n \ge 0}$ definite astfel: $I_n = \int_1^e x^n \ln x dx$ și $J_n = \int_1^e x^n \ln^2 x dx$.

a) Determinați I_n.

b) Determinați o relație între I_n și J_n.

c) Calculați $\lim_{n \to \infty} \frac{I_n - J_n}{e^{n+1}}$. *(Variante Bac, 1999)*

Scanned with OKEN Scanner

20*. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 0}$ definit prin $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx$; $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$, $\forall\, n\geq 1$.

a) Calculați I_0 și I_1.

b) Arătați că $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$, $n\geq 2$.

c) Arătați că $I_{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ și $I_{2n+1}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

d) Arătați că $1\leq\frac{I_n}{I_{n+1}}\leq\frac{n+1}{n}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

Se consideră șirul (w_n), definit prin $w_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\sqrt{2n+1}$.

e) Verificați că $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=(w_n)^2\cdot\frac{\pi}{2}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

f) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}w_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. *(Variante Bac, 2002)*

4.9. Integrarea prin substituții

1. Determinați $x>0$, astfel încât $\int_{e^2}^{x}\frac{1}{t}(2\ln t-3)dt=0$. *(Variante Bac, 1998)*

2. Calculați:

a) $\int_0^1\frac{2x+9}{x^2+1}dx$;

b) $\int_0^1\frac{4x}{4x^4+1}dx$. *(Variante Bac, 2002)*

3. Calculați:

a) $\int_0^1(\sqrt{x}+1)^2dx$;

b) $\int_1^e\frac{dx}{x(\ln^2 x+1)}$;

c) $\int_0^1 x(x+1)^n dx$, $n\in\mathbb{N}$;

d) $\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}dx$;

e) $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx$;

f) $\int_0^1 x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2dx$.

4. Calculați:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^2 x\,dx$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^3 x\,dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3+\cos x}dx$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^2 x\,dx$.

Scanned with OKEN Scanner

5. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$.

a) Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.

b) Calculați $\int_0^1 g(x)dx$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_0^x \dfrac{f(t)f''(t)-(f'(t))^2}{f^2(t)}dt$. *(Variante Bac, 2009)*

6. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^{1004}+2009^x$.

a) Determinați $\int f(x)dx$. b) Calculați $\int_0^1 xf(x^2)dx$. *(Variante Bac, 2009)*

7. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x+3, x<0\\ e^x+2, x\geq 0\end{cases}$.

a) Calculați $\int_{-1}^1 f(x)dx$. b) Arătați că $\int_0^1 x^2 f(x^3)dx=\dfrac{e+1}{3}$. *(Variante Bac, 2008)*

8. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-x^2}$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=\dfrac{e-1}{e}$. b) Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$. *(Variante Bac, 2008)*

9. Se consideră funcția $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\sin x$.

a) Arătați că există $a, b, c\in\mathbb{R}$, astfel încât funcția $F:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, F(x)=(ax^2+b)\cos x+cx\sin x$ să fie o primitivă a funcției f.

b) Calculați $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} f\left(\dfrac{1}{2x}\right)dx$. *(Variante Bac, 2009)*

10. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x (t^2+1)\sqrt{|t|}dt$. Arătați că f este funcție impară.

(Variante Bac, 2009)

11. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ și funcțiile $f, F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $F(x)=\dfrac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că F este o primitivă a funcției f.

b)* Determinați a astfel încât $\int_0^2 F(x)dx-\int_{-2}^0 F(x)dx=2$. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

12. Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}\sin x$, $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}\sin x - \frac{1}{2}e^{-x}\cos x$ și $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)dx$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătați că F este primitivă a funcției f.

b) Calculați I_0 și arătați că $I_k = (-1)^k e^{-k\pi} I_0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$. *(Variante Bac, 2000)*

13*. Fie $f: [1, e] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\ln x}$. Arătați că $\int_0^1 e^{x^2}dx + \int_1^e f(x)dx = e$. *(Variante Bac, 2009)*

14*. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$.

a) Arătați că funcția f este bijectivă.

b) Notăm cu $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, inversa funcției f. Calculați $\int_0^{1+\frac{\pi}{4}} g(t)dt$. *(Variante Bac, 2002)*

15. Calculați $\int_0^{\pi} \sin^9 x \cos^3 x dx$.

16*. Se consideră integralele $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$ și $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$.

a) Verificați că $A + B = \frac{\pi}{2}$. b) Arătați că $A = B$.

17*. Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x}dx = \frac{\pi - 1}{4}$. *(Variante Bac, 2009)*

18*. Calculați $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+e^x}\cos x\, dx$. *(Variante Bac, 2009)*

19. Se consideră $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$.

a) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$. b)* Calculați $\int_0^{2\pi} xf(x)dx$. *(Variante Bac, 2009)*

20. Fie $a > 0$ și $f: [-a, a] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă.

1) Dacă f este funcție impară, arătați că $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

2) Dacă f este funcție pară, arătați că $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

3) Calculați integralele:

a) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\frac{1-x}{1+x}dx$; b) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left|\ln\frac{1-x}{1+x}\right|dx$;

c) $\int_{-1}^{1} x^2 e^{|x|}dx$; d) $\int_{-1}^{1} x^3 e^{|x|}dx$. *(Variante Bac, 1999)*

Scanned with OKEN Scanner

21*. a) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și periodică de perioadă T. Arătați că $\int_a^{a+T} f(x)dx$ nu depinde de a.

b) Dacă $a\in\mathbb{R}$ și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\{x\}(1-\{x\})$, calculați $\int_a^{a+1} f(x)dx$. *(Variante Bac, 2009)*

22. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{2002}$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $f(1)$.

b) Arătați că $(x-1)f(x)=x^{2003}-1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

c) Arătați că $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

d) Arătați că $F'(x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

e) Arătați că F este bijectivă.

f)* Notăm cu $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ inversa funcției F și $a=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2003}$. Calculați $\int_0^a g(x)dx$.

(Variante Bac, 2002)

23. Pentru p și $q\in\mathbb{N}$, notăm $B(p,q)=\int_0^1 x^q(1-x)^p dx$.

a) Calculați $B(1,1)$.

b) Arătați că $B(0,n)=\frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

c) Arătați că $B(p,q)=B(q,p)$.

d) Arătați că $B(p,q)=\frac{p}{q+1}B(p-1,q+1)$.

e) Arătați că $B(n,q)=\frac{n!q!}{(q+n)!}\cdot B(0,n+q)$, oricare ar fi $n,q\in\mathbb{N}$.

f) Arătați că $B(p,q)=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$, oricare ar fi $p,q\in\mathbb{N}$. *(Variante Bac, 2002)*

4.10. Inegalități

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$. Arătați că

$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx>\int_2^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx$. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră integralele $I_n = \int_0^1 \frac{x^n + 1}{x+1} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Folosind eventual faptul că $0 \le x^2 \le x$, pentru orice $x \in [0, 1]$, arătați că $I_2 \le I_1$. *(Variante Bac, 2009)*

3. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră integralele $I_n = \int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x} dx$. Folosind faptul că $1 \le \ln x \le 2$, oricare ar fi $x \in [e, e^2]$, demonstrați că $1 \le \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \le 2^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. *(Variante Bac, 2009)*

4. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 6^x + 35^x - 14^x - 15^x$.

a) Arătați că $f(x) \ge 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $\frac{5}{\ln 6} + \frac{34}{\ln 35} > \frac{13}{\ln 14} + \frac{14}{\ln 15}$. *(Variante Bac, 2000)*

5. Fie șirul $(I_n)_{n \ge 1}$, $I_n = \int_0^1 x^n \sin x dx$. Arătați că $(I_n)_{n \ge 1}$ este convergent. *(Variante Bac, 2009)*

6. Considerăm integralele $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$ și $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x dx$ pentru $n \ge 1$.

a) Calculați I_0 și I_1.

b) Arătați că șirul $(I_n)_{n \ge 1}$ este monoton descrescător.

c) Arătați că șirul $(I_n)_{n \ge 1}$ este convergent și determinați limita sa. *(Variante Bac, 1998)*

7. Fie șirul $I_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 t^n \ln t dt$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați $\lim_{n \to \infty} I_n$. *(Variante Bac, 2009)*

8. Se consideră șirul $(I_n)_{n \ge 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^{2n}} dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $I_n \le \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculați $\lim_{n \to \infty} I_n$. *(Variante Bac, 2009)*

9. Fie șirul $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^n dx$, $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$.

a) Calculați I_2.

b) Arătați că $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, $n \ge 2$.

c) Arătați că $I_n \ge 0$ și studiați monotonia șirului $(I_n)_{n \ge 2}$.

d) Arătați că $(I_n)_{n \ge 2}$ este convergent și calculați $\lim_{n \to \infty} I_n$. *(Variante Bac, 1999)*

Scanned with OKEN Scanner

10. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{e^{ax}+e^{-ax}}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $f(x)=\dfrac{e^{ax}}{1+(e^{ax})^2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Folosind inegalitatea $u+\dfrac{1}{u}\geq 2$, oricare ar fi $u>0$, arătați că $\int_0^1 f(x)dx\leq\dfrac{1}{2}$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

11. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$. Arătați că $1\leq\int_0^1 f(x)dx\leq e-1$. *(Variante Bac, 2008)*

12. a) Arătați că $(t+1)^{2008}\geq 1$, oricare ar fi $t\geq 0$.

b) Integrând relația anterioară pe $[0,x]$, $x\geq 0$, arătați că $(x+1)^{2009}\geq 2009x+1$, oricare ar fi $x\geq 0$.

c) Arătați că $(x+1)^{2010}\geq 2009\cdot 1005x^2+2010x+1, x\geq 0$.

13. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1-x^2+x^4$.

a) Arătați că $f(x)\geq\dfrac{1}{1+x^2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Integrând inegalitatea de la a), arătați că $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}\geq\operatorname{arctg}x$, oricare ar fi $x\geq 0$.

c) Notăm cu $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției f. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xf(x)}{F(x)}$. *(Variante Bac, 2002)*

14. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$. Arătați că, dacă $a>0$, atunci $\dfrac{1}{a+2}\leq$

$\leq\int_a^{a+1} f(x)dx\leq\dfrac{1}{a+1}$. *(Variante Bac, 2009)*

15. Fie funcția $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$. Arătați că $\int_1^x f(t)dt\leq\dfrac{x-1}{6}$, oricare ar fi $x\in[1,\infty)$. *(Variante Bac, 2009)*

16. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+e^{-x}$.

a) Arătați că $f(x)\geq 1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $\int_0^1 e^{-x^2}dx\geq\dfrac{2}{3}$. *(Variante Bac, 2009)*

17. a) Arătați că $2^x-x\ln 2-1\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $\int_0^1 2^{x^2}dx\geq 1+\dfrac{\ln 2}{3}$. *(Variante Bac, 2001)*

18. a) Arătați că $e^x\geq x+1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b)* Arătați că $\dfrac{1}{e}\leq\int_0^1 e^{-x^2}dx\leq\dfrac{\pi}{4}$. *(Variante Bac, 1998)*

Scanned with OKEN Scanner

19. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{1+t}dt$.

a) Arătați că $\int_0^a \frac{1}{1+t}dt=\ln(1+a)$, oricare ar fi $a>-1$.

b) Arătați că $f(x)<\ln(1+x)$, oricare ar fi $x>0$.

c) Arătați că $f(\pi)>f(2\pi)$. *(Variante Bac, 2009)*

20*. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$. Stabiliți semnul funcției, apoi demonstrați că $\int_0^1 \cos x^2 dx\geq\frac{9}{10}$. *(Variante Bac, 2009)*

21. Se consideră șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $I_0=\int_0^1\frac{dx}{1+x}, I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculați I_0 și I_1.

b) Arătați că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

c) Arătați că $nI_n=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}dx$.

d) Arătați că $I_{n+1}\leq I_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

e) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

f) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$. *(Variante Bac, 2003)*

22. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 0}$ definit prin $I_0=\int_0^1\frac{1}{2x+3}dx$ și $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{2x+3}dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculați I_0 și I_1.

b) Arătați că $2I_{n+1}+3I_n=\frac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

c) Dacă $x\in[0,1]$, arătați că $x^n\geq x^{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

d) Arătați că $I_n\geq I_{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

e) Deduceți inegalitățile: $\frac{1}{5(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{5n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

f) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$. *(Variante Bac, 2001)*

23. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+4x+5}$. Se definește șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel: $I_0=\int_0^1 f(x)dx$ și $I_n=\int_0^1 x^n f(x)dx, \forall n\geq 1$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Calculați I_0 și I_1.

b) Demonstrați că $I_{n+2}+4I_{n+1}+5I_n=\frac{1}{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

c) Arătați că, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, are loc inegalitatea $I_{n+1}\le I_n$.

d) Arătați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, au loc inegalitățile $10I_{n+2}\le\frac{1}{n+1}\le 10I_n$.

e) Demonstrați că, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, avem $\frac{1}{10(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{10(n-1)}$.

f) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n=f(1)$. *(Variante Bac, 2000)*

24. Se definește șirul $(I_n)_{n\ge 0}$ prin: $I_0=\int_0^1 e^x dx; I_n=\int_0^1 x^n e^x dx$, $n\ge 1$.

a) Calculați I_0 și I_1.
b) Arătați că $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$, $n\ge 0$.
c) Arătați că $(I_n)_{n\ge 0}$ este monoton și mărginit.
d) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$. *(Variante Bac, 2000)*

25. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge 1}$, definit prin $I_n=\int_0^1\frac{\ln(x^n+1)}{x+1}dx$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Determinați I_1.
b) Arătați că $(I_n)_{n\ge 1}$ este strict descrescător.
c) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$. *(Variante Bac, 2009)*

26. Fie funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(1+x)$.

a) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^5}$, unde $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x\in[0,\infty)$.

c) Arătați că $\int_0^1\ln(1+x)dx\le\frac{5}{12}$. *(Variante Bac, 2009)*

4.11. Teorema de existență a primitivelor unei funcții continue

1. Arătați că $\int_0^x \operatorname{arctg}(t+a)dt=(x+a)\operatorname{arctg}(x+a)-\frac{1}{2}\ln((x+a)^2+1)+\frac{1}{2}\ln(a^2+1)-a\operatorname{arctg}a$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall a\in\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2005)*

Scanned with OKEN Scanner

2. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\int_2^x\frac{t^2+t+2}{t-1}dt$. *(Variante Bac, 2001)*

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x$. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\int_0^x f(t)dt$.

(Variante Bac, 2009)

4. Considerăm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-\operatorname{arctg}x$. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt$. *(Variante Bac, 2001)*

5. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}2^t dt}{x^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x(t^{2009}-t+1)dt}{x^{2010}}$.

6. Se consideră funcțiile $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_{\frac{1}{e}}^x t^n\ln t dt$, $n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că toate funcțiile f_n sunt descrescătoare pe $(0, 1)$. *(Variante Bac, 2009)*

7. Fie funcția $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to(0,\infty)$, $f(x)=\int_0^x\frac{(\sin t+\cos t)\sin t}{\cos^2 t}dt$.

a) Calculați $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

b) Arătați că f este strict crescătoare.

c) Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)}{x^2}$. *(Variante Bac, 2009)*

8. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^x t^3\sqrt{t^2+1}\,dt$.

a) Arătați că f este strict crescătoare.

b) Calculați $f(1)$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^5}$. *(Variante Bac, 2009)*

9*. Se consideră funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\int_0^x(1+\cos t)dt$. Determinați intervalele de monotonie ale funcției F. *(Variante Bac, 2009)*

10. Determinați punctele de extrem ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^{x^2}(t^3-3t+2)e^t dt$.

(Variante Bac, 2009)

11. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-x^2}$ și F o primitivă a sa.

a) Calculați $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(\cos x)-F(1)}{x^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Arătați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=F(x)+f(x)$ are exact un punct de extrem local.

(Variante Bac, 2009)

12. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$. Arătați că f este concavă pe intervalul $[0,\infty)$.

(Variante Bac, 2009)

13. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $F_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F_n(x)=\int_0^x t^n e^{-t}dt$.

a) Determinați $F_1(x)$.
b) Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției F_n.
c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}F_2(x)$.

(Variante Bac, 2009)

14. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_1^x f(t)dt$.

a) Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției F.
b) Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.
c) Calculați $\int_0^1 F(x)dx$.

(Variante Bac, 2009)

15. Se consideră funcțiile $f,g:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_2^x\frac{t^2}{t^2-1}dt$, $g(x)=\int_0^{\ln\frac{x^2-1}{3}}\sqrt{3e^t+1}\,dt$.

a) Calculați $f(3)$.
b)* Arătați că $g'(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$, $\forall x\in(1,\infty)$.
c)* Arătați că $g(x)=2f(x)$, $\forall x\in(1,\infty)$.

(Variante Bac, 2009)

16*. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$.

a) Arătați că $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
b) Calculați $f'(x)$.
c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

(Variante Bac, 2001)

4.12. Aplicații ale integralei definite

1. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3^x-2^x$. Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=1$.

(Variante Bac, 2005)

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x^2+2)-\ln(x^2+1)$.

a) Arătați că $\int_0^x\ln(t^2+a^2)dt=x\ln(a^2+x^2)-2x+2a\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ și $a\in\mathbb{R}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 1$. *(Variante Bac, 2005)*

3. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}$. Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$. *(Variante Bac, 2001)*

4. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$. Determinați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 1$. *(Variante Bac, 2004)*

5. Se consideră funcția $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1+3x-4x^2}{x}$. Calculați aria suprafeței plane limitate de graficul funcției f și axa Ox. *(Variante Bac, 1999)*

6. Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$. *(Variante Bac, 2004)*

7. Calculați aria suprafeței plane limitate de graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -\dfrac{\pi}{4}$ și $x = \dfrac{\pi}{4}$. *(Variante Bac, 1999)*

8. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}$. Calculați aria suprafeței plane limitate de graficul funcției f, dreptele $y = 1$, $x = \dfrac{1}{e^2}$ și $x = \dfrac{1}{e}$. *(Variante Bac, 1999)*

9. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}(x + 1)$. Calculați aria suprafeței plane limitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -2$ și $x = 0$. *(Variante Bac, 1999)*

10. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $g(x) = 2\ln(1 + e^x) - x$.

a) Arătați că funcția g este o primitivă a funcției f.

b) Calculați aria limitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 1$. *(Variante Bac, 1999)*

11. Considerăm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)e^{-x}$. Notăm $A(u)$ aria mulțimii plane mărginite de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = 1$ și $x = u$, $u > 1$. Calculați $\lim\limits_{u \to \infty} A(u)$. *(Variante Bac, 1998)*

12. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. Determinați $a \in (1, 3)$ cu proprietatea că dreapta $x = a$ împarte suprafața plană cuprinsă între graficul funcției f și axa Ox în două regiuni de arii egale. *(Variante Bac, 2001)*

13. Determinați aria cuprinsă între graficele funcțiilor $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x$, $g(x) = x + 4$. *(Variante Bac, 1998)*

Scanned with OKEN Scanner

14. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 3$ și $g(x) = 3 + 3x - x^2$.

a) Rezolvați inecuația $f(x) \leq g(x)$.

b) Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficele celor două funcții. *(Variante Bac, 1999)*

15. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$. Calculați aria mulțimii plane mărginite de graficul funcției f, axa Oy, asimptota oblică și dreapta de ecuație $x = -1$. *(Variante Bac, 1999)*

16. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$. Calculați aria suprafeței plane limitate de graficul funcției f, tangenta la grafic în punctul de abscisă 2 și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 2$. *(Variante Bac, 1999)*

17*. Pentru $n \in \mathbb{N}$, definim funcția $f_n: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n + 1}$. Arătați că aria suprafeței plane cuprinse între graficul lui f_n, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 1$ este un număr din intervalul $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

18. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$.

a) Arătați că $f(x) - 1 + x - x^2 \leq 0$, oricare ar fi $x \geq 0$.

b) Arătați că $f(x) - 1 + x - x^2 + x^3 \geq 0$, oricare ar fi $x \geq 0$.

c) Deduceți că $1 - x + x^2 - x^3 \leq \dfrac{1}{1 + x} \leq 1 - x + x^2$, oricare ar fi $x \geq 0$.

d) Arătați că aria cuprinsă între graficul funcției $g: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^9}$, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 1$ este un număr real cuprins în intervalul $(0{,}91; 0{,}96)$. *(Variante Bac, 2002)*

19*. Se consideră funcția $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - x^2$. Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât dreapta de ecuație $y = mx$ să împartă subgraficul funcției f în două mulțimi de arii egale. *(Variante Bac, 1998)*

20. Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției: $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$. *(Variante Bac, 2009)*

21. Determinați numărul real a, astfel încât volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 2$ să fie minim. *(Variante Bac, 2009)*

22. Calculați volumul corpului de rotație determinat de funcția $f: [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{x(x-3)}{x-4}}$. *(Variante Bac, 1998)*

Scanned with OKEN Scanner

23. Calculați volumul corpului de rotație determinat de funcția $f:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\arcsin x$.

(Variante Bac, 1998)

24. Se consideră funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$.

a) Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f și axele de coordonate.

b) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

c)* Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$. *(Variante Bac, 2009)*

25. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+e^{-x}$.

a) Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=1$.

b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)+f(-x)$. *(Variante Bac, 2009)*

26. Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=\frac{1}{n^2+x^2}, n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f_1, axele de coordonate și dreapta $x=1$.

b) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} n(f_n(1)+f_n(2)+\ldots+f_n(n))=\frac{\pi}{4}$. *(Variante Bac, 2009)*

27. Se consideră șirul $a_n=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

(Variante Bac, 2009)

28. Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$ este convergent. *(Variante Bac, 2009)*

29*. Calculați integrala $\int_0^1\ln(1+x^2)dx$ și limita șirului $a_n=\frac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln(k^2+n^2)-2(n-1)\ln n\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

(Variante Bac, 1998)

4.13. Probleme de sinteză – analiză matematică

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{e^x}, x\in(-\infty,1)\\ \frac{\ln^2 x}{x}, x\in[1,\infty)\end{cases}$.

a) Arătați că f admite primitive și determinați o primitivă a sa.

Scanned with OKEN Scanner

b) Calculați aria suprafeței plane limitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=0$.

c) Calculați $\int_0^e f(x)dx$. *(Variante Bac, 1999)*

2. Se consideră funcțiile $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=\dfrac{1}{|x-a|+3}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că, pentru orice a, funcția f_a are primitive strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Calculați $\int_0^3 f_2(x)dx$.

c) Calculați $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^3 f_a(x)dx$. *(Variante Bac, 2009)*

3. Fie funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x\ln^2 x, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

a) Arătați că f este integrabilă pe $[0,1]$.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Calculați $\int_1^e f\left(\dfrac{1}{x}\right)dx$. *(Variante Bac, 2009)*

4. Pentru $n\in\mathbb{N}$ se definesc funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{x}{e^{2^n\cdot x}}$. Fie $I_n=\int_0^{\frac{1}{2^n}} f_n(x)dx$.

a) Calculați I_0.

b) Verificați că $f_{n+1}(x)=\dfrac{1}{2}f_n(2x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$.

c) Arătați că $I_{n+1}=\dfrac{1}{4}I_n, \forall\, n\in\mathbb{N}$. Calculați limita șirului $S_n=I_0+I_1+\ldots+I_n$. *(Variante Bac, 1999)*

5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg} x$.

a) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Arătați că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_1^x f(\ln t)dt=\dfrac{\pi}{2}$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{n}{n}\right)\right)$. *(Variante Bac, 2009)*

6. Se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n e^{x^2}$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Calculați $\int_0^1 f_1(x)dx$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Folosind inegalitatea $e^x \geq x+1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, arătați că $\int_0^1 f_2(x)dx \geq \frac{8}{15}$.

c) Arătați că $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{e}{2} - \frac{n-1}{2}\int_0^1 f_{n-2}(x)dx$, oricare ar fi $n \geq 2$. *(Variante Bac, 2008)*

7. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră funcțiile $f_n: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + (1-x)^n$.

a) Calculați $\int_0^1 f_2(x)dx$.

b) Arătați că $\int_0^1 f_n(x) = \int_0^1 f_n(1-x)dx$.

c) Arătați că $\int_0^1 f_{2008}(x)dx \geq \int_0^1 f_{2010}(x)dx$. *(Variante Bac, 2009)*

8.* Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$.

a) Arătați că f este impară.

b) Arătați că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

c) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx \leq e-2$. *(Variante Bac, 2009)*

9. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2-\sin x}$ și $F: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\, dx$.

b) Demonstrați că funcția F este strict crescătoare.

c)* Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$. *(Variante Bac, 2009)*

10. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x - x + \frac{x^3}{3}$ și $g(x) = \operatorname{arctg} x - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}$.

a) Arătați că $g(x) \leq 0 \leq f(x)$, oricare ar fi $x \geq 0$.

b) Demonstrați că $\frac{2}{7} < \int_0^1 \operatorname{arctg} x^2 dx < \frac{31}{100}$. *(Variante Bac, 2001)*

11. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^6$ și $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a) Arătați că $f(x) > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b)* Rezolvați ecuația $F(x) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{7}$.

c)* Arătați că $F(x) \leq x \cdot f(x)$, oricare ar fi $x \geq 0$. *(Variante Bac, 2002)*

Scanned with OKEN Scanner

12. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$ și șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$.

a) Arătați că $f(k+1)\leq\int_k^{k+1} f(x)dx\leq f(k)$, oricare ar fi $k\in(0,\infty)$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

c) Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent. *(Variante Bac, 2009)*

13. Se consideră șirul de numere reale $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $I_0=\frac{\pi}{2}$ și $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător.

c) Arătați că $nI_nI_{n-1}=\frac{\pi}{2}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. *(Variante Bac, 2009)*

14. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4-x^2$.

a) Determinați $a\in(-2,2)$ cu proprietatea că dreapta $x=a$ împarte suprafața cuprinsă între graficul funcției f și axa Ox în două regiuni de arii egale.

b) Determinați $b\in(0,4)$ cu proprietatea că dreapta $y=b$ împarte suprafața plană cuprinsă între graficul funcției f și axa Ox în două regiuni de arii egale.

c) Arătați că dreptele $x=a$ și $y=b$, determinate anterior, împart suprafața plană cuprinsă între graficul funcției f și axa Ox în patru regiuni de arii egale. *(Variante Bac, 2001)*

15. Fie funcția $f:[0,1]\to[1,3]$, $f(x)=x^4+x^2+1$. Se admite că funcția f are inversa g.

a) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Arătați că $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 g(x)dx=3$.

c) Arătați că, dacă $\alpha\in[1,3]$, atunci are loc inegalitatea: $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^{\alpha} g(x)dx\,^3\,\alpha$.

(Variante Bac, 2009)

16. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(1+\sin^2 x)$.

a) Arătați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Calculați $\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx$.

c) Calculați derivata funcției $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f(t)dt$. *(Variante Bac, 2009)*

Scanned with OKEN Scanner

17. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 \frac{nx^n}{x^n+1}dx$.

a) Calculaţi I_1.

b) Arătaţi că $I_n=\ln 2-\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$. *(Variante Bac, 2009)*

18*. Fie funcţiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$, $g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)\cos t\,dt$.

a) Calculaţi $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Studiaţi monotonia funcţiei g pe intervalul $[0, \pi]$.

c) Calculaţi $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$. *(Variante Bac, 2009)*

19*. Se consideră funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=\frac{1}{(1+t^2)(1+t^3)}$.

a) Calculaţi $\int_0^1 (t^3+1)f(t)dt$.

b) Arătaţi că $\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(t)dt=\int_1^x t^3 f(t)dt$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt$. *(Variante Bac, 2009)*

20. Se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definite prin $f_0(x)=1-\cos x$ şi $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$ şi $x\in\mathbb{R}$.

a) Calculaţi $f_2(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că $f_{2n+1}(x)=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots+(-1)^n\frac{x}{1!}+(-1)^{n+1}\sin x$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$ şi $x\in\mathbb{R}$.

c) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)=\sin x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. *(Variante Bac, 2004)*

Scanned with OKEN Scanner

Teste pentru Bacalaureat 2015, după modelul M.E.N.

Testul 1

Bacalaureat, august 2014. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Determinați partea reală a numărului complex $z = 1 + 2i + 3i^2$.
2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 1$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 3x - 5$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-x} = 3^{2x}$.
4. Determinați câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifrele 0, 1, 2 și 3.
5. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\overrightarrow{AC} = (m+1)\vec{i} + 4\vec{j}$, unde m este un număr real. Determinați numărul real m știind că $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.
6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC = 3$ și $BC = 3\sqrt{2}$. Determinați $\cos C$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2 - 2x & 4x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
   a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
   b) Arătați că $A(x+y) = A(x) \cdot A(y)$ pentru orice numere reale x și y.
   c) Determinați numerele reale x știind că $A(x^2 + 2) = A(x) \cdot A(x) \cdot A(x)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX - 2$, unde a este număr real.
   a) Arătați că $f(2) = 2(a - 3)$.
   b) Determinați numărul real a știind că polinomul f este divizibil prin $X^2 - X + 1$.
   c) Pentru $a = 3$, rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(2^x) = 0$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: (-2, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{xe^x}{x+2}$.
   a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{(x^2 + 2x + 2)e^x}{(x+2)^2}$, $x \in (-2, +\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$, situat pe graficul funcției f.

c) Arătați că ecuația $f(x) = 1$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1, 2)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.

a) Arătați că $I_1 = 1 - \ln 2$.

b) Arătați că $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

c) Demonstrați că $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 2

Bacalaureat, iulie 2014. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_1 = 6$ și $a_2 = 12$.

2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 4$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(3^x - 1)(3^x - 3) = 0$.

4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să conțină cifra 1.

5. Se consideră triunghiul echilateral ABC cu $AB = 2$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

6. Calculați aria triunghiului isoscel ABC știind că $A = \frac{\pi}{2}$ și $AC = 4$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr reale.

a) Arătați că $\det(A(0)) = 8$.

b) Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 0$.

c) Determinați matricea $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ știind că $A(1) \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 - 2X^2 + 3X + m$, unde m este număr real.

a) Calculați $f(1)$.

b) Arătați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2$.

c) Determinați numărul real m știind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 8$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Arătați că $f(x)\le\dfrac{1}{e}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{11}{6}$.

b) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{f(x)}dx$. Arătați că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

c) Determinați numărul real pozitiv a știind că $\int_0^1\dfrac{2x+1}{f(x)}dx=\ln 3$.

Testul 3

Bacalaureat, sesiunea specială pentru olimpici, mai 2014. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Arătați că $3(2+4i)+2(1-6i)=8$.

2. Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+1$ este tangenta la axa Ox.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2+4}=5^{4x}$.

4. Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 3, 5 și 7.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,2)$, $B(-4,-2)$ și $C(4,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este perpendiculară pe dreapta BC.

6. Arătați că $\sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{3\pi}{4}=0$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 2^n-1 & 1\end{pmatrix}$, unde n este număr natural.

a) Arătați că $\det(A(0))=1$.

9-10 10-11 11-12

Scanned with OKEN Scanner

b) Determinați numărul natural n știind că $A(n) \cdot A(1) = A(3)$.

c) Determinați numerele naturale p și q știind că $A(p) \cdot A(q) = A(pq)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 - 3X + 2$.

a) Calculați $f(0)$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 4$.

c) Arătați că $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 20$, știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + e^x$.

a) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Arătați că $f(x) \geq 4x + 1$ pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + x + 1}$.

a) Arătați că $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + x + 1) f(x)\, dx = \frac{1}{4}$.

b) Arătați că $\displaystyle\int_0^1 (f(x) - x + 1)\, dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

c) Arătați că $\displaystyle\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t^4} \cdot \int_0^t f(x)\, dx \right) = \frac{1}{4}$.

Testul 4

Bacalaureat, model M.E.N., februarie 2014. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Determinați numerele naturale a și b, știind că $\dfrac{1+i}{1-i} = a + ib$ și $i^2 = -1$.

2. Determinați coordonatele punctelor de intersecție cu axele de coordonate a graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 6x + 8$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{\frac{x+2}{2}} + 3^{x+1} = 36$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să nu conțină cifra 6.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 2)$, $B(2, 3)$ și $C(0, -2)$. Determinați ecuația paralelei duse prin C la AB.

Scanned with OKEN Scanner

6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\frac{1+\sin x}{\sin x} = \frac{1+\cos x}{\cos x}$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, unde a este un număr real.

a) Arătați că $\det(A(a)) = (a+2)(a-1)^2$, pentru orice număr real a.

b) Calculați inversa matricei $A(-1)$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

c) Determinați perechile de numere naturale (a, b) pentru care matricea $A(a) \cdot A(b)$ are suma elementelor egală cu 24.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3xy - 3x - 3y + 4$. Legea „*" este asociativă și are element neutru.

a) Arătați că $x * y = 3(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y.

b) Calculați $\frac{1}{1007} * \frac{2}{1007} * \frac{3}{1007} * \ldots * \frac{2014}{1007}$.

c) Determinați numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor față de legea „*".

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$.

a) Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției f.

c) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+3}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

c) Arătați că $\lim\limits_{x \to +\infty} (n+1) \cdot I_n = \frac{1}{2}$.

Testul 5

Bacalaureat, model M.E.N., 2014, Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Determinați numerele reale a și b, știind că $a + ib$ este conjugatul numărului complex $z = \frac{1+i}{1-i}$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+4x-12$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2-4)=\log_3(6x-12)$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 100.

5. Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}-3\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}-5\vec{j}$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

6. Calculați lungimea laturii AC a triunghiului ABC, știind că $BC=8$, $A=\frac{\pi}{4}$ și $C=\frac{7\pi}{12}$.

Subiectul al II-lea

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A(x)+A(-x)=2A(0)$, pentru orice număr real x.

b) Determinați numărul real x pentru care $\det(A(x))=0$.

c) Arătați că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relația $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+mX+1$, unde m este un număr real.

a) Calculați $f(-1)$.

b) Determinați numărul real m știind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile complexe ale polinomului f.

c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.

a) Calculați $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1(1-x)^n e^x\,dx$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$, pentru orice număr natural nenul n.

c) Demonstrați că $I_n=n!\left(e-1-\frac{1}{1!}-\ldots-\frac{1}{n!}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 6

Bacalaureat, august 2013. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali, știind că $b_1 = 1$ și $b_4 = 27$.

2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 6x + 8$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2} = 9^{1-x}$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

5. Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

6. Calculați sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB = 4$, $BC = 5$ și $\sin C = \frac{4}{5}$.

Subiectul al II-lea

1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det(A(1))$.

b) Determinați numerele reale m știind că $A(m)\cdot A(-m) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Arătați că $\det(A(1) + A(2) + \ldots + A(101)) = 51^2 \cdot 101^3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de: $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$.

a) Calculați $3 \circ 4$.

b) Arătați că $x \circ y = (x-4)(y-4) + 4$, pentru orice numere reale x și y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{x \text{ de } 2013 \text{ ori}} = 5$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x+e^x}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(x+e^x)^2}$ pentru orice $x \in (0,+\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că $f(x) \geq \frac{e}{e+1}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 xe^{-nx^2}\,dx$.

a) Calculați I_0.

b) Arătați că $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural n.

c) Demonstrați că $I_n = \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 7

Bacalaureat, iunie 2013. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Arătați că numărul $a = 3(3 - 2i) + 2(5 + 3i)$ este real.

2. Se consideră $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x - 1$. Calculați $f(1) + f(2) + \ldots + f(10)$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x) = \log_2(1 + x)$.

4. După o scumpire cu 10% prețul unui produs este 2200 de lei. Calculați prețul produsului înainte de scumpire.

5. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = \vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ sunt coliniari.

6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, știind că $\frac{3\sin x + \cos x}{\sin x} = 4$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră determinantul $D(a, b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

a) Arătați că $D(2, 3) = 2$.

b) Verificați dacă $D(a, b) = (a - 1)(b - 1)(b - a)$, pentru orice numere reale a și b.

c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_n(n, n^2)$, unde n este un număr natural nenul. Determinați numărul natural n, $n \geq 3$, pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egală cu 1.

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f = X^3 - 4X^2 + 3X - m$, unde m este un număr real.

a) Pentru $m = 4$, arătați că $f(4) = 8$.

b) Determinați numărul real m pentru care rădăcinile polinomului f verifică relația $x_1 + x_2 = x_3$.

c) Dacă $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 7(x_1 + x_2 + x_3)$, arătați că f se divide cu $X - 3$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}$.

a) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcției f.

c) Demonstrați că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $I_{n+1}+(n+1)I_n=e$, pentru orice număr natural nenul n.

c) Arătați că $1\leq(n+1)I_n\leq e$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 8

Bacalaureat, sesiunea specială pentru olimpici, iunie 2013. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Determinați numărul real x pentru care numerele 1, $2x+2$ și 7 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Calculați distanța dintre punctele de intersecție cu axa Ox a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+4}=x+2$.

4. Determinați câte numere naturale impare $\overline{ab}$ se pot forma, știind că $a, b\in\{2,3,4,5\}$ și $a\neq b$.

5. În dreptunghiul $ABCD$, cu $AB=8$ și $BC=6$, se consideră $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AD}$, unde $\{O\}=AC\cap BD$. Calculați lungimea vectorului $\vec{v}$.

6. Calculați sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=6$, $BC=10$ și $\sin C=\frac{3}{5}$.

Subiectul al II-lea

1. Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det(A(0))$.

b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care $5A(a)-(A(a))^2=4I_3$.

c) Determinați inversa matricei $A(2)$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - mX^2 + 3X - 1$, unde m este număr real.

a) Calculați $f(2) - f(-2)$.

b) Determinați restul împărțirii lui f la $X + 2$, știind că restul împărțirii polinomului f la $X - 2$ este egal cu 9.

c) Determinați numerele reale m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

a) Calculați $f'(x), x \in (-1, 1)$.

b) Verificați dacă funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-1, 1)$.

c) Determinați punctele de inflexiune ale funcției f.

2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_1^2 x^n e^x \, dx$.

a) Calculați I_0.

b) Arătați că $I_1 = e^2$.

c) Demonstrați că $I_{n+1} + (n+1)I_n = 2^{n+1}e^2 - e$, pentru orice număr natural n.

Testul 9

Bacalaureat, model M.E.N., 2013. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Arătați că numărul $n = (\sqrt{5} - 1)^2 + 2\sqrt{5}$ este natural.

2. Determinați valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + 4$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2 - x^2) = \log_2 x$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, aceasta să aibă cel mult un element.

5. Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 6\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$. Determinați lungimea segmentului $[AC]$.

6. Se consideră numerele reale a și b astfel încât $a + b = \dfrac{\pi}{3}$. Arătați că $2\cos b = \cos a + \sqrt{3}\sin a$.

Subiectul al II-lea

1. Se notează $D(x, y)$ determinantul matricei $A(x, y) = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & y & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Calculați $D(-1, 2)$.
b) Determinați numărul real q pentru care matricea $A(2, q)$ are rangul egal cu 2.
c)* Arătați că există cel puțin o pereche (x, y) de numere reale, cu $x \neq y$, pentru care $D(x, y) = D(y, x)$.

2. Se notează cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului $f = X^3 + X - m$, unde m este un număr real.
a) Determinați m astfel încât restul împărțirii polinomului $f(X)$ la $X - 1$ să fie egal cu 8.
b) Arătați că numărul $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este întreg, pentru orice $m \in \mathbb{R}$.
c)* În cazul $m = 2$, determinați patru numere întregi a, b, c, d, cu $a > 0$, astfel încât polinomul $g = aX^3 + bX^2 + cX + d$ să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.
a) Calculați $f'(0)$.
b) Arătați că, pentru fiecare număr natural $n \geq 2$, ecuația $f(x) = n$ are exact o soluție în intervalul $(0, +\infty)$.
c)* Fie x_n unica soluție din intervalul $(0, +\infty)$ a ecuației $f(x) = n$, unde n este număr natural, $n \geq 2$. Arătați că $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ și se notează cu S suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = \frac{\pi}{2}$.
a) Calculați aria suprafeței S.
b) Calculați volumul corpului obținut prin rotația suprafeței S în jurul axei Ox.
c) Demonstrați că $\int_0^{2\pi} f^n(kx)\,dx = \int_0^{2\pi} f^n(x)\,dx$ pentru orice numere naturale n, $k \geq 1$.

Testul 10

Bacalaureat, august 2012. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Arătați că $\log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3}) + \log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = 2$.
2. Calculați distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5x + 4$ cu axa Ox.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 3^{x+1} = 4$.
4. Determinați rangul termenului care conține x^{14} în dezvoltarea binomului $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20}$, $x > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

5. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3, 3)$ și este paralelă cu dreapta d de ecuație $3x + 2y - 1 = 0$.

6. Determinați măsura unghiului C al triunghiului ABC, știind că $BC = 2$, $AB = \sqrt{2}$ și măsura unghiului BAC este egală cu 45°.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} -x + ay + (2a+4)z = 1 \\ (a+2)x + ay + (a+1)z = 1 \\ (a+1)x + (2a-1)y + 3z = 2 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că determinantul matricei sistemului este egal cu $3a^3 + 9a^2 - 3a - 9$.
b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul este compatibil determinat.
c) Pentru $a = -2$, rezolvați sistemul.

2. Se consideră polinomul $f = X^8 + \hat{4}X^4 + \hat{3}$, $f \in \mathbb{Z}_5[X]$.

a) Arătați că $a^5 = a$, pentru orice $a \in \mathbb{Z}_5$.

b) Arătați că polinomul f este reductibil peste $\mathbb{Z}_5$.

c) Arătați că polinomul f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_5$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x}$.

b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că, pentru orice număr real $m > 0$, ecuația $f(x) = m$ are o soluție unică în $\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul p, se consideră numărul $I_p = \int_0^1 x^p e^{x^2} dx$.

a) Calculați I_1.
b) Arătați că $2I_p + (p-1)I_{p-2} = e$, pentru orice $p \geq 3$.
c)* Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^2} \left(e^{\frac{1^2}{n^2}} + 2e^{\frac{2^2}{n^2}} + \ldots + ne^{\frac{n^2}{n^2}} \right)$.

Testul 11

Bacalaureat, iunie 2012. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Calculați modulul numărului complex $(1 + i)^2$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=-x-2$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $2^{x+1}\le 4$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$, elementele submulțimii alese să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5. Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}-\vec{j}$. Determinați numărul real a pentru care $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$.

6. Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=4$, $AC=5$ și $BC=7$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}2x+y+3z=0\\x+2y+3z=0\\x+y+mz=0\end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Calculați determinantul matricei sistemului.

b) Determinați valorile lui m pentru care sistemul are soluție unică.

c) În cazul $m=2$, determinați soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0>0$ și $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $G=\left\{X(p)=I_2+pA\,\middle|\,p\in\mathbb{R}^*\setminus\{-1\}\right\}$.

a) Arătați că $X(p)\cdot X(q)\in G$, pentru orice $X(p), X(q)\in G$.

b) Admitem că $(G,\cdot)$ este grup comutativ având elementul neutru $X(0)$. Determinați inversul elementului $X(p)$ în acest grup.

c)* Rezolvați ecuația $(X(p))^3=I_2+7A$, unde $X(p)\in G$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-12x$.

a) Arătați că funcția f este crescătoare pe intervalul $[2,\infty)$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{f(x)}$.

c)* Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care ecuația $f(x)=a$ are trei soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$.

a) Arătați că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $(-1,\infty)$.

b) Calculați $\int_0^1\dfrac{f(x)}{x+1}\,dx$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_x^{2x}f(t)dt}{x}$.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 12

Bacalaureat, iunie 2012, subiecte de rezervă. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Calculați partea reală a numărului complex $(1+2i)^2$.

2. Se notează cu x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-3x+a=0$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați a pentru care $x_1+x_2+x_1x_2=5$.

3. Se notează cu g inversa funcției bijective $f:(0,\infty)\to(4,\infty)$, $f(x)=2^x+3$. Determinați $g(5)$.

4. Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile lui A, aceasta să conțină exact trei elemente.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$ și $B(7,12)$. Determinați coordonatele punctului M, știind că $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

6. Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, știind că $\frac{\sin x+2\cos x}{\cos x}=3$.

Subiectul al II-lea

1. Se notează cu $D(a,b,c)$ determinantul matricei $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2a & 2b & 2c\\ 3a^2 & 3b^2 & 3c^2\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Calculați $D(0,1,-1)$.

b) Determinați numerele reale x pentru care matricea $A(0,1,x)$ are rangul egal cu 2.

c)* Arătați că, dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi și $D(a,b,c)=0$, atunci triunghiul este isoscel.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_5,+,-)$ și funcția $f:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_5$, $f(x)=x^3+\hat{2}x^2+\hat{4}x+\hat{3}$.

a) Calculați $f(\hat{1})+f(\hat{3})$.

b) Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul $p=X^3+\hat{2}X^2+\hat{4}X+\hat{3}\in\mathbb{Z}_5[X]$.

c)* Arătați că f nu este surjectivă.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+9}{\sqrt{x^2+3}}$.

a) Arătați că $f'(x)\sqrt{x^2+3}=\frac{3-9x}{x^2+3}$, pentru orice număr real x.

Scanned with OKEN Scanner

b) Determinați asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

a) Arătați că funcția $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\ln x-x$ este o primitivă a funcției f.

b) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

c)* Arătați că $(p+1)\int_1^x f^p(t)\,dt+\int_1^x f^{p+1}(t)\,dt=xf^{p+1}(x)$, pentru orice $x\geq 1$ și orice $p>0$.

Testul 13

Bacalaureat, sesiunea specială pentru olimpici, iunie 2012. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Determinați numărul real m, știind că mulțimile $A=\{2\}$ și $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2+mx+4=0\}$ sunt egale.

2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $3^{\log_3 x}<1$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare unul dintre numerele naturale de două cifre, acesta să fie format doar din cifre impare.

5. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+a\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}+(2a-3)\vec{j}$ sunt coliniari.

6. Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB=AC=5$ și $BC=6$.

Subiectul al II-lea

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}\cos x&0&i\sin x\\0&1&0\\i\sin x&0&\cos x\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $\det(A(\pi))$.

b) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x, y\in\mathbb{R}$.

c) Determinați numerele reale x pentru care $(A(x))^{2012}=I_3$.

2. Pe mulțimea $G=(0,1)$ se definește legea asociativă $x\circ y=\dfrac{xy}{2xy-x-y+1}$.

a) Arătați că $e=\dfrac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

b) Arătați că orice element din mulțimea G este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

c) Arătați că funcția $f:G\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,\circ)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{f(x)}$.

b) Demonstrați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Arătați că funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numerele $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$ și $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

a) Calculați J_1.

b) Calculați I_1.

c) Demonstrați că $J_{2n}-J_{2n+2}=I_{2n}$, pentru orice număr natural nenul n.

Testul 14

Bacalaureat, model MECTS 2012. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Determinați numărul elementelor mulțimii $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,|x+1|\le 24\}$.

2. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a dreptei $y=2x-1$ cu parabola $y=2x^2-3x+1$.

3. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\sqrt[3]{1+7x}=1+x$.

4. Se consideră mulțimea $A=\{1,\ 2,\ ...,\ 10\}$. Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A, submulțimi care conțin exact două numere impare.

5. Determinați ecuația mediatoarei segmentului AB, unde $A(1,-2)$ și $B(3,4)$.

6. Știind că $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ și $\cos 2x=\dfrac{1}{3}$, calculați $\sin x$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}x+my+m^2z=0\\ mx+m^2y+z=0\\ m^2x+y+mz=0\end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Determinați valorile lui m pentru care determinantul matricei sistemului este nul.

b) Arătați că, pentru nicio valoare a lui m, sistemul nu are o soluție (x_0,y_0,z_0), cu x_0, y_0, z_0 numere reale strict pozitive.

c) Arătați că rangul matricei sistemului este diferit de 2, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{2}(x+y-xy+1)$.

a) Verificați dacă legea de compoziție „$*$” este asociativă.
b) Arătați că legea de compoziție „$*$” admite element neutru.
c)* Rezolvați ecuația $x*x*x=3$, $x\in\mathbb{R}$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+2$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f(-x)}$.

b) Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[-1,1]$.

c)* Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $f(x)=m$ are trei soluții reale distincte.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx$.

a) Calculați I_2.
b) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.
c)* Demonstrați că $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}$, pentru orice $n\geq 2$.

Testul 15

Bacalaureat, august 2011. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, cu termeni pozitivi, dacă $b_1+b_2=6$ și $b_3+b_4=24$.

2. Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1-a^2)x+4$ este constantă.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\left(\frac{3}{2}\right)^x<\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

4. Determinați numărul termenilor raționali ai dezvoltării $\left(1+\sqrt{2}\right)^{10}$.

5. Calculați distanța de la punctul $A(2,2)$ la dreapta determinată de punctele $B(1,0)$ și $C(0,1)$.

6. Triunghiul ABC are măsura unghiului A de 60°, $AB=4$ și $AC=5$. Calculați $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră mulțimea $H=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,|\,A^2=A\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Arătați că $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$.

b) Demonstrați că, dacă $A \in H$, atunci $A^n \in H$, pentru orice număr natural nenul n.

c)* Arătați că mulțimea H este infinită.

2. Se consideră polinomul $f = (X+i)^{10} + (X-i)^{10}$, având forma algebrică:

$f = a_{10}X^{10} + a_9X^9 + ... + a_1X + a_0$, unde $a_0, a_1, ..., a_{10} \in \mathbb{C}$.

a) Determinați restul împărțirii polinomului f la $X - i$.

b) Arătați că toți coeficienții polinomului f sunt numere reale.

c)* Demonstrați că toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^5 - 5x + 4$.

a) Calculați $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

b) Arătați că graficul lui f are un punct de inflexiune.

c)* Arătați că, pentru orice $m \in (0, 8)$, ecuația $f(x) = m$ are exact trei soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = e^{-x}$.

a) Calculați $\int_0^1 g(x)\,dx$.

b) Calculați $\int_0^1 x^5 g(x^3)\,dx$.

c)* Demonstrați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, definit prin $I_n = \int_1^n g(x^3)\,dx$, este convergent.

Testul 16

Bacalaureat, iunie 2011. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Arătați că $(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \cap \mathbb{Z} = \{2\}$.

2. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care dreapta $x = 2$ este axa de simetrie a parabolei $y = x^2 + mx + 4$.

3. Rezolvați în mulțimea $[0, 2\pi)$ ecuația $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

4. Determinați $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, astfel încât $C_n^2 + A_n^2 = 18$.

5. Determinați $a \in \mathbb{R}$, pentru care dreptele $d_1: ax + y + 2011 = 0$ și $d_2: x - 2y = 0$ sunt paralele.

Scanned with OKEN Scanner

6. Fie x un număr real care verifică egalitatea $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$. Arătați că $\sin 2x = 1$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $\left(A(x) - A(y)\right)^{2011} = O_3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Determinați inversa matricei $A(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră $\alpha \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^3 + (1-\alpha)X^2 + (\alpha-2)iX + \alpha + (\alpha-2)i \in \mathbb{C}[X]$.

a) Arătați că polinomul f are rădăcina -1.

b)* Arătați că, dacă p, q sunt numere complexe și polinomul $g = X^2 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$ are două rădăcini nereale distincte, complex conjugate, atunci p și q sunt numere reale și $p^2 < 4q$.

c)* Determinați $\alpha \in \mathbb{C}$ pentru care polinomul f are două rădăcini distincte, complex conjugate.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$.

a) Arătați că funcția f este strict descrescătoare pe $(1, \infty)$.

b) Determinați asimptotele graficului funcției f.

c) Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} xf(x)$.

2. Se consideră funcția $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) Calculați $\int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right) dx$.

b) Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ și de axa Ox.

c)* Arătați că $(4n+2)\int_1^2 f^n(x)\,dx + n\int_1^2 f^{n-1}(x)\,dx = 0$.

Testul 17

Bacalaureat, sesiunea specială pentru olimpici, 2011. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Calculați modulul numărului complex $z = (3+4i)(5-12i)$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Punctul $V(2, 3)$ este vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+ax+b$. Calculați $f(3)$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left|\sqrt{x}-1\right|=2$.

4. Determinați numerele naturale n, $n\geq 2$, pentru care $C_n^2\leq 4\cdot A_n^1$.

5. Fie $G(1, 0)$ centrul de greutate al triunghiului ABC, unde $A(2, 5)$ și $B(-1,-3)$. Determinați coordonatele punctului C.

6. Calculați raza cercului înscris în triunghiul ABC, știind că $AB=AC=5$ și $BC=8$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ a & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{Z}$.

a) Calculați $\det(A)$.

b) Arătați că $\operatorname{rang}(A)=3$, oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$.

c)* Determinați a, știind că matricea A^{-1} are toate elementele întregi.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+bX^2+cX+36\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4\in\mathbb{C}$.

a) Calculați $a+b+c$, știind că restul împărțirii lui f la $X-1$ este 40.

b) Determinați $c\in\mathbb{R}$, astfel încât $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{1}{3}$.

c)* Arătați că, dacă $a=6$ și $b=18$, atunci polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^4-4\ln x$.

a) Arătați că funcția este strict descrescătoare pe $(0,1]$.

b) Determinați asimptotele verticale ale graficului funcției f.

c)* Demonstrați că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, există un unic număr $x_n\in(0,1]$ astfel încât $f(x_n)=n$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$.

a) Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=\frac{\pi}{2}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

c)* Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^n(x)\,dx$ este convergent.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 18

Bacalaureat, model MECTS, 2011. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Calculați modulul numărului complex $z=1-i\sqrt{3}$.

2. Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

3. Știind că doi termeni ai unei progresii geometrice sunt $b_3=6$ și $b_5=24$, determinați termenul b_7.

4. Determinați $x>0$, știind că $\log_a x=2\log_a 3-3\log_a 2$, unde $a>0, a\neq 1$.

5. Scrieți ecuația dreptei care conține punctul $A(3,2)$ și este perpendiculară pe dreapta $d: x+2y+5=0$.

6. Știind că $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ și $\sin x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, calculați $\cos x$.

Subiectul al II-lea

1. Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -2x & 4x^2\\ 0 & 1 & -4x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ din mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Calculați $\left(A(2)-A(0)\right)^{2010}$.

b) Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x, y\in\mathbb{R}$.

c) Demonstrați că matricea $A(x)$ este inversabilă și calculați inversa ei.

2. Pe mulțimea $G=(0,1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{xy}{2xy-x-y+1}$.

a) Cercetați dacă $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii „$*$”.

b) Arătați că orice element din mulțimea G este simetrizabil în raport cu legea „$*$”.

c) Demonstrați că funcția $f:G\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\frac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $\left(\mathbb{R}_+^*,\cdot\right)$.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+1$.

a) Calculați $f'(5)$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n$.

c) Arătați că ecuația $f'(x)=0$ are exact trei soluții reale distincte.

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 \frac{\left(x^2+x+1\right)^n-x}{x^2+1}dx$.

a) Calculaţi I_0.

b) Cercetaţi dacă $I_2-I_0\in\mathbb{Q}$.

c) Arătaţi că $I_{4n+1}\in\mathbb{Q}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Testul 19

Bacalaureat, august 2010. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Care dintre numerele $2\sqrt[3]{6}$ şi $3\sqrt[3]{3}$ este mai mare?

2. Determinaţi mulţimea valorilor funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$.

3. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $x^2-x+m^2=0$ are două soluţii reale egale.

4. Determinaţi numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $\left(1+\sqrt[4]{2}\right)^{41}$.

5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(-2,3)$, $C(1,-3)$ şi $D(4,a)$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinaţi valoarea lui a, astfel încât dreptele AB şi CD să fie paralele.

6. Fie mulţimea $A=\left\{0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$. Care este probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea A, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $\sin^3 x+\cos^3 x=1$?

Subiectul al II-lea

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\a&0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, notăm $B_n=A^n+A^{n+1}+A^{n+2}$.

a) Arătaţi că $A^{2010}=a^{670}\cdot I_3$.

b) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $\det(B_1)=0$.

c) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care toate matricele B_n ($n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$) sunt inversabile.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x*y=2xy-3x-3y+m$, $m\in\mathbb{R}$. Fie mulţimea $M=\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

a) Determinaţi $m\in\mathbb{R}$, astfel încât $x*y\in M$, pentru orice $x,y\in M$.

b) Pentru $m=6$, arătaţi că $(M,*)$ este grup.

Scanned with OKEN Scanner

c) Demonstrați că, dacă $m = 6$, atunci funcția $f: M \to \mathbb{R}^*, f(x) = 2x - 3$ este un izomorfism între grupurile $(M, *)$ și $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1}$.

a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x = 0$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f spre $+\infty$.

c)* Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{-\sqrt[3]{2n+1}}\right)^{\sqrt[3]{2n}}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{x^2+x+1}dx$.

a) Calculați $I_1 + I_2 + I_3$.

b) Arătați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

c)* Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Testul 20

Bacalaureat, sesiunea specială pentru olimpici, 9 iunie 2010. Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

Subiectul I

1. Calculați $\sqrt[3]{8} + \log_2 \dfrac{1}{4}$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + m$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care minimul funcției f este egal cu 2.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{6-x^2} = 25$.

4. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $A_x^2 = 12$.

5. Scrieți ecuația dreptei determinate de punctele $A(2, 3)$ și $B(4, 5)$.

6. Calculați $\cos x$, știind că $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \dfrac{3}{5}$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $A^2 + A$.

b) Demonstrați că $\det(A) = \det(A + I_2)$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Calculați $A+A^2+A^3+...+A^{10}$.

2. Se consideră ecuația $x^3+2x^2+4=0$ cu soluțiile x_1, x_2, x_3.

a) Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$.

b) Calculați $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$.

c) Calculați valoarea determinantului $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & 1:x_2 & 1:x_3 \\ x_2 & 1:x_3 & 1:x_1 \\ x_3 & 1:x_1 & 1:x_2 \end{vmatrix}$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre ∞ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că $-\frac{3}{5}\le f(x)\le 0$, oricare ar fi $x\in[1,2]$.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=1+\sqrt{x}$.

a) Calculați $\int_0^{2010}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)dx$.

b) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-1$.

c) Folosind, eventual, inegalitatea $\sqrt{x}\le x$, adevărată pentru orice $x\in[1,\infty)$, demonstrați că $\int_1^2 f^{2010}(x)dx\le\frac{3^{2011}-2^{2011}}{2011}$.

Testul 21

Bacalaureat, sesiunea specială pentru olimpici, 9 iunie 2010. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Calculați produsul de numere complexe $i\cdot i^3\cdot i^5\cdot i^7\cdot i^9\cdot i^{11}$.

2. Verificați dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+x+1$ este injectivă.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{4^{2x}}=8$.

4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, produsul cifrelor sale să fie impar?

5. Un paralelogram $ABCD$ are $AD=6$, $AB=4$, $m(\sphericalangle ADC)=120°$. Calculați $\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right|$.

Scanned with OKEN Scanner

6. Calculați $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Subiectul al II-lea

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 3 & -2\end{pmatrix}$.

a) Verificați dacă $\det(A)=\det(B)$.

b) Demonstrați că, pentru orice matrice $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, are loc egalitatea:

$X^2=(a+d)X-(ad-bc)I_2$.

c)* Demonstrați că $A^n-B^n=(2^n-1)(A-B)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$.

2. Fie polinomul $f=nX^n+(n-1)X^{n-1}+\ldots+2X^2+X$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

a) Calculați suma coeficienților polinomului f.

b) Pentru $n=4$, determinați restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2-1$.

c) Demonstrați că, dacă n este număr par, atunci restul împărțirii polinomului f la $g=X^2-1$ este egal cu $\frac{n^2}{4}X+\frac{n(n+2)}{4}$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1-\sqrt{x^2+2}$.

a) Arătați că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $-\infty$.

c) Arătați că f este concavă pe $\mathbb{R}$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, definit prin $I_n=\int_1^e \ln^n x\,dx$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculați I_2.

b) Arătați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

c)* Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Testul 22

Bacalaureat, 30 iunie 2010. Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

Subiectul I

1. Calculați $\log_2\frac{1}{8}+\sqrt[3]{27}$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x+3$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2-3^{x^2-1}=1$.

4. Determinați câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$.

5. Se consideră vectorii $\vec{v_1}=2\vec{i}-\vec{j}$ și $\vec{v_2}=\vec{i}+3\vec{j}$. Determinați coordonatele vectorului $\vec{w}=2\vec{v_1}-\vec{v_2}$.

6. Un triunghi dreptunghic are catetele $AB=3$, $AC=4$. Determinați lungimea înălțimii duse din A.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2-A.

b) Determinați inversa matricei A.

c) Rezolvați ecuația $A\cdot X=\begin{pmatrix}2010 & 2010\\ 2009 & 2010\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinoamele $f, g\in\mathbb{Z}_3[X]$, $f=X^2+X$, $g=X^2+\hat{2}X+a$, cu $a\in\mathbb{Z}_3$.

a) Calculați $f(\hat{0})+f(\hat{1})$.

b) Determinați rădăcinile polinomului f.

c) Demonstrați că $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})=g(\hat{0})+g(\hat{1})+g(\hat{2})$, pentru orice $a\in\mathbb{Z}_3$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\cdot e^x$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[-2, 0]$.

c)* Demonstrați că $0\le f(x)+f(x^2)\le\frac{e^2+1}{e}$, oricare ar fi $x\in[-1, 0]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{x}$.

a) Calculați $\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx$.

b) Determinați volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

c) Calculați $\int_1^e f(x)\cdot\ln x\,dx$.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 23

Bacalaureat, 30 iunie 2010. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Calculați $\left((1-i)(i-1)\right)^4$.

2. Arătați că funcția $f:(-3,3)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\frac{3-x}{3+x}$ este impară.

3. Determinați soluțiile întregi ale inecuației $x^2+2x-8<0$.

4. Câte elemente din mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,100\}$ sunt divizibile cu 4 sau cu 5?

5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $M(1,-2)$, $N(-3,-1)$ și $P(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului Q, astfel încât $MNPQ$ să fie paralelogram.

6. Triunghiul ABC are $AB=6$, $AC=3$ și $BC=5$. Calculați lungimea înălțimii AD.

Subiectul al II-lea

1. Fie sistemul $\begin{cases} x-2y-8z=-65 \\ 3x+y-3z=22 \\ x+y+z=28 \end{cases}$, $x,y,z\in\mathbb{R}$ și matricea asociată sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că rangul matricei A este egal cu 2.

b) Rezolvați sistemul în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

c) Determinați numărul soluțiilor sistemului în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

2. Fie mulțimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii A.

b) Arătați că există o matrice nenulă $M\in A$, astfel încât $\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix}\cdot M=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

c) Rezolvați în mulțimea A ecuația $X^2=I_2$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}$.

a) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

b) Studiați monotonia funcției f.

c) Determinați punctele de inflexiune ale funcției f.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}, I_n=\int_n^{n+1}\frac{2x-1}{x}dx$.

a) Arătați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

Scanned with OKEN Scanner

b) Arătați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} n(2-I_n)$.

Testul 24

Bacalaureat, subiect de rezervă pentru proba din 30 iunie 2010. Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

Subiectul I

1. Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, astfel încât $a_3=5$ și $a_5=11$. Calculați suma primilor șapte termeni ai progresiei.
2. Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$, $g(x)=x+3$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.
4. Calculați $a\cdot b$, știind că $a+b=150$ și numărul a reprezintă 25% din numărul b.
5. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care punctele $A(2, 3)$, $B(4, 5)$ și $C(m+1, m^2)$ sunt coliniare.
6. Calculați $\cos x$, știind că $\sin x=\frac{1}{3}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul al II-lea

1. Pentru $m\in\mathbb{R}$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} mx+y=-1\\ x+y+z=3\\ x+y+mz=0\end{cases}$, unde $x, y, z\in\mathbb{R}$.
   a) Calculați determinantul matricei A.
   b) Rezolvați sistemul pentru $m=0$.
   c) Verificați dacă sistemul este incompatibil pentru $m=1$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x*y=(x-4)(y-4)+4$.
   a) Demonstrați că legea „$*$” este asociativă.
   b) Demonstrați că $x*y\in(4,+\infty)$, oricare ar fi $x, y\in(4,+\infty)$.
   c) Calculați $1*2*3*\ldots*2010$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$.
   a) Calculați $f'(x)$.
   b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(2, 5)$.
   c) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră funcțiile $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ și $g(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$.

a) Demonstrați că funcția g este o primitivă a funcției f.

b) Calculați $\int_1^4 f(x)dx$.

c) Calculați $\int_1^{e^2} 2^{g(x)} f(x)dx$.

Testul 25

Bacalaureat, subiect de rezervă pentru proba din 30 iunie 2010. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Arătați că numărul $i\sqrt{2}-1$ este o soluție a ecuației $z^2+2z+3=0$.

2. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-a$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care $(f\circ g)(x)>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-2x+1}=x+1$.

4. Determinați numărul elementelor mulțimii $A=\{1, 3^3, 3^6, 3^9,..., 3^{2010}\}$.

5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 5)$, $B(-2, 5)$ și $C(6, -3)$. Scrieți ecuația medianei corespunzătoare laturii BC, în triunghiul ABC.

6. Calculați $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+2ay+z=-1 \\ 2ax+y+(a+1)z=0 \end{cases}$, unde $x, y, z\in\mathbb{R}$ și a este un parametru real.

a) Rezolvați sistemul pentru $a=0$.

b) Verificați dacă, pentru $a=-1$, sistemul este compatibil.

c) Determinați $a\in\mathbb{R}$, pentru care sistemul are soluție unică.

2. Fie $m, n\in\mathbb{R}$ și polinomul $f=X^3-3X^2+mX-n$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3\in\mathbb{C}$.

a) Determinați valorile reale m și n, pentru care $x_1=2+i$.

b) Determinați valorile reale m și n, pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $(X-1)^2$ este egal cu 0.

c) Arătați că, dacă toate rădăcinile polinomului f sunt reale și $m>0$, $n>0$, atunci x_1, x_2, x_3 sunt strict pozitive.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

a) Arătați că dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică pentru graficul funcției f spre ∞.
b) Studiați derivabilitatea funcției f în punctul $x=-2$.
c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln f(x)}{\ln x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\cos x}{2-\cos^2 x}$.

a) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

b) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $[0;\frac{\pi}{2}]$.

c) Calculați $\int_0^{2\pi} xf(x)dx$.

Testul 26

Bacalaureat, sesiunea specială pentru olimpici, 28 mai 2009. Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

Subiectul I

1. Calculați $\log_6 24-\log_6 4$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x+2$. Calculați $f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(2009)$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-5}=2$.

4. Determinați numărul natural n, $n\geq 5$, știind că $\dfrac{(n-3)!}{(n-5)!}=6$.

5. Determinați $a\in\mathbb{R}$, știind că lungimea segmentului determinat de punctele $A(-1,2)$ și $B(4-a,4+a)$ este egală cu 5.

6. Calculați $\cos^2 45^\circ+\sin^2 135^\circ$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}2x-5y+4z=0\\-3x+y+z=-1\\2x-z=a\end{cases}$, cu $a\in\mathbb{R}$. Fie A matricea sistemului.

a) Calculați determinantul matricei A.
b) Pentru $a=1$, rezolvați sistemul.
c) Determinați cea mai mică valoare a numărului natural a pentru care soluția sistemului este formată din trei numere naturale.

Scanned with OKEN Scanner

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + y + 1$.

a) Calculați $2008 \circ 2009$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $x \circ x^2 \leq 3$.

c) Fie mulțimea $A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, n \geq 2 \text{ și } C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 = n + 6 \right\}$. Determinați numărul elementelor mulțimii A.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$.

a) Verificați dacă $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x}$, pentru orice $x > 0$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1, 2)$.

c) Arătați că $2\sqrt{x} \geq 2 + \ln x$, pentru orice $x > 0$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră funcțiile $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + (1 - x)^n$.

a) Determinați mulțimea primitivelor funcției f_2.

b) Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x \cdot f_2(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$, $x = 1$.

c) Arătați că $\int_0^1 f_n(x)dx \geq \int_0^1 f_{n+1}(x)dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Testul 27

Bacalaureat, sesiunea specială pentru olimpici, 28 mai 2009. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Ordonați crescător numerele $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{8}$.

2. Determinați funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, știind că graficul său și graficul funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -3x + 3$ sunt simetrice față de dreapta $x = 1$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$.

4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.

5. Determinați ecuația medianei duse din vârful A al triunghiului ABC, unde $A(1, 2)$, $B(2, 3)$ și $C(2, -5)$.

6. Arătați că $\operatorname{ctg} 2 = \dfrac{\operatorname{ctg} 1 - \operatorname{tg} 1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul al II-lea

1. Fie $a, b, c, d > 0$, matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și funcția $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Se notează $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că dacă $\det(A)=0$, atunci funcția f este constantă.

b) Arătați că dacă $\det(A)\neq 0$, atunci funcția f este injectivă.

c) Arătați că $\underbrace{(f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x)=\dfrac{a_nx+b_n}{c_nx+d_n}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{I_2+aA+bB \,\middle|\, a,b\in\mathbb{R},\ a\neq -1\right\}$.

a) Arătați că orice matrice din G este inversabilă.

b) Arătați că G este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Arătați că ecuația $X^2=I_2$ are o infinitate de soluții în G.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcțiile $f_n:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n+\ln x$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Determinați asimptotele graficului funcției f_1.

b) Demonstrați că funcțiile $g_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g_n(x)=f_n(x)+f_n\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sunt convexe.

c) Admitem că ecuația $f_n(x)=2^n$ are soluția unică x_n. Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ converge la 2.

2. Fie $a\in[0,1]$ și $I_n=\int_0^a \dfrac{t^n}{t+1}dt$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculați I_2.

b) Demonstrați că $I_n+I_{n-1}=\dfrac{a^n}{n}$, oricare ar fi $n\geq 2$.

c) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.

Testul 28

Bacalaureat, 30 iunie 2009. Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

Subiectul I

1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, astfel încât $a_1=3$ și $a_3=7$. Calculați suma primilor 10 termeni ai progresiei.

Scanned with OKEN Scanner

2. Determinați $m \in \mathbb{R}$, pentru care punctul $A(m,-1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+1$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x+3)=2$.

4. Determinați numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi cu 5 elemente.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(1,2)$ și $C(2,-1)$. Calculați distanța de la punctul C la mijlocul segmentului AB.

6. Triunghiul ABC are $AB=AC=8$ și $m(\sphericalangle BAC)=30°$. Calculați aria triunghiului ABC.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$ și funcția $f:\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X)=X^2-3X+I_3$.

a) Calculați $\det(I_3+B)$.

b) Demonstrați că $f(A)=I_3+B$.

c) Arătați că $(f(A))^3=I_3+3B+3B^2$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-3$ și $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x\circ x=x*x$.

b) Determinați numărul întreg a cu proprietatea că $x\circ a=3$, oricare ar fi numărul întreg x.

c) Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases}x*(y+1)=4\\(x-y)\circ 1=5\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\dfrac{3}{x}$.

a) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}^*$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$.

a) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea, în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 29

Bacalaureat, 30 iunie 2009. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Determinați partea reală a numărului complex $(\sqrt{3}+i)^6$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Calculați $(f\circ f)(512)$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\cos 2x+\sin x=0$.

4. Se consideră mulțimea $M=\{0,1,2,3,4,5\}$. Determinați numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c\in M$ și $a<b<c$.

5. Calculați distanța dintre dreptele paralele de ecuații $x+2y=6$ și $2x+4y=11$.

6. Paralelogramul $ABCD$ are $AB=1$, $BC=2$ și $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. Calculați produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

Subiectul al II-lea

1. Pentru $a,b,c\in\mathbb{R}^*$, se consideră sistemul $\begin{cases}ax+by+cz=b\\cx+ay+bz=a\\bx+cy+az=c\end{cases}$, $x,y,z\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că determinantul sistemului este $\Delta=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

b) Rezolvați sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

c) Știind că $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, arătați că sistemul are o infinitate de soluții (x,y,z), astfel încât $x^2+y^2=z-1$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\0 & c\end{pmatrix}\middle|\ a,b,c\in\mathbb{Z}_4\right\}$.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii G.

b) Dați un exemplu de matrice $A\in G$ cu proprietatea că $A\neq O_2$ și $\det(A^2)=\hat{0}$.

c) Determinați numărul soluțiilor ecuației $X^2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\\hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$, $X\in G$.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$.

a) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

b) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

c) Demonstrați că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm funcția $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = |\sin nx|$ și numărul $I_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f_n(x)}{x} dx$.

a) Calculați $\int_0^{\pi} f_2(x)dx$.

b) Arătați că $I_n \leq \ln 2$.

c) Arătați că $I_n \geq \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}\right)$.

Testul 30

Bacalaureat, subiect de rezervă pentru sesiunea din 30 iunie 2009. Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

Subiectul I

1. Calculați $C_3^2 + 3!$.

2. Determinați soluțiile reale ale ecuației $\log_5(3x+4) = 2$.

3. Calculați $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - x - 2 = 0$.

4. Se consideră funcția $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$. Determinați mulțimea valorilor funcției f.

5. Fie punctele $A(2,-1)$ și $B(-1,3)$. Determinați numerele reale a și b astfel încât $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 4$, $AC = \sqrt{7}$ și $BC = \sqrt{3}$. Calculați măsura unghiului B.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 2x^2+2x \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $f(0) + f(1)$.

b) Arătați că $f(1) \cdot f(-1) = I_3$.

c) Demonstrați că $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$.

a) Rezolvați ecuația $\hat{2}x + \hat{5} = \hat{1}$, unde $x \in \mathbb{Z}_6$.

b) Calculați determinantul $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} \hat{2}x+y=\hat{4} \\ x+\hat{2}y=\hat{5} \end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}_6$.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3-3x^2+1$.

a) Calculați $f'(1)$.

b) Determinați intervalele de concavitate și intervalele de convexitate ale funcției f.

c) Arătați că $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\geq -\frac{1}{2}$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=e^x$ și $g(x)=e^{1-x}$.

a) Determinați mulțimea primitivelor funcției f.

b) Determinați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=xf(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Arătați că $\int_0^{\frac{1}{2}}(g(x)-f(x))dx\geq 0$.

Testul 31

Bacalaureat, 24 august 2009. Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

Subiectul I

1. Calculați $2\log_3 4-4\log_3 2$.

2. Determinați soluțiile reale ale ecuației $2^{x-1}+2^x=12$.

3. Determinați numărul natural n, $n\geq 1$ știind că $A_n^1+C_n^1=10$.

4. Fie funcția $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-4x+3$. Determinați mulțimea valorilor funcției f.

5. Se consideră triunghiul echilateral ABC înscris într-un cerc de centru O. Arătați că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

6. Calculați sin 135°.

Subiectul al II-lea

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $F=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}$.

a) Determinați numerele a, b și c, astfel încât $A+F=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&2&5\\0&0&2\end{pmatrix}$.

b) Arătați că pentru $a=c=0$ și $b=-1$ matricea A este inversa matricei F.

Scanned with OKEN Scanner

c) Rezolvați ecuația $F \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, unde $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x * y = 2xy - x - y + 1$.

a) Arătați că $x * y = xy + (1-x)(1-y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că legea de compoziție $*$ este asociativă.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * (1-x) = 0$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Calculați $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) + g(x^2) + g(x^3) + \ldots + g(x^{2009}) + x^{2010}}{x^{2009}}$.

2. Se consideră $I_n = \int_e^{e^2} x \ln^n x \, dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculați I_0.

b) Arătați că $I_n \leq I_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

c) Demonstrați că are loc relația $I_n = \dfrac{e^2(e^2 \cdot 2^n - 1)}{2} - \dfrac{n}{2} I_{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Testul 32

Bacalaureat, 24 august 2009. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Arătați că numărul $(1 + i\sqrt{3})^3$ este întreg.

2. Determinați imaginea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x + 2$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{-2x+1} = 5$.

4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a + b = 4$.

5. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-1, 1)$ și este perpendiculară pe dreapta $d : 5x - 4y + 1 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

6. Calculaţi perimetrul triunghiului ABC, ştiind că $AB=6$, $B=\frac{\pi}{4}$ şi $C=\frac{\pi}{6}$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Arătaţi că $\det(A)=(a-b)(a-1)$.

b) Calculaţi $\det(A-A^t)$.

c) Arătaţi că $\text{rang}(A)\geq 2$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X], f=X^3+pX^2+qX+r$, cu $p, q, r\in(0,\infty)$ şi cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Demonstraţi că f nu are rădăcini în intervalul $[0,\infty)$.

b) Calculaţi $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ în funcţie de p, q şi r.

c) Demonstraţi că, dacă a, b, c sunt trei numere reale, astfel încât $a+b+c<0$, $ab+bc+ca>0$ şi $abc<0$, atunci $a, b, c\in(-\infty, 0)$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+\ln(x^2+x+1)$.

a) Demonstraţi că funcţia f este strict crescătoare.

b) Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.

c) Arătaţi că graficul funcţiei f nu are asimptotă oblică spre $+\infty$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\{x\}(1-\{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a numărului real x.

a) Calculaţi $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Demonstraţi că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

c) Arătaţi că valoarea integralei $\int_a^{a+1} f(x)dx$ nu depinde de numărul real a.

Testul 33

Bacalaureat, subiect de rezervă pentru sesiunea din 24 august 2009. Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

Subiectul I

1. Arătaţi că $C_5^1+1=P_3$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Determinați punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-1$ cu axele de coordonate.

3. Demonstrați că, pentru orice $m\in\mathbb{R}$, ecuația $x^2+mx-m^2-1=0$ are două soluții reale distincte.

4. Determinați suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, știind că suma primilor doi termeni ai progresiei este egală cu 8, iar diferența dintre al doilea termen și primul termen este egală cu 4.

5. Calculați lungimea laturii AC a triunghiului ABC, știind că $m(\sphericalangle B)=45°$, $m(\sphericalangle C)=30°$ și $AB=10$.

6. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,-4)$ și $B(0,8)$. Calculați lungimea segmentului AM, dacă M este mijlocul segmentului AB.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ x-y+2z=a \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Calculați determinantul matricei asociate sistemului.

b) Pentru $a=0$, rezolvați sistemul.

c) Determinați $a\in\mathbb{R}$, astfel încât soluția sistemului să verifice relația $x=y+z$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X], f=X^3-2X^2+aX-8$.

a) Determinați numărul real a, astfel încât o rădăcină a polinomului f să fie egală cu 2.

b) Pentru $a=4$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2-2X+4$.

c) Demonstrați că, dacă $a\in(2,+\infty)$, atunci f nu are toate rădăcinile reale.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x^2+1}, & x\le 1 \\ \dfrac{2x+a}{x^2+2}, & x>1 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Determinați numărul real a, astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0=1$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Determinați numărul real a, astfel încât panta tangentei la grafic în punctul $(2, f(2))$ să fie egală cu 1.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{x^2}$.

a) Verificați dacă $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=e-1$.

b) Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.

c) Demonstrați că $1\le\int_0^1 f(x)dx\le e-1$

Scanned with OKEN Scanner

Testul 34

Bacalaureat, subiect de rezervă pentru sesiunea din 24 august 2009. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Determinați primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi b_1, 6, b_3, 24,...

2. Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(3-m^2)x+3$ să fie strict crescătoare.

3. Calculați $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}$.

4. Se consideră mulțimea M a tuturor funcțiilor definite pe $A=\{1,2,3\}$ cu valori în $B=\{5,6,7\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând o funcție din mulțimea M, aceasta să fie injectivă.

5. Se consideră punctul G, centrul de greutate al triunghiului ABC. Din punctul G se duce paralela la AB care intersectează dreapta BC în punctul P. Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât $\overrightarrow{GP}=m\overrightarrow{AB}$.

6. Calculați $\cos 2\alpha$, știind că $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

Subiectul al II-lea

1. Pentru $p, q, r \in \mathbb{C}$ se consideră sistemul $\begin{cases} x+py+p^2z=p^3 \\ x+qy+q^2z=q^3 \\ x+ry+r^2z=r^3 \end{cases}$.

a) Arătați că determinantul sistemului este $\Delta=(p-q)(q-r)(r-p)$.

b)* Dacă p, q, r sunt distincte, rezolvați sistemul.

c)* Arătați că, dacă sistemul are soluția $(-1, 1, 1)$, atunci cel puțin două dintre numerele p, q, r sunt egale.

2. Se consideră inelul $(A,+,\cdot)$, unde $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \ a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii A.

b)* Rezolvați în mulțimea A ecuația $X^2=I_2$.

c)* Arătați că $(A,+,\cdot)$ nu este corp.

Subiectul al III-lea

1. Fie $a \in \mathbb{R}$ și funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+x+a}{x^2-1}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^x$.

b) Determinați valoarea numărului a, știind că 3 este punct de extrem local al funcției f.

c) Determinați valoarea numărului a, știind că graficul funcției f are exact o asimptotă verticală.

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră funcția $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=1$ și, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, se definește funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt$.

a) Arătați că $f_1^2(x)=2f_2(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2}$.

c) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g:[0,\pi]\to[0,\pi]$, $g(x)=f_1(x)\sin x$ în jurul axei Ox.

Testul 35

Bacalaureat, 1 iulie 2008. Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

Subiectul I

1. Calculați $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}-\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=5-x$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.

3. Rezolvați ecuația $3^{1-x}=9$.

4. Rezolvați ecuația $\log_5(x+2)-\log_5(2x-5)=1$.

5. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1,-1)$ și este paralelă cu dreapta $y=x$.

6. Calculați perimetrul unui triunghi echilateral a cărui arie este egală cu $\sqrt{3}$.

Subiectul al II-lea

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $B=I_3+A$.

a) Calculați $A\cdot B$.

b) Calculați A^2+A^3.

c) Demonstrați că, dacă $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $A\cdot X=X\cdot A$, atunci există numerele reale a, b, c astfel încât $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+bX+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$ având rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$.

a) Determinați numărul real c, știind că $f(1)+f(-1)=2a+1$.

b) Știind că $a=-3$, $b=1$, $c=1$, determinați rădăcinile reale ale polinomului f.

Scanned with OKEN Scanner

c) Exprimați, în funcție de numerele reale a, b, c, determinantul $D=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

a) Verificați dacă $f'(x)=-\dfrac{x}{e^x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați asimptota către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Arătați că $f(x)\le 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}, f_n(x)=\dfrac{1}{x^n+4}$.

a) Calculați $\int (x+4)^2\cdot f_1(x)dx$, unde $x\in[0,1]$.

b) Calculați $\int_0^1 xf_2(x)dx$.

c) Arătați că aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_{2008}, axa Ox și dreptele $x=0$, $x=1$ este un număr din intervalul $\left[\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{4}\right]$.

Testul 36

Bacalaureat, subiect de rezervă pentru sesiunea din 1 iulie 2008. Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

Subiectul I

1. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=3^x+\log_3 x$. Calculați $f(1)$.

2. Demonstrați că șirul cu termenul general $a_n=2n+3$ verifică relația $a_{n+1}-a_n=2$, pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

3. Determinați punctul de intersecție a dreptei de ecuație $2x+y-4=0$ cu axa Ox.

4. Rezolvați sistemul $y=2x-1$, $y=x^2-3x+5$.

5. Determinați valoarea maximă a funcției $f:\{-1,0,1,2\}\to\mathbb{R}, f(x)=-2x+1$.

6. Triunghiul ABC este dreptunghic în C, iar raza cercului circumscris triunghiului este $R=10$. Calculați lungimea laturii AB.

Subiectul al II-lea

1. Pentru fiecare $a\in\mathbb{R}$, se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Calculați determinantul matricei $A(a)$, $a \in \mathbb{R}$.
b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul dat poate fi rezolvat prin metoda lui Cramer.
c) Pentru $a = 0$, rezolvați sistemul.

2. Se consideră polinoamele $f = (X+1)^{2008} + (X-1)^{2008}$ și $g = X+1$. Polinomul f are forma algebrică $f = a_{2008}X^{2008} + a_{2007}X^{2007} + ... + a_1X + a_0$, cu $a_0, a_1, ..., a_{2008} \in \mathbb{R}$.

a) Determinați a_0.
b) Calculați restul împărțirii polinomului f la polinomul g.
c) Calculați suma coeficienților polinomului f.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, pentru orice $x \neq 1$.
b) Determinați punctele de extrem ale funcției f.
c) Demonstrați că, pentru orice $a < 1$ și $b > 1$, are loc inegalitatea $f(a) - f(b) \leq -8$.

2. Se consideră funcția $f : \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2x-1}$.

a) Calculați $\int f^2(x)dx$.
b) Calculați $\int_1^5 \sqrt{2x-1}dx$.
c) Știind că $F : \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right) \to \mathbb{R}, F(x) = \dfrac{2x-1}{3}\sqrt{2x-1}$ este o primitivă a lui f, arătați că $\int_1^5 f(x) \cdot F^{2008}(x)dx = \dfrac{3^{6027}-1}{2009 \cdot 3^{2009}}$.

Testul 37

Bacalaureat, subiect de rezervă pentru sesiunea din 1 iulie 2008. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Determinați $x, y \in \mathbb{R}$, știind că $x(1+2i) + y(2-i) = 4+3i$.

2. Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât punctul $A(m-1, m^2-3m)$ să se afle în cadranul al II-lea.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_3(\log_4(x^2-17)) = 1$.

4. Se consideră dezvoltarea $\left(2\sqrt{x} + \dfrac{3}{x}\right)^6$, $x > 0$. Determinați termenul independent de x.

Scanned with OKEN Scanner

5. Fie, în sistemul de coordonate xOy, punctele $A(4,-2)$, $B(2,4)$, $C(m,n)$. Determinați $m,\ n \in \mathbb{R}$, astfel încât punctul C să fie centrul cercului circumscris triunghiului AOB.

6. Fie triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB = 5$ și $BC = 13$. Calculați lungimea segmentului BM, unde M este mijlocul segmentului AC.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați A^4.

b) Știind că matricea $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relațiile $B \cdot E_1 = E_1 \cdot B$ și $B \cdot E_2 = E_2 \cdot B$, demonstrați că există $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

c) Demonstrați că, dacă pentru orice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A^n \cdot X = X \cdot A^n$, atunci există $k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $n = 4k$.

2. Fie polinomul $f = 2X^4 + aX^3 + 3X^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Aflați rădăcinile polinomului f, știind că $a = b = 0$, $c = -5$.

b) Arătați că $(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_4)^2=\frac{3}{4}(a^2-16)$.

c) Pentru $a = 4$, determinați $b,\ c \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul f să aibă toate rădăcinile reale.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$.

a) Arătați că f nu este derivabilă în punctul $x_0 = 1$.

b) Determinați numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = m$, unde m este un parametru real.

c) Arătați că $3^{\sqrt{5}} < 5^{\sqrt{3}}$.

2. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x t\sin 2t\,dt$ și $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,dt$.

a) Calculați $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Arătați că $g'(x) = -x\sin 2x$, oricare ar fi $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

c) Demonstrați că $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}$, oricare ar fi $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 38

Bacalaureat, 25 august 2008. Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

Subiectul I

1. Calculați suma $1+5+9+13+...+25$.
2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-mx+2$, $m\in\mathbb{R}^*$. Determinați numărul real, nenul, m, știind că valoarea minimă a funcției este egală cu 1.
3. Calculați $\log_2(\text{tg}45°)+\log_2(\text{ctg}45°)$.
4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},...,\sqrt{11}\right\}$, acesta să fie irațional.
5. Determinați ecuația dreptei care conține punctul $A(2,-3)$ și este paralelă cu dreapta $x+2y+5=0$.
6. Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $AB=6$, $AC=10$ și $m(\sphericalangle A)=60°$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&a&1\\0&2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.
   a) Scrieți sistemul asociat ecuației matriceale $AX=B$.
   b) Determinați $a\in\mathbb{R}$, pentru care $\det(A)=0$.
   c) Dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{2,6\}$ și (x_0,y_0,z_0) este soluția sistemului $\begin{cases}x+2y-z=1\\2x+ay+z=1\\2y+3z=1\end{cases}$, demonstrați că $\frac{x_0}{z_0}$ nu depinde de a.
2. Se consideră polinomul $f=X^4+2X^2-3\in\mathbb{R}$ având rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3,x_4.
   a) Arătați că exact două dintre rădăcinile lui f sunt numere reale.
   b) Calculați produsul $P=(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)(2-x_4)$.
   c) Calculați suma $S=\frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}+\frac{1}{2-x_3}+\frac{1}{2-x_4}$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x-x$.
   a) Verificați dacă $f'(x)=\ln x$, pentru orice $x>0$.
   b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$.
   c) Demonstrați că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră funcțiile $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n + 1$.

a) Determinați $\int f_1(x)dx$, unde $x \in [0, 1]$.

b) Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{f_1(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0, x = 1$.

c) Arătați că $\int_0^1 \sqrt{f_n(x)}\, dx \leq \sqrt{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Testul 39

Bacalaureat, 25 august 2008. Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică. Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

Subiectul I

1. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 = -9$.

2. Determinați $a \in \mathbb{R}^*$, pentru care ecuația $ax^2 + (3a-1)x + a + 3 = 0$ are soluții reale.

3. Rezolvați în mulțimea $[0, 2\pi]$ ecuația $\cos 4x = 1$.

4. Determinați numărul funcțiilor $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cu proprietatea că $f(1) = f(2)$.

5. Calculați lungimea razei cercului înscris într-un triunghi cu lungimile laturilor de 13, 14, 15.

6. Triunghiul ABC are $\hat{B} = \frac{\pi}{6}, \hat{C} = \frac{\pi}{4}$. Demonstrați că $\frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Calculați $\det(A)$.

b) Determinați A^{-1}.

c) Arătați că $(I_3 + A)^n = 2^{n-1}(I_3 + A)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră polinomul $f_n = X^{3n} + 2X^2 - 4X - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

a) Arătați că f_1 nu este divizibil cu polinomul $g = X - 2$.

b) Determinați suma coeficienților câtului împărțirii polinomului f_3 la $X - 1$.

c) Arătați că restul împărțirii polinomului f_n la polinomul $h = X^2 + X + 1$ nu depinde de n.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = a^x - x^a$, $a > 0$.

a) Calculați $f'(1)$.

b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = a$.

c) Arătați că, dacă $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x > 0$, atunci $a = e$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_1^e \ln^n x\,dx$.

a) Calculaţi I_1.

b) Arătaţi că $I_n = e - nI_{n-1}$, oricare ar fi $n \geq 2$.

c) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Testul 40

Subiectul I

1. Dacă scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{7}$ este $\overline{0,a_1a_2a_3...}$, calculaţi $a_1 + a_2 + ... + a_{1000}$.

2. Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie ale dreptei $y = 2x - 1$ cu parabola $y = x^2 - 3x + 5$.

3. Rezolvaţi ecuaţia $\frac{1}{27^x} = \sqrt[3]{9}$.

4. Alegem, la întâmplare, un element al mulţimii $\{100,101,102,...,1000\}$. Aflaţi probabilitatea ca numărul ales să fie pătrat perfect.

5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 3)$ şi $D(a, 4)$, $a \in \mathbb{R}$. Determinaţi a pentru care dreptele AB şi CD sunt perpendiculare.

6. Fie $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$. Calculaţi $\sin 2x$.

Subiectul al II-lea

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Arătaţi că $A^2 = 3A$.

b) Demonstraţi că matricea $A - I_3$ este inversabilă şi inversa ei este $\frac{1}{2}A - I_3$.

c) Calculaţi A^{2015}.

2. Pe $G = (-1, \infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = x + y + xy$. Se ştie că $(G, *)$ este grup abelian.

a) Arătaţi că funcţia $f: G \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + 1)$, este izomorfism între grupurile $(G, *)$ şi $(\mathbb{R}, +)$.

b) Calculaţi $1 * \frac{1}{2} * ... * \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Arătaţi că mulţimea $H = \{a^2 - 1, a \in \mathbb{Q}^*\}$ este subgrup al grupului $(G, *)$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f:(-\infty, 2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(\frac{1}{2-x}\right)$. Considerăm șirul $(u_n)_{n\geq 1}$ definit prin $u_1=-2$, $u_{n+1}=f(u_n)$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătați că f este strict crescătoare.
b) Demonstrați că $f([-2, 0])\subset[-2, 0]$.
c) Arătați că șirul $(u_n)_{n\geq 1}$ este mărginit și strict crescător.

2. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{e^x+e^{-x}}$. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

a) Arătați că $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\operatorname{arctg}(e^x)$ este o primitivă a funcției f.

b) Demonstrați că $f(n+1)\leq I_n\leq f(n)$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$ și deduceți de aici că $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Testul 41

Subiectul I

1. Fie $z_1=a+i$ și $z_2=1-ai$, $a\in\mathbb{R}$. Determinați a, știind că $z_1\cdot z_2\in\mathbb{R}$.

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_2+a_5+a_7+a_{10}=4$, calculați $a_1+a_2+\ldots+a_{11}$.

3. Rezolvați ecuația $4^x+2^{x+1}-24=0$, $x\in\mathbb{R}$.

4. Câte dintre submulțimile mulțimii $\{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$ conțin cel puțin un număr impar?

5. Fie $ABCD$ un romb. Calculați $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$.

6. Calculați $\frac{1+\sin^2 x}{2+\operatorname{ctg}^2 x}+\frac{1+\cos^2 x}{2+\operatorname{tg}^2 x}$, $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul al II-lea

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix}$ și $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $A^2=5A$.
b) Calculați $\det X(a)$.
c) Demonstrați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+5ab)$, oricare ar fi $a, b\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+bX-4$, cu $a, b\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că, oricare ar fi $a, b\in\mathbb{R}$, f nu se divide cu X^2-1.

Scanned with OKEN Scanner

b) Determinați numerele a, b, știind că una dintre rădăcinile polinomului f este $x_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Pentru $a = -4$ și $b = 1$, determinați rădăcinile reale ale polinomului f.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 2}$.

a) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b) Determinați ecuația asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Arătați că graficul funcției f admite două puncte de extrem $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ și calculați $f(x_1) + f(x_2)$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră integralele $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx$.

a) Calculați I_1.

b) Demonstrați că $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n \geq 1$.

c) Arătați că $\lim_{n \to \infty} n \cdot I_n = \frac{1}{2}$

Testul 42

Subiectul I

1. Calculați suma $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \ldots + 2^8$.

2. Determinați inversa funcției bijective $f: \mathbb{R} \to (1, \infty), f(x) = e^{2x} + 1$.

3. Rezolvați ecuația $\sqrt{x^2 + x + 2} = x^2 + x$.

4. Calculați $A_3^2 : C_3^2$.

5. Se consideră pătratul $ABCD$ cu latura 1. Calculați $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$.

6. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a + b = 2\pi$. Arătați că $\sin a \cdot \sin b \leq 0$.

Subiectul al II-lea

1. Fie $a \in \mathbb{R}$, sistemul $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = a \end{cases}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det(A)$.

b) Arătați că rangul matricei A nu poate fi 2, pentru nicio valoare a lui a.

c) Rezolvați sistemul, pentru $a \neq 1$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră $m \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^3 - 4X + m$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Determinați x_1, x_2, x_3, dacă $m = 3$.

b) Calculați $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

c) Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul f să se dividă cu $X - m$.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$.

a) Studiați semnul funcției f.

b) Calculați $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

c) Calculați $f'(x)$.

2. Considerăm funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$ și $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a) Arătați că $F(x) = -f(x) + \ln 2 + \int_0^x \frac{dt}{1 + e^t}$.

b) Demonstrați că $\int_0^x \frac{dt}{1 + e^t} = x - \ln(1 + e^x) + \ln 2$.

c) Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ și $\lim\limits_{x \to \infty} F(x)$.

Testul 43

Subiectul I

1. Calculați $\frac{1}{(1+i)^4} - \frac{1}{(1-i)^4}$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $|x + 8| \leq 3x - 1$.

3. Calculați $\sin\left(2 \arcsin \frac{3}{5}\right)$.

4. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Câte funcții bijective $f: A \to A$ au proprietatea $f(1) \neq 2$?

5. Arătați că vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = 4\vec{i} - 6\vec{j}$ au direcții perpendiculare.

6. Fie ABC un triunghi, cu $AB = AC = 10$ cm și $BC = 12$ cm. Determinați lungimea înălțimii BD ($D \in AC$).

Subiectul al II-lea

1. Considerăm sistemul $\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ x + y + az + t = -1 \\ x + y + z + bt = c \end{cases}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Determinați a și b, astfel încât rangul matricei sistemului să fie 2.

Scanned with OKEN Scanner

b) Determinați a, b, c, astfel încât sistemul să fie compatibil dublu nedeterminat.
c) Pentru $a = 1, b = 1, c = -1$, determinați x_0, y_0, știind că $(x_0, y_0, 3, 1)$ este soluție.

2. Considerăm polinomul $P[X] = (2X^2 - X - 1)^{10}$, cu forma algebrică:
$P[X] = a_0X^{20} + a_1X^{19} + \ldots + a_{19}X + a_{20}$.
a) Arătați că $2(a_0 + a_2 + \ldots + a_{20}) = P(1) + P(-1)$.
b) Găsiți rădăcinile polinomului P.
c) Determinați numerele a_0, a_1 și a_{20}.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

b) Calculați $f''(x), x \in \mathbb{R}$.

c) Arătați că $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$, oricare ar fi $x \geq 0$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 x^n \sin x\, dx$.

a) Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.
b) Demonstrați că $I_n = -\cos 1 + n \sin 1 - n(n-1)I_{n-2}$, oricare ar fi $n \geq 2$.
c) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} nI_n$.

Testul 44

Subiectul I

1. Calculați partea întreagă a numărului $a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{9 \cdot 10}$.

2. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - x$. Calculați $\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{\text{1000 de } f}(1)$.

3. Determinați soluțiile din $[0, 2\pi)$ ale ecuației $1 + \cos x = \sqrt{3} \sin x$.

4. Într-o clasă sunt 13 elevi, dintre care 6 sunt fete. În câte moduri putem forma o echipă de 5 elevi, care să conțină cel puțin 4 fete?

5. Demonstrați că dreptele $d_1: 2x + y - 3 = 0$ și $d_2: 4x + 2y + 5 = 0$ sunt paralele.

6. Un triunghi ABC are $AB = 3, AC = 4$ și $m(\sphericalangle A) = 60°$. Determinați lungimea razei cercului circumscris.

Subiectul al II-lea

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Rezolvați ecuația $BX = A, X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Determinați matricea $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $C = B + B^2 + \ldots + B^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Arătați că egalitatea $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ este adevărată dacă și numai dacă $bc = 0$.

2. Fie polinomul $f = aX^4 + bX^3 + 1 \in \mathbb{C}[X]$, $a \neq 0$.

a) Determinați rădăcinile lui f, dacă $a = -1$ și $b = 0$.

b) Calculați suma pătratelor rădăcinilor polinomului f.

c) Determinați a și b, astfel încât $(X-1)^2$ să dividă pe f.

Subiectul al III-lea

1. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm funcția $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x-n}{x+n} - e^{-x}$.

a) Arătați că f_n este strict crescătoare.

b) Folosind, eventual, faptul că $e^{n+1} > 2n+1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, arătați că ecuația $f_n(x) = 0$ are o soluție unică $u_n \in [n, n+1]$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{n}$.

2. Se consideră funcția $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

a) Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.

b) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

c) Determinați aria subgraficului funcției f.

Testul 45

Subiectul I

1. Exprimați, în funcție de a, numărul $1 + \log_2 3$, știind că $\log_6 2 = a$.

2. Se consideră $m \in \mathbb{R}^*$ și funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m - 2$. Demonstrați că vârful parabolei asociate funcției f se găsește pe dreapta de ecuație $x - y = 3$.

3. Rezolvați ecuația $\lg^2 x^2 + 3\lg\dfrac{1}{x} = 1$.

4. Câte submulțimi cu două elemente are mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

5. În reperul $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ se consideră vectorii $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = 5\vec{i} - \vec{j}$. Determinați modulul vectorului $5\vec{u} + 3\vec{v}$.

6. Dacă $\operatorname{tg} a = 2$, calculați $\cos 2a$.

Subiectul al II-lea

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = A + A^t$.

a) Arătați că $B^2 = B + 2I_3$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Arătați că B este inversabilă și determinați B^{-1}.

c) Demonstrați că $B^n \neq I_3$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Considerăm polinomul $f = X^4 + X^3 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$.

a) Arătați că f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$.

b) Arătați că f nu se divide cu polinomul $g = X + \hat{1}$.

c) Demonstrați că polinomul $g = X^5 + X^3 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$ este divizibil cu f.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + \dfrac{1}{1+x}$.

a) Demonstrați că f este strict crescătoare.

b) Demonstrați că f este convexă.

c) Arătați că $\dfrac{f(a)+f(b)}{2} \geq f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq f(\sqrt{ab})$, oricare ar fi $a, b > 0$.

2. a) Arătați că funcția $F(x) = \operatorname{tg} x - x$ este o primitivă a funcției $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$ pe intervalul $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

b) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi^2}{32}$.

c) Demonstrați că $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi^2}{32} \geq 0$.

Testul 46

Subiectul I

1. Comparați numerele $a = \log_2 4 + \log_3 9$ și $b = \sqrt{16,81}$.

2. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x$. Determinați funcția $f \circ f$.

3. Arătați că ecuația $x^2 - 2x + \sin^2 a = 0$ are soluții reale, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

4. Într-o clasă sunt 28 de elevi, dintre care 15 sunt fete. În câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți?

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(5, 6)$, $C(-1, 1)$. Determinați ecuația înălțimii dusă din vârful C în triunghiul ABC.

6. Calculați $\cos 70° + \cos 110°$.

Subiectul al II-lea

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n(n, n+2)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Scrieți ecuația dreptei A_0A_1.

Scanned with OKEN Scanner

b) Arătați că toate punctele A_n sunt coliniare.
c) Demonstrați că aria triunghiului OA_nA_{n+1} nu depinde de n.

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f=(X+1)^{100}+(X-3)^{100}$, $g=X^2-2X-3$.

a) Determinați rădăcinile polinomului g.
b) Demonstrați că polinomul f nu este divizibil cu polinomul g.
c) Determinați restul împărțirii lui f la g.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcțiile $g:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-1-x\ln x$ și $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$.

a) Arătați că $g(x)<0$, oricare ar fi $x\in(1,\infty)$.
b) Demonstrați că f este strict descrescătoare pe $(1,\infty)$ și determinați imaginea funcției f.
c) Arătați că $2^{\sqrt{3}-1}>3^{\sqrt{2}-1}$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{10}$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

a) Demonstrați egalitatea $f(x)=\dfrac{1-x^{11}}{1-x}$, oricare ar fi $x\neq 1$ și deduceți că $f(x)>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.
b) Arătați că funcția F este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
c) Demonstrați că $F(x)<x\,f(x)$, oricare ar fi $x>0$.

Testul 47

Subiectul I

1. Ordonați crescător numerele $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt[3]{3}$, $c=\sqrt[6]{6}$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(3x-2)=3f(x)-2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Determinați $f(1)$.

3. Determinați valorile lui $x\in[0,2\pi]$, astfel încât $2|\sin x|=1$.

4. După o scumpire cu 10%, o carte costă 33 lei. Care era prețul inițial al cărții?

5. Considerăm triunghiul ABC și punctul M, astfel încât $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC}$. Determinați numerele reale x, y, știind că $\overrightarrow{AM}=x\cdot\overrightarrow{AB}+y\cdot\overrightarrow{AC}$.

6. Dacă $a\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ și $\sin a=-\dfrac{4}{5}$, calculați $\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}$.

Subiectul al II-lea

1. Pentru $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, A inversabilă, se consideră funcția $f_A:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f_A(X)=AXA^{-1}$.

a) Calculați $f_A(I_2)$.
b) Arătați că f_A este bijectivă.

Scanned with OKEN Scanner

c) Arătați că $f_A(X \cdot Y) = f_A(X) \cdot f_A(Y)$, oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră mulțimea $G = \{A(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, unde $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 5x^2 - 2x \\ 0 & 1 & 5x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

c) Demonstrați că $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{R}, +)$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{3x+2}{x^2-3x+2}$.

a) Determinați numerele reale A și B, pentru care $f(x) = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

b) Calculați $f'(x), x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

c) Aflați derivata de ordin n a funcției $f (n \in \mathbb{N}^*)$.

2. Considerăm funcția $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \ln x & x > 0 \end{cases}$.

a) Calculați $\int f(x)dx, x \in (0, \infty)$.

b) Arătați că f admite primitive pe $[0, \infty)$.

c) Calculați $\int_1^e f(x)dx$.

Testul 48

Subiectul I

1. Aflați modulul numărului complex $z = 1 - i$.

2. Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, calculați $(f \circ f)(0)$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sin x - \cos x = 0$.

4. Determinați al cincilea termen al dezvoltării binomiale $(1 - x)^{10}$.

5. Dacă $A(2, 0), B(0, 3)$ și dreapta d are ecuația $x - y + 1 = 0$, aflați coordonatele punctului $C \in d$ pentru care $CA = CB$.

6. Aflați valoarea maximă a expresiei $E = \sin x \cos x$, unde $x \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Subiectul al II-lea

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\det(A - xI_2) = 0$.

b) Calculați B^n $(n \in \mathbb{N}^*)$, știind că $B = A - I_2$.

c) Determinați A^n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

2. Pe mulțimea $G = (2, \infty)$ se consideră legea „$*$", definită prin egalitatea $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, oricare ar fi $x, y \in G$.

a) Arătați că $x * y = (x-2)(y-2) + 2$, oricare ar fi $x, y \in G$.

b) Demonstrați că $(G, *)$ este un grup abelian.

c) Arătați că funcția $f: G \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x-2)$, este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ și $(\mathbb{R}, +)$.

Subiectul al III-lea

1. Considerăm funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = e^{\frac{x}{2}}$ și $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați $f_1(x)$.

b) Arătați că $f_n(x) = \frac{1}{2^n} \cdot e^{\frac{x}{2}}$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} (f_1(0) + f_2(0) + \ldots + f_n(0))$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1} dx$.

a) Calculați I_3.

b) Calculați I_1.

c) Arătați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este strict monoton și deduceți că $\frac{\ln 2}{4} < I_2 < \frac{\pi}{8}$.

Testul 49

Subiectul I

1. Calculați suma $S = \log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_2 \sqrt{2}$.

2. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - mx - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$.
Determinați m, știind că $x_1^2 + x_2^2 = x_1 + x_2 + 2$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^{x+1} + 2^{2-x} = 9$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Câte numere de patru cifre distincte se pot forma folosind cifrele 0, 1, 2 și 3 ?

5. Se consideră punctele $A(1, 4)$, $B(2, 1)$ și $C(3, a)$. Determinați $a \in \mathbb{R}$, știind că punctele A, B și C sunt coliniare.

6. Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\operatorname{tg} a = 2$. Calculați $\operatorname{tg}(a + \pi)$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in S_6$.

a) Arătați că permutarea σ este pară.

b) Demonstrați că $\sigma^{1000} = \sigma$.

c) Găsiți o permutare τ, diferită de σ și de permutarea identică, astfel încât $\sigma\tau = \tau\sigma$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 3X^2 + 2X + 3 \in \mathbb{R}[X]$, având rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3 și x_4.

a) Determinați restul împărțirii polinomului f prin $X - 3$.

b) Arătați că f nu are rădăcini raționale.

c) Calculați suma $S = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{\mp 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

a) Calculați $f'(x), x \in \mathbb{R} \setminus \{\mp 1\}$.

b) Determinați asimptotele funcției f.

c) Stabiliți dacă funcția f este descrescătoare pe domeniul său de definiție.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

a) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Calculați $\int_0^1 f(x) \cdot f'(x)dx$.

c) Determinați limita șirului $a_n = \dfrac{1}{n^2+1^2} + \dfrac{2}{n^2+2^2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$.

Testul 50

Subiectul I

1. Arătați că numărul $a = \log_4 16 + \log_3 9 + \sqrt[3]{125}$ este un număr natural.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $x^2 - 7x + 12 \leq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=x$.

4. Într-o clasă sunt doisprezece băieți și opt fete. Aflați în câte moduri se poate alege un grup de trei elevi, în care să fie cel puțin un băiat și cel puțin o fată, care să reprezinte clasa în consiliul elevilor pe școală.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 2)$ și $B(2, 3)$. Determinați ecuația generală a dreptei AB.

6. Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC știind că $BC=8$ și $\cos A=\frac{3}{5}$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 9 & 6\\ 2 & 6 & 4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=I_3+A$, $C=I_3+aA$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $S=A-XY$.

b) Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $BC=I_3$.

c) Arătați că $A^n=14^{n-1}A$, oricare ar fi numărul natural n, $n\geq 2$.

2. Fie polinomul $f=X^4-6X^3+13X^2+aX+b, f\in\mathbb{R}[X]$.

a) Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$, unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile polinomului f.

b) Determinați a și b astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul X^2-4X+3.

c) Pentru $a=-14$ și $b=6$, aflați rădăcinile polinomului f.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=18x^2-\ln x$.

a) Studiați monotonia funcției f.

b) Determinați asimptotetele graficului funcției f.

c) Determinați cel mai mare număr a pentru care $f(x)\geq a$, pentru orice $x\in(0,\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^{2n}}dx$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $I_n\leq\frac{1}{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluții

Clasa a IX-a

1.1. Numere reale

1. $a < c < b$. **2.** $a = 1$. **3.** $|A| = 4$. **4.** a) Efectuând împărțirea, constatăm că $\frac{1}{21} = 0,(047619)$. Atunci $a_1 = 0$, deci orice produs care conține factorul a_1 este nul. b) Fracția dată este periodică simplă, cu 6 zecimale în perioadă, prin urmare $a_2 = a_8 = a_{14} = \ldots = a_{2000} = 4$. În primele 2003 zecimale, cifra 4 apare de 334 de ori. c) Grupăm câte 6 termenii sumei, ultima grupă fiind incompletă; obținem că $S = (a_1 + a_2 + \ldots + a_6) + (a_7 + a_8 + \ldots + a_{12}) + (a_{1993} + \ldots + a_{1998}) + (a_{1999} + \ldots + a_{2003}) = 333(0 + 4 + 7 + 6 + 1 + 9) + (0 + 4 + 7 + 6 + 1) = 9009$. **5.** $A \setminus B = (-3, 1]$, deci $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1\}$; cardinalul acestei mulțimi este 4. **6.** Deoarece $1 < \sqrt{3} < 2 < \sqrt{7} < 3$, rezultă că $A = \{2\}$. **7.** $A \cap \mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; $A \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2\}$. **8.** Deoarece $a = \sqrt{2}$, $b = 18\sqrt{2}$, media aritmetică a celor două numere este $\frac{19\sqrt{2}}{2}$, iar media lor geometrică este 6. **9.** $a = 6$. **10.** Raționalizând fiecare fracție, obținem că $A = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) = \sqrt{100} - \sqrt{1} = 9$, deci $A \in \mathbb{N}$. **11.** Cum $x \geq 0$, rezultă că $a \geq \sqrt{0+49} + \sqrt{0+625} = 7 + 25 = 32$. Analog, din $x \leq 51$ vom obține că $a \leq 36$. **12.** $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 \geq 4$ și $y^2 + 6y + 10 = (y+3)^2 + 1 \geq 1$. Concluzia se impune. Egalitate pentru $x = 1$, $y = -3$. **13.** a) Calcul direct. b) $a = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 4 \in \mathbb{N}$. **14.** Observăm că $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = -1 + \sqrt{2}$, deci putem lua $a = -1$, $b = 1$. **15.** Două numere raționale: 0,00101 și 0,00102; două numere iraționale: 0,001000100001... și $\frac{\pi}{3141,59}$. **16.** Fie ecuația $E(x) = 1$, deci $x^2 - 3x + 1 = 0$, cu soluțiile $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Considerând $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, avem că $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, iar $E(a) = 1 \in \mathbb{N}$. **17.** Prin reducere la absurd: $2 - \sqrt{3} = a \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, fals; $3\sqrt{2} = b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{b}{3} \in \mathbb{Q}$, fals; $\sqrt{2} + \sqrt{3} = c \in \mathbb{Q} \Rightarrow 5 + 2\sqrt{6} = c^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, fals. **18.** a) Dacă $b = d$, rezultă $\sqrt{2} = \frac{a-c}{d-b} \in \mathbb{Q}$, fals. Rezultă $b = d$ și $a = c$. b) Relația este echivalentă cu $3x + y + \sqrt{2}(2x - y) = 1$ și, cum $3x + y$, $2x - y$ sunt raționale, rezultă $3x + y = 1$ și $2x - y = 0$, de aici $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{2}{5}$. **19.** $a = 0$. **20.** $a = 1$, $b = -1$. **21.** a) $(1-\sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2} \in A$. b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = -1 + \sqrt{2} \in A$. c) Presupunem că $\sqrt{3} \in A$, deci există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$. Obținem că $3 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$ și cum, $a, b \in \mathbb{Z}$, rezultă $a^2 + 2b^2 = 3$, $2ab = 0$, fals. Concluzia se impune. **22.** Dacă $a = 0$, $a^n = 0 \in \mathbb{Q}$. Fie $a \neq 0$, cum $a = (a^{10})^5 : (a^7)^7 \in \mathbb{Q}$, rezultă $a^n \in \mathbb{Q}$.

Scanned with OKEN Scanner

23. $a=\frac{7(5\sqrt{2}+1)}{50-1}=\frac{5\sqrt{2}+1}{7}$; cum $1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$, înseamnă că $\frac{8}{7}<a<\frac{17}{14}$, deci $[a]=1$; $[b]=19$. **24.** $\{a\}=a-[a]=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, rezultă $a\{a\}=1\in\mathbb{Q}$. **25.** $a=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-1-(\sqrt{2}+\sqrt{3}-3)=1$. **26.** $a=5$, $b=46$. **27.** a) $\frac{2}{n(n+2)}=\frac{(n+2)-n}{n(n+2)}=\frac{n+2}{n(n+2)}-\frac{n}{n(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$. b) Folosind punctul precedent, obținem că $S_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$. c) Cum $0<\frac{n}{2n+1}<1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, înseamnă că $[S_n]=0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$. d) Numerele S_n, având partea întreagă 0, ele vor coincide cu partea lor fracționară. Impunem ca $\frac{114}{315}\le\frac{n}{2n+1}\le\frac{14}{35}$, de unde $n=2$. **28.** $d\in\{3,4\}$. **29.** a) $S=\{-3,7\}$. b) Rezultă că $x+4=\pm(1-2x)$, de unde $x=-1$ sau $x=5$. Cum ambele valori obținute verifică ecuația, înseamnă că $S=\{-1,5\}$. **30.** a) $x\in[-1,2]$. b) $x\in(-\infty,-7]\cup[1,+\infty)$. **31.** Cum $|a|=|-a|$, $\forall\, a\in\mathbb{R}$, rezultă că $2|4-2x|=|8-4x|=|4x-8|$. Astfel, $E(x)=|4x-8|-|4x-8|=0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. **32.** $A=\{-2015,-2014,\ldots,2012,2013\}$ și are $2015+2013+1=4029$ elemente. **33.** Folosim inegalitatea modulului: $|a|+|b|\ge|a+b|$, $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$, cu egalitate dacă și numai dacă numerele a și b au același semn. În cazul nostru, $|2x-3|+2|x-1|=|2x-3|+|2-2x|\ge|2x-3+2-2x|=1$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, cu egalitate când $x\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$. **34.** Observăm că $x=(a+b)^2-2ab=25-4=21$, iar $y=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{21}{2}$. **35.** a) Cum $0=0^2-0^2$, iar $1=1^2-0^2$, rezultă că 0 și 1 se află în A. Orice pătrat perfect dă la împărțirea prin 4 fie restul 0, fie restul 1. Rezultă că o diferență de pătrate dă la împărțirea prin 4 unul dintre resturile 0, 1 sau 3. Astfel, 2 nu se află în A. *Altfel*: Presupunem prin absurd că $2=x^2-y^2$, cu $x,y\in\mathbb{Z}$; atunci $(x-y)(x+y)=2$, prin urmare unul dintre factori are modulul 1, iar celălalt are modulul 2. Rezultă că numerele $x-y$ și $x+y$ vor avea parități diferite, ceea ce este absurd. b) $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2=\frac{x^2+2x+1}{4}-\frac{x^2-2x+1}{4}=\frac{4x}{4}=x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$; c) Dacă $x=2n+1$, $n\in\mathbb{Z}$, atunci $\frac{x+1}{2}=n+1$, $\frac{x-1}{2}=n$ și, conform punctului b), avem că $x=(n+1)^2-n^2\in A$. **36.** a) Calcul direct. b) Plecăm din membrul drept: $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=x^3+xy^2+xz^2-x^2y-x^2z-xyz+x^2y+y^3+yz^2-xy^2-xyz-y^2z+x^2z+y^2z+z^3-xyz-xz^2-yz^2=x^3+y^3+z^3-3xyz$, restul termenilor reducându-se doi câte doi. c) Ținând seama de b), dacă $a^3+b^3+c^3=3abc$, rezultă că $a+b+c=0$ sau $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$. În primul caz, cum a,b,c sunt nenegative, obținem că $a=b=c=0$. În cel de-al doilea, conform a), deducem că $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$, de unde $a-b=b-c=c-a=0$, deci $a=b=c$. **37.** Dacă $x,y\in[2,\infty)$, atunci $x-2,y-2\in[0,\infty)$. Produsul a două numere pozitive fiind pozitiv, rezultă că $(x-2)(y-2)=xy-2x-2y+4\in[0,\infty)$, de unde cerința problemei. **38.** Faptul că $x,y\in(-1,1)$ este echivalent cu $|x|<1$, $|y|<1$. Înmulțind membru cu membru aceste două inegalități (unde totul este nenegativ), obținem că $|xy|<1$, deci $xy\in(-1,1)$. În particular, $1+xy>0$ și atunci concluzia revine la dubla inegalitate $-1-xy<x+y<1+xy$. Avem: $-1-xy<x+y\Leftrightarrow xy+x+y+1>0\Leftrightarrow(x+1)(y+1)>0$, adevărat pentru $x,y\in(-1,1)$, iar $x+y<1+xy\Leftrightarrow xy-x-y+1>0\Leftrightarrow(x-1)(y-1)>0$, din nou adevărat pentru $x,y\in(-1,1)$. **39.** a) Inegalitatea

Scanned with OKEN Scanner

revine la $(a-b)^2 \geq 0$, adevărat. Se atinge egalitatea când $a = b$. b) Dacă a, b au același semn, atunci $ab > 0$. Împărțim inegalitatea de la a) prin ab și se obține cerința. c) Efectuând înmulțirile, membrul stâng se scrie sub forma $3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$. Concluzia rezultă aplicând b). Se atinge egalitatea când $a = b = c$. **40.** a) Calcul direct. b) Cum $a^2 \geq 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, avem că $x^2 + 1 \geq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, iar $x^2 + x + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, de unde concluzia. Inegalitatea este chiar strictă, întrucât egalitățile $x^2 + 1 = 1$ și $x^2 + x + 1 = \frac{3}{4}$ nu se ating simultan (prima are loc pentru $x = 0$, a doua pentru $x = -\frac{1}{2}$). **41.** Avem că $x^2 + 3xy + 4y^2 = = \left(x+\frac{3y}{2}\right)^2 + \frac{7y^2}{4} \geq 0$. Egalitatea se atinge când $x = y = 0$. **42.** Cum $\sqrt{1+x} \geq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, inegalitatea din dreapta este imediată. Dacă $x \in [2, \infty)$, atunci $1-\frac{x}{2} < 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Dacă $x \in [0, 2]$, avem voie să ridicăm la pătrat inegalitatea din stânga, obținând echivalent $1 - x + \frac{x^2}{4} \leq \frac{1}{1+x}$ sau $(1+x)\left(1-x+\frac{x^2}{4}\right) \leq 1$, adică $x^2(x-3) \leq 0$, adevărat dacă $x \in [0, 2]$. Ambele egalități se ating pentru $x = 0$. **43.** a) Folosim formula $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, luând $b = \frac{1}{a}$. b) Avem că $a \geq 1 \geq \frac{1}{a}$, $\forall\, a \in [1, \infty)$. c) Dacă $x \geq 1$, atunci $x - \frac{1}{x} \geq 0$, conform b). Rezultă că $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3 \geq 0$, deci, ținând cont de a), deducem că $x^3 - \frac{1}{x^3} - 3\left(x-\frac{1}{x}\right) \geq 0$, tocmai cerința problemei. **44.** Inegalitatea din dreapta revine la $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$, adevărat. Înlocuind aici pe x cu $\frac{1}{x}$ și pe y cu $\frac{1}{y}$, se obține inegalitatea din stânga. **45.** a) La problema 39 a) am văzut că $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Analog se arată că $b^2 + c^2 \geq 2bc$ și $c^2 + a^2 \geq 2ca$. Adunând aceste trei inegalități și împărțind ambii membri prin 2, rezultă concluzia. b) Trecem în inegalitatea precedentă $a \to a^2$, $b \to b^2$, $c \to c^2$ și urmează concluzia. c) În inegalitatea de la a), trecem $a \to ab$, $b \to bc$, $c \to ca$; deducem că $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$. Ținând acum seama de punctul b), obținem ceea ce dorim. **46.** a) Se aplică inegalitatea dintre media armonică și cea aritmetică. b) Conform a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \geq \frac{4}{a+c}$; $\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{4}{b+c}$. Prin adunarea acestor inegalități se obține concluzia. **47.** a) Calcul direct. b) Numerele $(ay - bx)^2$, $(az - cx)^2$, $(bz - cy)^2$ sunt nenegative, deci, prin eliminarea lor, cantitatea din membrul stâng se micșorează. c) Egalitatea se atinge când $ay - bx = az - cx = bz - cy = 0$, ceea ce revine la $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. **48.** Cum $x \leq y \leq z$, atunci $ax + bx + cx \leq ax + by + cz \leq az + bz + cz$ (am ținut seama și de faptul că a, b, c sunt nenegative). Cum $a + b + c = 1$, rezultă concluzia.

Scanned with OKEN Scanner

1.2. Tipuri de raționamente logice

1. Propoziția este falsă; pentru a justifica acest fapt, este suficient să găsim un contraexemplu. Numerele $1-\sqrt{2}$ și $1+\sqrt{2}$ sunt iraționale, însă suma lor este 2, număr rațional. **2.** Propoziția este adevărată: adunând membru cu membru inegalitățile $1 \le x \le 3$ și $-2 \le -y \le 1$, obținem că $-1 \le x-y \le 4$, deci $x-y \in [-1, 4]$. **3.** Propoziția dată se scrie sub forma: „$(\forall\, x, y \in \mathbb{N})(x \mid y$ sau $y \mid x)$". Cuantificatorul universal se neagă prin cel existențial, iar $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$ (De Morgan). Astfel, negația propoziției date este: „$(\exists\, x, y \in \mathbb{N})(x \nmid y$ și $y \nmid x)$". Constatăm că negația este adevărată (de exemplu, $2 \nmid 3$ și $3 \nmid 2$), prin urmare propoziția din enunț este falsă. **4.** Cum $\overline{p \Rightarrow q} = \overline{\overline{p} \vee q} = p \wedge \overline{q}$, negația propoziției din enunț este „Numărul natural x se divide cu 4, dar nu se divide cu 2". Propoziția dată fiind adevărată, negația ei este falsă. **5.** Presupunem, prin absurd, că ar fi falsă concluzia problemei; atunci $a \ge c$ și $b \ge d$, de unde $a + b \ge c + d$, ceea ce intră în contradicție cu ipoteza. Reciproca este falsă: dacă $a < c$ sau $b < d$, nu rezultă obligatoriu că $a + b < c + d$, după cum arată următorul exemplu: ($1 < 2$ sau $3 < 0$), însă $1 + 3 > 2 + 0$. **6.** Dacă $a = c$ și $b = d$, evident că $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$. Reciproc, fie $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$; atunci $a - c = (d-b)\sqrt{2}$ și dacă presupunem prin absurd că $d \ne b$, atunci $d - b \ne 0$ și putem scrie că $\sqrt{2} = \dfrac{a-c}{d-b}$. Cum $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, iar $\dfrac{a-c}{d-b} \in \mathbb{Q}$, am ajuns la o contradicție. Rămâne că $d = b$ și rezultă imediat că $a = c$. **7.** Orice număr prim mai mare ca 3 este fie de forma $6k + 1$, fie de forma $6k + 5$. Din oricare trei numere prime, putem alege două care să dea același rest la împărțirea prin 6 (principiul cutiei). Diferența acestor două numere va fi multiplu de 6. **8.** *Soluția 1.* Procedăm prin inducție matematică. Pentru $n = 1$, identitatea din enunț devine $1 \cdot 2 \cdot 3 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4}$, adevărat. Presupunem că egalitatea are loc pentru $n = k$ și vom demonstra că are loc și pentru $n = k + 1$. Dacă $S_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + k(k+1)(k+2)$ este egală cu $\dfrac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$, atunci $S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2)(k+3) = \dfrac{k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)}{4} =$

$= \dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$ ceea ce trebuia demonstrat. *Soluția 2.* Folosim procedeul de sumare telescopică. Deoarece $k(k+1)(k+2) = \dfrac{1}{4}[k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)]$, dând lui k valorile $1, 2, \ldots, n$ și sumând membru cu membru egalitățile obținute, rezultă concluzia problemei. **9.** Se poate folosi metoda inducției matematice sau procedeul de sumare telescopică, plecând de la identitatea $\dfrac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{4k-3} - \dfrac{1}{4k+1}\right]$.

10. Se poate folosi metoda inducției matematice sau procedeul de sumare telescopică, plecând de la egalitatea $\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$. **11.** Se poate folosi metoda inducției matematice sau procedeul de sumare telescopică plecând de la egalitatea $k \cdot k! = (k+1)! - k!$. **12.** Se poate folosi metoda inducției matematice sau o simplificare telescopică: $\left(1-\dfrac{4}{1}\right)\left(1-\dfrac{4}{9}\right)\left(1-\dfrac{4}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{4}{(2n-1)^2}\right) = \dfrac{1^2-2^2}{1^2}\cdot\dfrac{3^2-2^2}{3^2}\cdot\dfrac{5^2-2^2}{5^2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{(2n-1)^2-2^2}{(2n-1)^2} = \dfrac{-1\cdot 3}{1\cdot 1}\cdot\dfrac{1\cdot 5}{3\cdot 3}\cdot$

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{3\cdot 7}{5\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-3)(2n+1)}{(2n-1)(2n-1)}=\frac{-(2n+1)}{2n-1}=\frac{1+2n}{1-2n}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$. **13.** Se poate folosi metoda inducției matematice sau procedeul de simplificare telescopică. **14.** Inegalitatea din stânga este evident adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Pentru a o justifica pe cea din dreapta, procedăm prin inducție matematică. Pentru $n=1$, aceasta revine la $\frac{2}{3}<\sqrt{\frac{3}{5}}$, adică $\frac{4}{9}<\frac{3}{5}$, adevărat. Presupunem afirmația adevărată pentru $n=k$ și o demonstrăm pentru $n=k+1$. Notând $P_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}$, în ipoteza că $P_k<\sqrt{\frac{3}{2k+3}}$, avem că $P_{k+1}=P_k\cdot\frac{2k+2}{2k+3}<\sqrt{\frac{3}{2k+3}}\cdot\frac{2k+2}{2k+3}$. Vrem să demonstrăm că $P_{k+1}<\sqrt{\frac{3}{2k+5}}$ și, pentru aceasta, ar fi suficient să arătăm că $\frac{1}{\sqrt{2k+3}}\cdot\frac{2k+2}{2k+3}<\frac{1}{\sqrt{2k+5}}$, deci că $\left(\frac{2k+2}{2k+3}\right)^2<\frac{2k+3}{2k+5}$. Această din urmă inegalitate revine, după eliminarea numitorilor și reducerea termenilor asemenea, la $6k+7>0$, evident adevărat. **15.** a) Observăm că $A_1=6$, număr care se divide cu 6. Apoi, dacă presupunem că A_n se divide cu 6, atunci $A_{n+1}=(n+1)^3+5(n+1)=A_n+3(n^2+n+2)$ se divide și el cu 6, întrucât n^2+n este întotdeauna număr par. b) Putem folosi din nou metoda inducției matematice. Altfel, observăm că $B_n=2(16^n-1)=2((15+1)^n-1)=2(M_{15}+1-1)=2\cdot M_{15}=M_{30}$. **16.** a) $S_0=2$, $S_1=4$, iar $S_2=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=14$. b) Avem $4S_{n-1}-S_{n-2}=(x+y)(x^{n-1}+y^{n-1})-(x^{n-2}+y^{n-2})=x^n+xy\cdot y^{n-2}+xy\cdot x^{n-2}+y^n-x^{n-2}-y^{n-2}=x^n+y^n=S_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. c) Folosim metoda inducției matematice. Etapa de verificare a fost parcursă la a). Presupunem că $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$ sunt numere naturale; atunci $S_n=4S_{n-1}-S_{n-2}$ este număr întreg. Cum x, y sunt pozitive (de fapt, $x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$ sau invers), atunci $S_n=x^n+y^n>0$ și rezultă că $S_n\in\mathbb{N}$. **17.** $A=\{2^{4n}\mid n=0,1,2,\ldots,100\}$ și are 101 elemente. **18.** Există 10 astfel de numere: trei cu cifrele 9, 9, 6, șase cu cifrele 9, 8, 7 și unul cu cifrele 8, 8, 8. **19.** Fiecare dintre cele patru cifre ale unui număr poate fi aleasă în câte trei moduri, deci avem $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$ de numere. **20.** Prima cifră a numărului poate fi aleasă în 4 moduri, a doua poate fi oricare dintre cele 3 cifre rămase, iar a treia una dintre cele două cifre rămase; există $4\cdot 3\cdot 2=24$ de numere. **21.** Există $5\cdot 4=20$ de numere de forma $\overline{ab0}$ și încă $4\cdot 4=16$ numere de forma $\overline{ab5}$, în total 36 de numere. **22.** a) 96; b) 2500. **23.** Numerele au forma $\overline{aab}$, $a\neq 0$, $a\neq b$, deci $9\cdot 10=90$ numere; $\overline{aba}$, $a\neq 0$, $a\neq b$, deci $9\cdot 10=90$ numere și $\overline{abb}$, $a\neq 0$, $a\neq b$, deci $9\cdot 10=90$ numere. În total, 270 numere. **24.** a) 360; b) 60; c) 12. **25.** 125. **26.** Tricoul poate fi ales în 5 moduri, pantalonii în 4 moduri, iar pantofii de sport în 3 moduri; urmează că Dan își poate alege echipamentul în $5\cdot 4\cdot 3=60$ de feluri. **27.** Grupul de două cifre poate fi ales în 99 de moduri, iar cele trei litere în $26\cdot 26\cdot 26$ de feluri. Rezultă că în județul Iași se pot înmatricula $99\cdot 26^3$ autovehicule. **28.** a) $|A|=99-10+1=90$. b) Există 9 astfel de elemente: 11, 22, ..., 99. c) Există 18 astfel de elemente: 12, 20, 21, ..., 29, 32, 42, ..., 92. **29.** A conține $52-12+1=41$ de elemente, dintre care 11 se divid cu 4 (anume $4\cdot 3, 4\cdot 4, \ldots, 4\cdot 13$), deci în A există $41-11=30$ de numere nedivizibile cu 4. **30.** a) Numerele care se divid cu 6 și cu 8 sunt acele numere care se divid cu $[6, 8]=24$ și sunt în număr de 4. b) Există 16 multipli de 6(6, 12, 18, ..., 96), dintre care 4 sunt și multipli de 8, deci 12 numere se divid cu 6, dar nu și cu 8. c) În A sunt 16 multipli de 6, 12 multipli de 8, iar 4 dintre aceste numere sunt multipli comuni de 6 și 8, deci avem $16+12-4=24$ multipli de 6 sau de 8. **31.** Produsul ab este impar dacă fiecare dintre factori este impar. Astfel, a poate fi ales în 3 moduri, la fel și b, deci există $3\cdot 3=9$ perechi cu proprietatea dată. **32.** a) Scriem mulțimile după cel mai mare element: {6}, {5, 1}, {4, 2}, {3, 2, 1}; există patru mulțimi cu suma elementelor 6.

Scanned with OKEN Scanner

b) Mulțimile dorite sunt: {6, 2}, {6, 2, 1}, {4, 3}, {4, 3, 1}, în total 4. **33.** a) 24; b) 12; c) Grupând în perechi elementele lui M, suma lor este $(1234 + 4321) + (1243 + 4312) + \ldots = 5555 \cdot 12$. Media aritmetică a elementelor lui M este 2777,5. d) 19. **34.** Cu 10 zerouri.

1.3. Șiruri. Progresii

1. a) $a_n = 2n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. b) $a_n = (n-1)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. c) $a_n = (-1)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. d) $a_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. **2.** a) Ecuația $\frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{3}$ are soluția $n = 5$, deci $a_5 = \frac{2}{3}$. b) Inecuația $\frac{n-1}{n+1} < \frac{7}{10}$ conduce la $n < \frac{17}{3}$, deci există cinci termeni mai mici ca 0,7. c) Toți termenii șirului sunt mai mici ca 1, iar $\frac{n-1}{n+1} > \frac{99}{100} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n > 199$. Rezultă că toți termenii șirului, începând cu a_{200}, se află în intervalul dat, adică (0,99; 1) conține o infinitate de termeni ai șirului. **3.** Cum $a_{n+1} - a_n = \frac{4n+4}{n+4} - \frac{4n}{n+3} = \frac{12}{(n+3)(n+4)} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, rezultă că (a_n) este strict crescător. **4.** Deoarece $a_{n+1} - a_n = 2n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, șirul dat este strict crescător. **5.** a) $E(x) = x(x-4) + 3 > 0$, $\forall x \geq 4$, prin urmare $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{E(n+1)} > 0$, $\forall x \geq 4$. b) Avem că $\frac{1}{E(k)} = \frac{1}{(k-1)(k-3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-3} - \frac{1}{k-1}\right)$, $\forall k \geq 4$, deci $a_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$, $\forall k \geq 4$. Astfel, șirul dat este mărginit superior. Șirul fiind strict crescător, el este mărginit inferior de primul termen. c) Rezultă din calculul făcut la b) sau prin inducție. **6.** a) $a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. b) Folosim procedeul de sumare telescopică, ținând seama de a). c) Șirul are termeni pozitivi (deci este mărginit inferior), iar $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < 1$, deci $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător. În plus, orice șir descrescător este mărginit superior. **7.** Dacă $n \geq 2$, atunci $a_n = (a_1 + \ldots + a_n) - (a_1 + \ldots + a_{n-1}) = s_n - s_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$. În cazul $n = 1$ avem că $a_1 = s_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}$, deci putem afirma că $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. **8.** Se poate folosi metoda inducției matematice. Altfel, observăm că relația de recurență se poate scrie sub forma $a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}$, $\forall n \geq 3$, deci, dacă notăm $x_n = a_{n+1} - a_n$, $\forall n \geq 1$, avem că $x_{n-1} = x_{n-2}$, $\forall n \geq 3$, prin urmare $x_{n+1} = x_n$, $\forall n \geq 1$. Cum $x_1 = a_2 - a_1 = 1$, rezultă că $x_n = 1$, $\forall n \geq 1$, adică $a_{n+1} = a_n + 1$, $\forall n \geq 1$. Obținem că $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică de rație 1, cu $a_1 = 1$, deci $a_n = a_1 + +(n-1) \cdot r = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. **9.** a) $a_3 = \frac{a_2}{a_1} = 2$, $a_4 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{4}$, $a_5 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{8}$, $a_6 = \frac{a_5}{a_4} = \frac{1}{2}$. b) Observăm că $a_{n+3} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n}$, deci $a_{n+6} = a_{n+3+3} =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \frac{1}{a_{n+3}} = a_n$. c) Șirul este periodic, termenii săi repetându-se din 6 în 6. Grupând câte șase termenii sumei, obținem că $S = 334(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) = 4968{,}25$. **10.** $a_1 = 5$. **11.** $a_1 = -1$. **12.** Fie r rația progresiei, atunci $a_1 + 2r = 5$ și $a_1 + 4r = 9$. Rezultă $a_1 = 1$ și $r = 2$. Prin urmare, $S_7 = \frac{(a_1 + a_7)7}{2} = 49$. **13.** 2007 este al 402-lea termen al progresiei. **14.** $x = 6$. **15.** Este suma primilor 11 termeni ai unei progresii aritmetice cu primul termen 1 și rația 3; avem că $S_{11} = \frac{(1+31)\cdot 11}{2} = 176$. **16.** Termenii sumei formează o progresie aritmetică în care $a_1 = 1$, $r = 4$. Dacă notăm cu m numărul de termeni, atunci $n = a_m = a_1 + r(m-1)$, deci $n = 4m - 3$. Astfel, $231 = S_m = \frac{m(4m-2)}{2} = 2m^2 - m$ și cum $m \in \mathbb{N}^*$, obținem că $m = 11$, apoi $n = 41$. **17.** Vom avea că $a_1 = 2$, $r = 2$, $S_{20} = 420$. **18.** Observăm că $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = (a_1 + 5r) + (a_1 + 8r) + (a_1 + 11r) + (a_1 + 14r) = 4a_1 + 38r$, prin urmare $2a_1 + 19r = 10$. Atunci $S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20})\cdot 20}{2} = 10(a_1 + a_1 + 19r) = 10 \cdot 10 = 100$. **19.** Dacă stadionul se umple în n minute, atunci $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = 10000$, de unde $n = 100$. **20.** Există 8 progresii de rație 1, 6 progresii de rație 2, 4 progresii de rație 3 și 2 progresii de rație 4, în total 20 de progresii. **21.** Dacă, prin absurd, presupunem că există o progresie în care $1 = a_m$, $\sqrt{2} = a_n$, $\sqrt{3} = a_p$, cu $n, m, p \in \mathbb{N}^*$; atunci $a_1 + (n-1)r = 1$, $a_1 + (m-1)r = \sqrt{2}$, $a_1 + (p-1)r = \sqrt{3}$. Deducem că $\sqrt{2} - 1 = (m-n)r$, $\sqrt{3} - 1 = (p-n)r$ și, cum evident că $r \neq 0$, rezultă că $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{m-n}{p-m}$. Numărul din stânga fiind irațional, iar cel din dreapta rațional, ajungem la o contradicție. **22.** $x = 9$. **23.** Din $b_3^2 = 6 \cdot 24$, obținem că $b_3 = 12$. Rația progresiei va fi $q = \frac{b_3}{b_2} = 2$, deci $b_1 = \frac{b_2}{q} = 3$. **24.** Fie q rația progresiei; atunci $b_1q^2 = 2$ și $b_1q^4 = 4$. Rezultă $q^2 = 2$ și $b_1 = 1$. Prin urmare $b_7 = b_1q^6 = 8$. **25.** Fie $q > 0$ rația progresiei. Rezultă $b_1 + b_1q = 3$ și $b_1q^2 + b_1q^3 = 12$. Deducem $q = 2$. **26.** Dacă q este rația progresiei, atunci $a_1(1 + q^3) = a_1(1+q)(1-q+q^2) = \frac{7}{16}$, iar $a_1(1 - q + q^2) = \frac{7}{8}$. Deducem că $q = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$. **27.** $q = 2$. **28.** Fie q rația progresiei, iar $a + b + c = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Atunci $a(1 + q + q^2) = 2k$ și, cum $1 + q + q^2 = 1 + q(q+1)$ este număr impar, atunci a este par, prin urmare și b, c sunt tot pare. **29.** $s = 2 - \frac{1}{2^{2008}} \in (1, 2)$. **30.** $2(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^8) = 2 \cdot \frac{3^9 - 1}{2} = 3^9 - 1 < 3^9$. **31.** $s = \frac{2^{101}+1}{3}$. **32.** $n = 6$. **33.** Distanța parcursă de minge (în metri) este $8 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{23}}\right) \cdot 8 = 24 - \frac{1}{2^{19}} < 24$. **34.** Înălțimea insulei după 20 de ani este $100\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{20}$ și atunci trebuie să arătăm că $\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{20} > 2$. Se demonstrează (prin inducție) că are loc inegalitatea lui Bernoulli: $(1 + x)^n > 1 + nx$, $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. În cazul nostru, $\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{20} > 1 + 20 \cdot \frac{5}{100} = 2$,

Scanned with OKEN Scanner

de unde concluzia problemei. **35.** Din $a^2 = 2b$ și $8 = 2 + a$ rezultă $a = 6$, $b = 18$. **36.** $a_{n+1} - a_n = 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci (a_n) este progresie aritmetică de rație $r = 3$ și $a_1 = 1$. Apoi $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 51 \Rightarrow \frac{(3n-1)n}{2} = 51$, de unde $n = 6$. **37.** Deoarece $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, (b_n) este progresie geometrică de rație $q = 2$ și $b_1 = 3$; $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 93 \Leftrightarrow 3(2^n - 1) = 93 \Leftrightarrow n = 5$. **38.** $a_n + x_n + y_n$; $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, rezultă că (x_n) este progresie aritmetică. Deducem $x_n = 2n - 1$. $y_1 = \frac{3}{5}$, $y_2 = \frac{3}{10}$, $y_3 = \frac{3}{20}$, rezultă că (y_n) este o progresie geometrică. Deducem $y_n = \frac{3}{5 \cdot 2^{n-1}}$. $S_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = n^2 + \frac{6}{5}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. **39.** a) Numerele 16, 19, 22, ..., 61 formează o progresie aritmetică cu $a_1 = 16$, $r = 3$. Deci $a_n = 3n + 13$; $a_n = 61 \Rightarrow n = 16$. Rezultă că $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_{16} = \frac{(a_1 + a_{16})16}{2} = 616$. b) Numerele 8, 16, 32, ..., 1024 formează o progresie geometrică cu $b_1 = 8$, $q = 2$. Deci $b_n = 2^{n+2}$; $b_n = 2^{n+2} = 1024 \Rightarrow n = 8$. Rezultă $b = b_1 + b_2 + \ldots + b_8 = b_1 \frac{q^8 - 1}{q - 1} = 8(2^8 - 1)$. **40.** a) $a_{n+1} - a_n = (2n + 1) - (2n - 1) = 2$, $\forall n \geq 1$; înseamnă că $(a_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică de rație 2. b) $n = 2001$. c) Observăm că $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{2n+1}}{2^{2n-1}} = 4$, deci $(b_n)_{n \geq 1}$ este progresie geometrică de rație 4. d) Se folosește metoda inducției matematice. **41.** a) Cum $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} - 3}{a_n - 3} = \frac{2a_n - 6}{a_n - 3} = 2$, $\forall n \geq 1$, $(b_n)_{n \geq 1}$ este progresie geometrică de rație 2. b) Deoarece $b_1 = a_1 - 3 = -2$, atunci $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = -2^n$, $\forall n \geq 1$. Apoi, $a_n = b_n + 3 = 3 - 2^n$, $\forall n \geq 1$.

1.4. Funcții. Funcția liniară

1. a) $f(3) = 0$, deci $P = 0$. b) $S = 100 + \sum_{k=1}^{100} k^2 = 100 + \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = 338450$. c) $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{100}{101} = \frac{1}{101}$. **2.** a) $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$. b) $D_{max} = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. **3.** Vom avea obligatoriu $f(b) = f(c) = 2$, iar $f(a)$ poate fi 1 sau 2; există două funcții cu proprietatea din enunț. **4.** a) Numerele $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ pot fi alese fiecare în câte patru moduri, iar $f(4)$ este fixat odată ce am ales pe $f(1)$; rezultă că există $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ de funcții ca în enunț. b) Cu un raționament asemănător, găsim $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 192$ de funcții. **5.** Numărul $f(1)$ poate fi 0 sau 2, iar numerele $f(2)$ și $f(3)$ pot lua oricare dintre cele patru valori din codomeniu; obținem $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ funcții. **6.** Dacă, prin absurd, ar exista o astfel de funcție, pentru $x = 0$ am obține că $f(0) + f(1) = 0$, iar pentru $x = 1$, că $f(1) + f(0) = 1$. Am ajuns la contradicția $0 = 1$. **7.** $a = b = 1$, $A = \mathbb{Z}$. **8.** Cum $A(a, 2) \in G_f$, atunci $f(a) = 2$. Dacă $a < 1$, atunci $f(a) = \frac{a}{2} + 1 = 2$, de unde $a = 2$, fals. Dacă $a \geq 1$, atunci $\sqrt{a - 1} = 2$, deci $a = 5$, soluție care convine. **9.** $\text{Im } f = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

10. Ecuația $f(x) = y$ trebuie să aibă soluție $x \in [-2, 1]$; impunem deci ca $-2 \le \frac{1-y}{2} \le 1$, de unde $y \in [-1, 5]$. În concluzie, Im $f = [-1, 5]$. *Altfel*: trasăm segmentul care reprezintă graficul lui f, iar proiecția acestuia pe Oy este tocmai Im $f = [-1, 5]$. **11.** Deoarece $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \left(\frac{x_1+1}{x_1-3} - \frac{x_2+1}{x_2-3}\right)\cdot\frac{1}{x_1-x_2} = \frac{-4}{(x_1-3)(x_2-3)} < 0$, $\forall\, x_1, x_2 \in (3, +\infty)$, rezultă că f este strict descrescătoare. Avem că $y \in$ Im f dacă și numai dacă ecuația $\frac{x+1}{x-3} = y$ are soluție $x \in (3, +\infty)$. Impunem deci ca $x = \frac{3y+1}{y-1} > 3$, de unde $\frac{4}{y-1} > 0$, adică $y \in (1, \infty)$. În final, Im $f = (1, \infty)$.

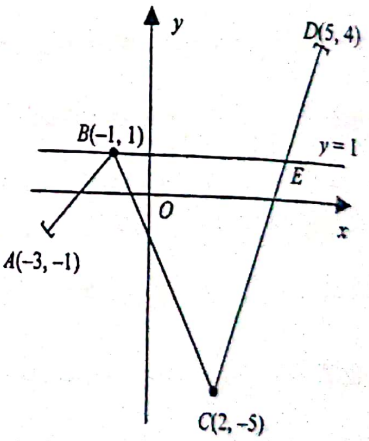
12. a) $f(-x) = (-x)^2 - \frac{1}{(-x)^2} = x^2 - \frac{1}{x^2} = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$. b) $f(-x) = (-x)^3 + \frac{1}{x} = -f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$. **13.** Spre exemplu, $f(1) = 0$; $f(-1) = -2$. Cum $f(1) \ne f(-1)$ și $f(1) \ne -f(-1)$, rezultă concluzia. **14.** $f\left(x+\frac{1}{3}\right) = \{3x + 1\} = \{3x\} = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. **15.** Prin reducere la absurd, dacă f este periodică de perioadă T, $T \ne 0$ rezultă $f(x + T) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = 0 \Rightarrow f(T) = 0 \Rightarrow T = 1$. Prin urmare, $f(x + 1) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, fals. Așadar, f nu este periodică. **16.** $f+g, f-g, f\cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = \begin{cases} 1-2x, x \in (-\infty, 0) \\ -x-2, x \in [0, 2) \\ 3x-5, x \in [2, \infty) \end{cases}$, $(f-g)(x) = \begin{cases} 3-4x, x \in (-\infty, 0) \\ 6-5x, x \in [0, 2) \\ 3-x, x \in [2, \infty) \end{cases}$, $(fg)(x) = \begin{cases} -3x^2+5x-2, x \in (-\infty, 0) \\ -6x^2+16x-8, x \in [0, 2) \\ 2x^2-6x+4, x \in [2, \infty) \end{cases}$.

17. $(f \circ f \circ f \circ f)(1) = f(f(f(f(1)))) = f(f(f(0))) = f(f(0)) = f(0) = 0$. **18.** Cum $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = x$, atunci $S =$ $= (-10) + (-9) + \ldots + 10 = 0$. **19.** $f \circ g, g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^2$, $(g \circ f)(x) = x^2 - 2x + 2$. **20.** $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^2$ și $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = x^2 + 2x$. **21.** $f \circ g : (1, \infty) \to (1, \infty)$, $(f \circ g)(x) = x$ și $(g \circ f) : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $(g \circ f)(x) = x$. Funcțiile $f \circ g$ și $g \circ f$ nu sunt egale deoarece nu au același domeniu de definiție. **22.** a) Ecuația dreptei se scrie sub forma redusă $y = -2x + 1$, deci dreapta este grafic al funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 1$. b) Dreapta d' este verticală, deci nu poate fi grafic al unei funcții. Dreapta d'' este orizontală și este graficul funcției constante $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\frac{1}{2}$. **23.** Sistemul format din ecuațiile dreptelor nu are soluție, deci dreptele sunt paralele. **24.** $a = 1$, $b = -2$. **25.** $A(7, 0)$, $B\left(0, \frac{7}{3}\right)$. **26.** $m \in (-\infty, 1]$. **27.** $M\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. **28.** $a = 2$. **29.** Dacă $a \in$ $\in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, sistemul are soluție unică: $x = \frac{a^2-2a-2}{a^3-1}$, $y = \frac{2a+1}{a^3-1}$. Pentru $a = 1$, sistemul nu are soluție. **30.** Două puncte de pe graficul lui g sunt $A(1, 0)$ și $B(0, 3)$. Simetricele lor față de dreapta d sunt A, respectiv $B'(2, 3)$. Graficul lui f este dreapta AB', deci $f(x) = ax + b$, $f(1) = 0$ și $f(2) = 3$, de unde $f(x) = 3x - 3$. **31.** Se impune condiția $m^2 - 2 < 0$, de unde $m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. **32.** Cum funcția $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = -2x + 2$ este de gradul I, cu

Scanned with OKEN Scanner

coeficient dominant negativ, ea va fi strict descrescătoare. **33.** Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, cu $a\neq 0$, atunci $f\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\circ f)(x)=a^2x+ab+b$. Astfel, $f\circ f$ este funcție de gradul I cu coeficient dominant pozitiv, deci este strict crescătoare. **34.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, cu $a>0$, astfel încât $f(f(x))=a^2x+ab+b=4x+3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Rezultă că $a^2=4$ și $ab+b=3$, deci $a=2$, $b=1$. Astfel, $f(x)=2x+1$ este singura soluție a problemei. **35.** $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=2$. **36.** $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)=ax+ab+3$, $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x)=ax+3+b$; $f\circ g$ și $g\circ f$ sunt egale $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow ab=b\Leftrightarrow a=1, b\in\mathbb{R}$ sau $a\in\mathbb{R}, b=0$. **37.** $a=2$, $b=1$. **38.** a) Dacă $x\in(-\infty,3)$, ecuația devine $3-x+4-x=1$, de unde $x=3\notin(-\infty,3)$. Dacă $x\in[3,4]$, ecuația devine $x-3+4-x=1$, adică $0=0$, prin urmare orice număr din intervalul $[3,4]$ este soluție. Dacă $x\in(4,\infty)$, ecuația devine $x-3+x-4=1$, deci $x=4\notin(4,+\infty)$. În concluzie, $S=[3,4]$. b) $S=\{-\sqrt{2},0\}$. **39.** a) $x=-1$ sau $x=1$; b) $x\in[2,4]$; c) $x\in\varnothing$. **40.** $S=(-\infty,1)\cup(2,\infty)$. **41.** a) $x\in(-\infty,2)\cup[6,\infty)$; b) $x\in(-1,2)$. **42.** a) $x\in[-1,4)$; b) $x\in[1,2]$. **43.** a) $[2x-1]=3\Leftrightarrow 3\leq 2x-1<4\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in\left[2,\frac{5}{2}\right)$. b) Fie $[x+1]=2x-1=n$, $n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{n+1}{2}$ și $x+1\in[n,n+1)$, $n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 1<n\leq 3, n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n\in\{2,3\}$. Rezultă $x=\frac{3}{2}$ sau $x=2$. c) $x\in\{-9,-7,-5\}$. **44.** b) $A(0,-1)$; $M(-3,0)$, $N(1,0)$, $P(3,0)$. **45.** b) $A(0,-1)$; $M(-4,0)$; $N\left(\frac{1}{2},0\right)$, $P(2,0)$. c) $x\in\left\{-2,-\frac{1}{2},4\right\}$.

46. a) G_f este reprezentat în figura alăturată. Imaginea funcției f este proiecția graficului pe Oy, deci $\operatorname{Im} f=[-5,4]$. Observăm că f este strict descrescătoare pe $[-1,2]$ și strict crescătoare pe $[-3,-1]$ și pe $[2,5]$, -3 și 2 sunt puncte de minim local ale lui f, iar -1 și 5 sunt puncte de maxim local ale lui f. b) Numărul soluțiilor ecuației $f(x)=m$ este egal cu numărul punctelor în care dreapta $y=m$ (paralelă cu axa Ox) intersectează graficul funcției. Urmărind G_f, deducem că: dacă $m=-5$, atunci ecuația $f(x)=m$ are o singură soluție ($x=2$); dacă $m\in(-5,-1)$, atunci ecuația $f(x)=m$ are două soluții; dacă $m\in[-1,1)$, atunci ecuația $f(x)=m$ are trei soluții; dacă $m=1$, atunci ecuația $f(x)=m$ are două soluții; dacă $m\in(1,4]$, atunci ecuația $f(x)=m$ are o singură soluție. Pentru celelalte valori ale lui m ecuația nu are soluții. c) Dreapta $y=1$ intersectează G_f în $E(4,1)$. Utilizând graficul, soluția inecuației $f(x)\leq 1$ este intervalul $[-3,4]$.



47. Explicitând partea întreagă, obținem $f(x)=\begin{cases}1, x=\frac{1}{4}\\ 3x, x\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]\\ 2x, x\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]\end{cases}$. Graficul lui f este format din două segmente și un punct. **48.** a) Rezultă din faptul că $\{x\}\in[0,1)$. b) Dacă $x\in[0,1)$, atunci $\{x\}=x$, prin urmare $f(x)=\sqrt{x-x^2}$. c) $f(x+1)=\sqrt{\{x+1\}-\{x+1\}^2}=\sqrt{\{x\}-\{x\}^2}=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deoarece $\{x+n\}=\{x\}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

d) Ținând cont de c), obținem că $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=...=f\left(\frac{2007}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$, deci suma cerută este egală cu $1004\cdot\frac{1}{2}=502$. **49.** a) Avem că $f(0+0)=f(0)=f(0)+f(0)$, deci $f(0)=0$. Din $0=f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)$, rezultă că $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in\mathbb{Q}$. b) Se demonstrează prin inducție matematică. d) În egalitatea de la c), luăm $x_1=x_2=...=x_n=x$. e) Facem în d) $x=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, obținând că $nf\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=f(1)=a$, prin urmare $f\left(\frac{1}{n}\right)=a\cdot\frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Apoi, $f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(m\cdot\frac{1}{n}\right)=m\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)=m\cdot a\cdot\frac{1}{n}=a\cdot\frac{m}{n}$, $\forall m,n\in\mathbb{N}, n\neq 0$. Conform b), avem că $f\left(-\frac{m}{n}\right)=-f\left(\frac{m}{n}\right)=-\frac{m}{n}$, $\forall m,n\in\mathbb{N}, n\neq 0$. În concluzie, $f(x)=ax$, $\forall x\in\mathbb{Q}$.

1.5. Ecuația de gradul II. Funcția de gradul II

1. a) $S=\{-3, 0\}$. b) $S=\{-8, -1\}$. c) $S=\left\{\frac{-5-\sqrt{5}}{2},\frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right\}$. d) $S=\{-10, 1\}$. e) $S=\left\{-\frac{4}{3},1\right\}$. f) $S=\emptyset$.

2. a) Pentru existența fracțiilor, se impune condiția $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$. După eliminarea numitorilor, obținem ecuația $x^2-6x+5=0$, cu soluțiile $S=\{1, 5\}$, ambele acceptabile. b) În condițiile $x\in\mathbb{R}\in\{-2, 2\}$, ecuația devine $x^2-2x-4=0$, cu soluțiile $S=\{1-\sqrt{5},1+\sqrt{5}\}$. **3.** a) Se impune condiția $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. După eliminarea numitorilor, se obține ecuația $x^2-x-2=0$, cu soluțiile $x_1=2$, $x_2=-1$. Doar prima soluție este acceptabilă, prin urmare $S=\{2\}$. b) Se impune condiția $x\in\mathbb{R}^*$. Cu substituția $\frac{1}{x}+2=y$, obținem ecuația $y^2+y-12=0$, cu soluțiile $y_1=-4$, $y_2=3$. Corespunzător, obținem $x_1=-\frac{1}{6}$, $x_2=1$, ambele soluții fiind acceptabile. **4.** Discriminantul ecuației este $\Delta=(m+7)^2\geq 0$, prin urmare $x_1=-3$, $x_2=\frac{m+1}{2}$. Cele două soluții coincid pentru $m=-7$. **5.** a) Din prima ecuație obținem că $x=1-2y$. Înlocuim în a doua și rezultă că $y^2+2y=0$, de unde $y_1=-2$, $y_2=0$. În concluzie, $(x, y)\in\{(5,-2); (1, 0)\}$. b) Scăzând membru cu membru cele două ecuații, obținem că $x^2+4x+3=0$, de unde $x_1=-1$, $x_2=-3$. Rezultă că $S=\{(-1, 5); (-3, 19)\}$. **6.** a) Sistemul dat este simetric; găsim $S=\{(1, 3); (3, 1)\}$. b) $S=\{(1, 1)\}$. **7.** a) Dacă notăm $s=x+y$, $p=xy$, atunci $s^2-2p=8$ și $\frac{s}{p}=1$, deci $s=p=-2$ sau $s=p=4$. Obținem că $S=\{(-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3}); (-1+\sqrt{3},-1-\sqrt{3}); (2, 2)\}$. b) Dacă notăm $z=\frac{1}{x+2y}$, atunci $y+z=2$ și $y\cdot z=-3$, de unde $y=-1$, $z=3$ sau $y=3$, $z=-1$. Soluțiile sistemului sunt $S=$

Scanned with OKEN Scanner

$= \left\{\left(\frac{7}{3}, -1\right); (-7, 3)\right\}$. **8.** Sistemul poate fi rezolvat ca fiind omogen sau simetric; $S = \{(3, 2); (2, 3); (-3, -2); (-2, -3)\}$. **9.** a) $S = (-1, 0)$. b) $S = [-3, 3]$. c) $S = [1, 3]$. d) $S = \emptyset$. **10.** $2x^2 + 7x - 9 < 0, x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{9}{2}, 1\right), x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in \{-4, -3, -2, -1, 0\}$. **11.** Inecuația revine la $x(x^2 - 2x - 1) \geq 0$, cu soluția $S = [1 - \sqrt{2}, 0] \cup [1 + \sqrt{2}, +\infty)$. **12.** Se impune ca $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$. Inecuația se poate scrie sub forma $\frac{x^2 - 3x + 3}{(x-1)(2x-1)} \leq 0$, cu soluția $S = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. **13.** Se impun condițiile $x_A < 0$, $y_A > 0$, de unde $m \in (-\infty, 1)$, respectiv $m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$. Intersectând, obținem că $m \in (-\infty, 0)$. **14.** a) $x \in \{0, 2, 3\}$; b) $x \in (-\infty, 0]$. **15.** $S = \left(-\infty, \frac{11 - \sqrt{105}}{2}\right] \cup$ $\cup \left[\frac{11 + \sqrt{105}}{2}, +\infty\right)$. **16.** Inecuația dată revine la sistemul de inecuații $-1 \leq \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \leq 1$, cu soluția $S =$ $= \left[0, \frac{8}{5}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$. **17.** Se impun condițiile $m < 0$, $\Delta \leq 0$, de unde $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{8}\right]$. **18.** Dacă $m = 1$, inecuația devine $-2x + 2 > 0$, care are soluția $S = (-\infty, 1) \neq \mathbb{R}$. Dacă $m \neq 1$, se impun condițiile $m - 1 > 0$, $\Delta < 0$, de unde $m \in \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$. **19.** Impunem condițiile $a < 0$, $\Delta < 0$ și obținem că $a \in \left(-\infty, \frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right)$. **20.** Cum $x^2 + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $x^2 + ax + 2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se impune condiția $\Delta \leq 0$ și obținem că $a \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$. **21.** Cum $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, inegalitatea din enunț revine la $2x^2 + 2x + 3 \leq a(x^2 + x + 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, adică $(a-2)x^2 + (a-2)x + a - 3 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Impunem condițiile $a - 2 > 0$, $\Delta \leq 0$ și obținem că $a \in \left[\frac{10}{3}, +\infty\right)$. **22.** Impunem condiția $\Delta \geq 0$, de unde $a \in \left(-\infty, \frac{9 - 2\sqrt{19}}{5}\right] \cup \left[\frac{9 + 2\sqrt{19}}{5}, +\infty\right)$. **23.** $A = B \Leftrightarrow$ ecuația $x^2 - 4x - m = 0$ are două rădăcini egale cu 2. Rezultă $m = -4$. **24.** Impunem condiția $\Delta > 0$, deci $m \in (-\infty, 1)$. Apoi $|x_1 - x_2| =$ $= \left|\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2\sqrt{1 - m} = 1$, de unde $m = \frac{3}{4}$, soluție acceptabilă. **25.** Dacă $x_1 = \sqrt{3}$ și $x_2 =$ $= -\sqrt{3}$, atunci $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 x_2 = -3$, deci ecuația $x^2 - 3 = 0$ verifică cerințele enunțului. **26.** a) Se impun condițiile $\Delta > 0$, $S = 0$, deci $m = 0$. b) Se impun condițiile $\Delta > 0$, $P = 1$, de unde $m = 2$. **27.** Se impun condițiile $\Delta > 0$, $P < 0$, de unde $m \in (-\infty, -10) \cup (0, \infty)$. **28.** Se impun condițiile $\Delta \geq 0$, $S > 0$, $P > 0$, de unde $m \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. **29.** Impunem condiția $\Delta \geq 0$, de unde $m \in (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$. Cum $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3PS =$ $= (m-1)^3 - 3 \cdot \frac{3 - m}{4} \cdot (m - 1) = \frac{(m-1)(4m^2 - 5m - 5)}{4}$, ipoteza problemei revine la $(m-1)(4m^2 - 5m - 5) = m - 1$,

Scanned with OKEN Scanner

de unde $m = 1$ (soluție care nu se află în domeniul admisibil de valori ale lui m) sau $4m^2 - 5m - 5 = 1$, de unde $m = -\frac{3}{4}$ (din nou neconvenabil) sau $m = 2$ (convine). În concluzie, valoarea dorită a lui m este 2. **30.** Se impune condiția $\Delta \geq 0$, deci $m \in [-1, 3]$. Ipoteza problemei se scrie sub forma $m^2(x_1 + x_2) - 3(x_1^2 + x_2^2) = 0$, de unde $m^2(m + 3) - 3(-m^2 + 6m + 9) = 0$, adică $(m - 3)(m^2 + 9m + 9) = 0$. Obținem soluțiile $m_1 = 3$, $m_2 = \frac{-9+3\sqrt{5}}{2}$, $m_3 = \frac{-9-3\sqrt{5}}{2}$, doar prima dintre ele fiind convenabilă. **31.** Soluțiile ecuației date sunt $x_1 = 1$, $x_2 = m - 1$, ambele reale, indiferent de $m \in \mathbb{R}$. a) Avem că $x_1 = 2x_2$ pentru $m = \frac{3}{2}$ și că $x_2 = 2x_1$ când $m = 3$, deci $m \in \left\{\frac{3}{2}, 3\right\}$. b) Inegalitatea dată revine la $m^2 - 2m + 2 > m(m - 1)$, prin urmare $m \in (-\infty, 2)$. **32.** a) $x_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$. b) Cum $x_1^2 - 2x_1 - 7 = 0$, rezultă $x_1^{n+2} - 2x_1^{n+1} - 7x_1^n = 0$. La fel, $x_2^{n+2} - 2x_2^{n+1} - 7x_2^n = 0$. Prin adunarea acestor relații rezultă concluzia. c) Avem $S_0 = 2$, $S_1 = 2$, deci $S_2 = 2S_1 + 7S_0 = 18$; $S_3 = 2S_2 + 7S_1 = 50$; $S_4 = 2S_3 + 7S_2 = 226$ și $S_5 = 2S_4 + 7S_3 = 802$. **33.** Considerăm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ și impunem condițiile $f(-1) = 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 3$. Rezolvând sistemul obținut, deducem că $a = b = c = 1$, prin urmare $f(x) = x^2 + x + 1$. **34.** Cum $x_V = -\frac{b}{2a}$, $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$, obținem că $V\left(-\frac{5}{2}, -\frac{21}{4}\right)$, punct cu ambele coordonate negative. **35.** Din condițiile $f(-1) = 6$, $f(2) = 3$, $a > 0$, $-\frac{\Delta}{4a} = 2$, rezultă $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$ sau $a = \frac{1}{9}$, $b = -\frac{10}{9}$, $c = \frac{43}{9}$. **36.** Avem că $V(2, 5)$, deci $x_V + y_V = 2 + 5 = 7$; rezultă că $V \in d$. **37.** Deoarece $x_V = -\frac{a}{2} \Rightarrow -\frac{a}{2} = 1$, deci $a = -2$ și $y_V = b - 1 \Rightarrow b - 1 = -4$, deci $b = -3$. Rezultă $f(x) = x^2 - 2x - 3$ și $f(-2) = 5$. **38.** $\min f = y_V = -\frac{\Delta}{4a} = m - 1$. Rezultă $m = 2$. **39.** Punctul de minim este $V\left(\frac{2-a}{2}, \frac{-\Delta}{4}\right)$. Deci $\frac{2-a}{2} = 1$, $-\frac{\Delta}{4} = 4$ și, de aici, $a = 0$, $b = 2$. **40.** Axa de simetrie este verticala care trece prin vârful parabolei; cum $x_V = 1$, ecuația axei de simetrie este d: $x = 1$. **41.** Axa de simetrie a parabolei $y = ax^2 + bx + c$ este dreapta $x = -\frac{b}{2a}$. Rezultă $m = 2$. **42.** Punctele de intersecție ale graficului funcției f cu axa Ox sunt $A(1, 0)$ și $B(-2, 0)$. Rezultă $AB = 3$. **43.** Se impune ca $a + 1 \neq 0$ și $\Delta > 0$, de unde $a \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup \left(\frac{13}{5}, +\infty\right)$. **44.** Rezolvând sistemul format din ecuația dreptei și ecuația parabolei, obținem soluțiile $S = \{(0, 1); (1, 3)\}$. Rezultă că dreapta d și parabola $\mathcal{P}$ se intersectează în două puncte, anume $A(0, 1)$ și $B(1, 3)$. **45.** Rezolvând sistemul format din ecuația dreptei și ecuația parabolei, obținem o singură soluție, anume $(x, y) = (3, 9)$, prin urmare intersecția $d \cap \mathcal{P}$ este formată dintr-un singur punct, $A(3, 9)$. Cum d este dreaptă oblică, ea nu poate fi paralelă cu axa de simetrie a parabolei. Concluzionăm că d este tangentă la $\mathcal{P}$. **46.** Trebuie ca sistemul format din ecuația dreptei și ecuația parabolei să nu aibă soluție. Aceasta revine la faptul că ecuația $(a + 1)x^2 +$

Scanned with OKEN Scanner

$+ ax + 3 = x + 1$ are discriminantul negativ. Obținem că $a \in (5-4\sqrt{2}, 5+4\sqrt{2})$. **47.** Rezolvând sistemul format din ecuațiile celor două parabole, găsim punctele de intersecție $A(1, 3)$ și $B\left(-\frac{5}{2}, \frac{19}{4}\right)$. **48.** a) Impunem condițiile $f(1) = g(1) = 3$, de unde $m = 8$. b) $A = [1, 4]$. **49.** $f_{max} = -\frac{\Delta}{4a} = 0$. **50.** a) Punctul de minim este $x_{min} = -\frac{b}{2a} = 1$, iar valoarea minimă este $f_{min} = f(x_{min}) = m - 1$. (Altfel, $f_{min} = -\frac{\Delta}{4a} = m - 1$). b) Pentru ca $x^2 - 2x + (m-2) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, se impune ca $\Delta \leq 0$, de unde $m \in [3, +\infty)$. c) Observăm că, pentru $m = 1$, $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Atunci $(f \circ f)(x) = 0 \Leftrightarrow f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow (f(x) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 2\}$. **51.** Cum $a = -3 < 0$, funcția este strict descrescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$, deci pe $[1, \infty)$. Observăm că $\sqrt{2} < \sqrt{3} < 2$, deci $f(2) < f(\sqrt{3}) < < f(\sqrt{2})$. **52.** a) $\text{Im} f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, \infty\right)$, prin urmare $\text{Im} f = \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$. b) Graficul lui f este un segment de parabolă, cu capetele $A(-2, 10)$ și $B(2, 2)$ și de vârf $V(1, 1)$. Rezultă că $\text{Im} f = [1, 10]$. **53.** Graficul funcției f este situat deasupra dreptei $y = 1 \Leftrightarrow$ minimul funcției f este mai mare decât $1 \Leftrightarrow y_V > 1 \Leftrightarrow m^2 - 6x + 5 < 0 \Leftrightarrow m \in (1, 5)$. **54.** a) Deoarece $x_V = -\frac{m+1}{m}$, $y_V = -\frac{1}{m}$ și $x_V + 1 = y_V$, rezultă concluzia. b) Deducem $A(-1, 0)$; $B\left(-\frac{m+2}{m}, 0\right)$ și $F\left(-\frac{m+1}{2}, 0\right)$, apoi $AB = 2FV = \frac{2}{|m|}$. c) Fie $M(a, b)$ punctul fix; rezultă $f_m(a) = b$, $\forall m \in \mathbb{R}^*$, deci $b = ma^2 + 2(m+1)a + m + 2$, $\forall m \in \mathbb{R}^*$. Obținem că $a^2 + 2a + 1 = 0$ și $b = 2a + b$, de unde $a = -1$, $b = 0$ și $M(-1, 0)$. **55.** Fie $d_m: y = mx$ o dreaptă oarecare prin originea O. Rezultă $M\left(\frac{m}{4}, \frac{m^2}{4}\right)$ și $N\left(\frac{m}{12}, \frac{m^2}{12}\right)$. Deducem $P\left(\frac{m}{6}, \frac{m^2}{6}\right)$ și cum $y_P = 6x_p^2$, rezultă concluzia.

1.6. Vectori

1. a) $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$. b) $\overline{AC}$ și $\overline{BD}$. c) $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$. d) $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$. **2.** Cum $\overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PM} = \overline{MM} = \vec{0}$, rezultă că $|\overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PM}| = 0$. **3.** $|\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD}| = |2\overline{AC}| = 2\sqrt{2}$. **4.** $|\overline{AB} + \overline{AC}| = 5 = |\overline{AB} - \overline{AC}|$. **5.** a) Ambele sume sunt egale cu $\overline{AC}$. b) $2\overline{AM} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. c) Ambele diferențe sunt egale cu $\overline{MC}$. d) $\overline{CA} + \overline{CB} = (\overline{CA} + \overline{AM}) + (\overline{CB} + \overline{BM}) = \overline{CM} + \overline{CM} = 2\overline{CM}$. **6.** Ținând seama de faptul că $ABDE$ și $ACDF$ sunt dreptunghiuri (deci paralelograme), avem că $(\overline{AB} + \overline{AE}) + (\overline{AC} + \overline{AF}) + \overline{AD} = 3\overline{AD} = 6\overline{AO}$. **7.** Fie O punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului. Cum O este mijlocul lui $[AC]$, avem că $\overline{MA} + \overline{MC} = 2\overline{MO}$. Analog

Scanned with OKEN Scanner

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$, de unde concluzia. **8.** Din $\frac{BM}{MC}=\frac{1}{2}$, ținând seama și de sens, obținem că $2\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{CM}$. Avem că $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$. Înmulțind cu 2 prima relație și sumând, deducem că $3\overrightarrow{AM}=$ $=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, de unde cerința. **9.** $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$. **10.** Vectorul $b\cdot\overrightarrow{AB}$ are lungimea egală cu bc, la fel ca și vectorul $c\cdot\overrightarrow{AC}$. Punctul D este al patrulea vârf al paralelogramului $AB'DC'$, unde $\overrightarrow{AB'}=b\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC'}=$ $=c\cdot\overrightarrow{AC}$. Cum $AB'=AC'$, paralelogramul $AB'DC'$ este romb, prin urmare diagonala AD este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. **11.** a) $\overrightarrow{AB}(1,0)$; $\overrightarrow{AC}(1,1)$; $\overrightarrow{OA}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{MC}\left(\frac{1}{2},1\right)$. b) $\overrightarrow{AB}(1,0)$; $\overrightarrow{AC}(0,1)$; $\overrightarrow{OA}\left(0,-\frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{MC}\left(-\frac{1}{2},1\right)$. **12.** $\overrightarrow{MA}(-1,3)$, $\overrightarrow{MB}(2,2)$, prin urmare $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}(1,5)$. **13.** $a=-1$. **14.** $p=4$, $q=2$. **15.** $C(4,4)$. **16.** a) $A'(1,0)$, respectiv $A''(0,3)$. b) $(1,-3)$, $(-1,3)$, $(-1,-3)$, respectiv $(3,1)$. **17.** Dacă A' este simetricul lui A față de B, atunci B este mijlocul lui $[AA']$. Deducem că $x_B=\frac{x_A+x_{A'}}{2}$, $y_B=\frac{y_A+y_{A'}}{2}$, de unde $x_{A'}=2x_B-x_A=6$, $y_{A'}=2y_B-y_A=-4$. În concluzie, $A'(6,-4)$. **18.** Din faptul că diagonalele $[AC]$ și $[BD]$ au același mijloc obținem că $x_A+x_C=x_B+x_D$, iar $y_A+y_C=y_B+y_D$. Astfel, $D(5,4)$. **19.** Dacă $M(a,b)$, atunci din $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ rezultă că $(a-3)\vec{i}+(b-2)\vec{j}=\frac{1}{3}(3\vec{i}+3\vec{j})$, deci $a=4$, $b=3$ și $M(4,3)$. Dacă $N(c,d)$, atunci din $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ deducem că $(c-3)\vec{i}+(d-2)\vec{j}=2\vec{i}+2\vec{j}$, deci $N(5,4)$. *Altfel*: Punctul M aparține segmentului $[AB]$ și îl împarte în raportul $\frac{MA}{MB}=\frac{1}{2}$. Rezultă că $x_M=\frac{x_A+\frac{1}{2}x_B}{1+\frac{1}{2}}=4$, $y_M=\frac{y_A+\frac{1}{2}y_B}{1+\frac{1}{2}}=3$, deci $M(4,3)$. Analog se procedează pentru N. **20.** a) $|\vec{v}|=\sqrt{5^2+12^2}=13$. b) $a=\pm4\sqrt{3}$. **21.** $m=\pm2$. **22.** a) $\mathcal{P}_{ABC}=\sqrt{2}+\sqrt{13}+\sqrt{5}$. b) $\frac{1}{2}$. **23.** a) $AB=$ $=10$, $BC=7\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{2}$. b) Cum $AB^2=100=BC^2+AC^2$, rezultă că ΔABC este dreptunghic în C. c) Centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este mijlocul ipotenuzei AB, de coordonate $(2,2)$. **24.** Din teorema lui Thales rezultă că $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=4$. Folosind proporții derivate, deducem că $\frac{CN}{CA}=\frac{1}{5}$, deci (având sensuri contrare) $\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$. **25.** Din $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=2$, conform reciprocei teoremei lui Thales, rezultă că $DE\parallel BC$. **26.** Se impune condiția $\frac{a-2}{8}=\frac{3}{2a-20}$, de unde $a=6\pm2\sqrt{7}$. **27.** Cum $\overrightarrow{AB}(-3,2)$, $\overrightarrow{CD}(a-1,1)$, avem că $AB\parallel$ $\parallel CD\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\frac{-3}{a-1}=\frac{2}{1}\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$. **28.** Dacă M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA, atunci $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, prin urmare laturile opuse MN și PQ ale patrulaterului $MNPQ$ sunt paralele și

Scanned with OKEN Scanner

congruente. **29.** Cum $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=3$, din reciproca teoremei lui Thales rezultă că $MN \parallel BC$. *Altfel:* $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM})=\frac{4}{3}\overrightarrow{MN}$, deci $BC \parallel MN$. **30.** $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{QA}=(\overrightarrow{BC})$. **31.** Folosind formula care dă punctul ce împarte un segment într-un raport dat, obținem că $\overrightarrow{AF}=\frac{\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AE}}{1+2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, astfel că vectorii $\overrightarrow{AF}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari. Rezultă că punctele A, C, F sunt coliniare. **32.** Folosind teorema lui Menelaus în triunghiul AMC și teorema bisectoarei, rezultă că $AP=PM \Leftrightarrow \frac{AP}{PM}=1 \Leftrightarrow \frac{AD}{DC}\cdot\frac{CB}{BM}=1 \Leftrightarrow \frac{AB}{BC}\cdot 2=1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow BC=2AB$. **33.** Cum vectorii $\overrightarrow{LM}(-1,1)$ și $\overrightarrow{LN}(-2,2)$ sunt coliniari și au aceeași origine, rezultă că cele trei puncte sunt coliniare. *Altfel:* Avem că $LM=\sqrt{2}$, $MN=\sqrt{2}$, iar $LN=2\sqrt{2}$. Cum $LN=LM+MN$, rezultă coliniaritatea celor trei puncte. **34.** $G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. **35.** $\vec{r}_G=\frac{1}{3}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C)=2\vec{i}+2\vec{j}$. **36.** $C(3, 9)$. **37.** Din teorema fundamentală a asemănării, $\frac{GP}{AB}=\frac{GM}{MA}=\frac{1}{3}$, unde M este mijlocul lui $[BC]$. Deducem că $\overrightarrow{GP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, adică $m=\frac{1}{3}$. **38.** Fie P este mijlocul lui AB; atunci $\overrightarrow{GP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB})$, iar $\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GP}$. Deducem că $\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}$, deci $a=b=-1$. **39.** Ambele centre de greutate au vectorii de poziție (în raport cu o origine oarecare) egali cu $\frac{1}{6}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C+\vec{r}_D+\vec{r}_E+\vec{r}_F)$, deci coincid. **40.** Fie $Q(a, b)$ centrul cercului circumscris triunghiului ABC; atunci $QA=QB=QC$. Deducem că $a^2+(b-4)^2=(a-4)^2+b^2=(a-6)^2+(b-6)^2$. Prima egalitate conduce la $a=b$, iar cea de-a doua la $a+3b=14$. Obținem că $Q\left(\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$, iar $r=\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **41.** $m=3$, $n=1$. **42.** Punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC. Cum $MP \parallel BC$ (teorema liniei mijlocii) și N este mijlocul lui $[BC]$, rezultă că înălțimea din N în ΔMNP este mediatoarea laturii $[BC]$ în ΔABC. Astfel, ortocentrul H al ΔMNP este centrul cercului circumscris ΔABC, prin urmare $HA=HB=HC$. **43.** Centrul de greutate al triunghiului este $G\left(\frac{1}{3},3\right)$, iar centrul cercului circumscris este $Q(1, 2)$. Cum $\overrightarrow{QH}=3\overrightarrow{QG}$ (rezultă imediat din relația lui Sylvester: $\overrightarrow{QH}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=3\overrightarrow{QG}$), deducem că $H(-1, 5)$. **44.** Se aplică teorema lui Ceva. **45.** Punctele A', B', C' se află pe laturile $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$, astfel încât $\frac{A'B}{A'C}=\frac{1}{2}$, $\frac{B'C}{B'A}=\frac{2}{3}$, iar $\frac{C'A}{C'B}=3$. Atunci $\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 3=1$ și concluzia urmează conform reciprocei teoremei lui Ceva.

Scanned with OKEN Scanner

1.7. Trigonometrie

1. $\sin B - \cos C = \frac{AC}{BC} - \frac{AC}{BC} = 0$. **2.** a) $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, \frac{17\pi}{2}\right\}$. b) $x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right\}$.

3. Cum $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, egalitatea din enunț conduce la $\sin\alpha(\cos\alpha - 1) = 0$, deci $\sin\alpha = 0$ sau $\cos\alpha = 1$. Căutăm $\alpha \in (0, 2\pi)$, prin urmare singura posibilitate este $\alpha = \pi$. **4.** Se știe că $\sin x = 0$ dacă și numai dacă $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dacă ar exista $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\sin n = 0$, atunci $\pi = \frac{n}{k} \in \mathbb{Q}^*$, absurd ($\pi$ este număr irațional). **5.** a) $\frac{1}{2}$. b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. c) $-\sqrt{3}$. d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.** a) Cum $\cos 90° = 0$, rezultă că $P = 0$. b) Cum $\cos 1° + \cos 179° = 0$, $\cos 2° + \cos 178° = 0$, ..., $\cos 89° + \cos 91° = 0$, $\cos 90° = 0$, rezultă că $S = 0$. **7.** a) Avem că $\operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 89° = \operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{ctg} 1° = 1$, ..., $\operatorname{tg} 44° \cdot \operatorname{tg} 46° = 1$, $\operatorname{tg} 45° = 1$, deci $P = 1$. b) Factorul $\operatorname{tg} 44° - \operatorname{tg} 44° = 0$ apare în produs, prin urmare produsul este nul. **8.** $\sin 140° = \sin(180° - 40°) = \sin 40°$ și $\cos 130° = \cos(180° - 50°) = -\cos 50° = -\sin 40°$. Concluzia se impune. **9.** $\cos a \cdot \cos b = \cos a \cdot \cos(\pi + a) = \cos a \cdot (-\cos a) = -\cos^2 a \le 0$. **10.** a) $\frac{1}{2}$. b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. c) $-\sqrt{3}$. d) $\sqrt{3}$. **11.** Ambele funcții sunt pare. **13.** $\sin 2a = \sin 2\left(\frac{3\pi}{2} - b\right) = \sin(3\pi - 2b) = \sin(\pi - 2b) = \sin 2b$.

14. Din $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ și $\cos a < 0$ obținem $\cos a = -\frac{12}{13}$, apoi $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{5}{12}$. **15.** $\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{4}{29}$, prin urmare $|\sin\alpha| = \frac{2\sqrt{29}}{29}$. **16.** a) $\sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2\sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2\sin^2 a \cdot \cos^2 a$. b) $\sin^6 a + \cos^6 a = (\sin^2 a + + \cos^2 a)^3 - 3\sin^2 a \cos^2 a(\sin^2 a + \cos^2 a) = 1 - 3\sin^2 a \cos^2 a$. **17.** $\operatorname{ctg} x = 6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \cos^2 x = 36 \sin^2 x \Rightarrow 1 - \sin^2 x = 36 \sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{37}$. **18.** a) Ridicând la pătrat relația din ipoteză, obținem că $\sin^2\alpha + 2 \sin\alpha \cos\alpha + \cos^2\alpha = 1$, de unde $2 \sin\alpha \cos\alpha = 0$, adică $\sin 2\alpha = 0$. Astfel, $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 0$.

b) Ridicând la pătrat, obținem că $\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4}$, de unde $1 - \sin 2x = \frac{1}{4}$, deci $\sin 2x = \frac{3}{4}$.

19. a) Din $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ și $\sin\alpha < 0$, obținem că $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Atunci $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

b) $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a = \frac{11}{16}$. **20.** a) $\cos 2\alpha = 2 \cos^2\alpha - 1$, prin urmare $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{3}{4}$. Cum $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, rezultă $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. b) Avem că $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 2$, de unde $\operatorname{tg}^2\alpha - 2 \operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$, deci $(\operatorname{tg}\alpha - 1)^2 = 0$, prin urmare $\operatorname{tg}\alpha = 1$. Atunci $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = 1$. **21.** a) Din $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ și $\cos a > 0$ obținem $\cos a = \frac{3}{5}$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că $\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{\sin a}{1+\cos a}=\frac{1}{2}$. b) $\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **22.** $E=\frac{\sin 36^\circ\cos 48^\circ+\cos 36^\circ\sin 48^\circ}{\sin 48^\circ\cos 48^\circ}=\frac{2\sin 84^\circ}{\sin 96^\circ}=$

$=\frac{2\sin 84^\circ}{\sin 84^\circ}=2$. **23.** $E(x)=\frac{2\sin^2 2x}{-2\sin 2x\sin x}+4\cos^2\frac{x}{2}=-\frac{\sin 2x}{\sin x}+4\cos^2\frac{x}{2}=2\cos x+2(1+\cos x)=2$. **24.** Din

$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=3\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=3\Rightarrow\sin^2 x+\cos^2 x=3\sin x\cos x\Rightarrow\sin 2x=\frac{2}{3}$. Rezultă $\cos 4x=1-$

$-2\sin^2 2x=\frac{1}{9}$ și $9(\sin 2x+\cos 4x)=7$. **25.** a) $\operatorname{tg}15^\circ=\operatorname{tg}(45^\circ-30^\circ)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}30^\circ}{1+\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}30^\circ}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=$

$=2-\sqrt{3}$. b) $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. c) $\sin\frac{11\pi}{12}=$

$=\sin\left(\pi-\frac{11\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. **26.** Nu putem aplica formula pentru tangenta sumei,

deoarece nu are sens $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$. Avem: $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos x}{-\sin x}=-\frac{1}{\operatorname{tg}x}=-\frac{3}{2}$. **27.** $E=(-\operatorname{ctg}10^\circ)(-\operatorname{tg}10^\circ)+$

$+\sin 20^\circ\cdot(-\sin 20^\circ)-\cos 20^\circ\cdot\cos 20^\circ=1-(\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ)=0$. **28.** $\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$ și $\operatorname{tg}(a+b)=$

$=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, de unde cerința problemei. **29.** $1+\operatorname{tg}b=1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-a\right)=1+\frac{1-\operatorname{tg}a}{1+\operatorname{tg}a}=\frac{2}{1+\operatorname{tg}a}$, rezultă că $E=2$.

30. $\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{7}{9}$. **31.** $\operatorname{tg}55^\circ-\operatorname{tg}35^\circ=\frac{\sin 55^\circ}{\cos 55^\circ}-\frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ}=$

$=\frac{\sin 55^\circ\cos 35^\circ-\sin 35^\circ\cos 55^\circ}{\cos 55^\circ\cos 35^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 35^\circ\cos 35^\circ}=\frac{2\sin 20^\circ}{\sin 70^\circ}=\frac{2\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=2\operatorname{tg}20^\circ$. **32.** $\frac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x}{2}=$

$=\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\operatorname{tg}x}{2}=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg}x}=\frac{1}{\operatorname{tg}2x}=\operatorname{ctg}2x$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. **33.** Ridicând la pătrat relațiile din ipoteză și ținând

seama de formula fundamentală, obținem, după sumare, că $2+2(\sin a\sin b+\cos a\cdot\cos b)=\frac{5}{4}$, de unde

$\cos(a-b)=-\frac{3}{8}$. **34.** a) Rezultă din $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Ca la a), sau transformăm suma în produs: $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ = 2\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2} = 2\cos 30^\circ\cos 45^\circ =$

$= 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **35.** a) $2\cos x - 1 = 2\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\right) = 4\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)$. b) $2\sin x - \sqrt{3} =$

$= 2\left(\sin x - \sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$. c) $\sin x + \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$. **36.** Avem

$\sin 2a - \sin 2b = 2\cos(a+b)\sin(a-b) = 2\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin(a-b) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(a-b) = \sin(a-b)$, de unde concluzia.

37. a) $(\cos x + \cos 3x)^2 + (\sin x + \sin 3x)^2 = (2\cos 2x\cos x)^2 + (2\sin 2x\cos x)^2 = 4\cos^2 x(\cos^2 2x + \sin^2 2x) =$
$= 4\cos^2 x$. b) $(1 - \cos a\cos b)^2 - \sin^2 a\sin^2 b = (1 - \cos a\cos b)^2 - (1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b) = \cos^2 a + \cos^2 b -$
$- 2\cos a\cos b = (\cos a - \cos b)^2$. **38.** $\sin 2a + \sin 2b = 2\sin\frac{2a+2b}{2}\cos\frac{2a-2b}{2} = 2\sin(a+b)\cos(a-b) =$

$= 2\sin\frac{\pi}{2}\cos(a-b) = 2\cos(a-b)$. **39.** $\sin^2 a - \sin^2 b = (\sin a + \sin b)\cdot(\sin a - \sin b) = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\cdot$

$\cdot 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2}\cdot 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2} = \sin(a+b)\cdot\sin(a-b)$. **40.** Cum $\sin x + \sin 5x =$

$= 2\sin\frac{x+5x}{2}\cos\frac{x-5x}{2} = 2\sin 3x\cdot\cos 2x$, rezultă că $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 2\sin 3x\cdot\cos 2x + \sin 3x = (1 +$

$+ 2\cos 2x)\cdot\sin 3x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. **41.** Transformând în produs, avem: $\sin a + \sin b + \sin(a+b) = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} +$

$+ 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2} = 2\sin\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\right) = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$. **42.** $E = -\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x$.

43. $\cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 80^\circ = \frac{1+\cos 40^\circ}{2} + \frac{1+\cos 80^\circ}{2} + \frac{1+\cos 160^\circ}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[2\cos 60^\circ\cos 20^\circ - \cos 20^\circ\right] =$

$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[\cos 20^\circ - \cos 20^\circ\right] = \frac{3}{2}$. **44.** Folosim formula $\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}$; obținem că $\operatorname{tg}(A+B) = -1$,

deci $A+B = 135^\circ$. Rezultă că $C = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$. **45.** Cum $A + B = \pi - C$, rezultă că $\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B} = -\operatorname{tg}C$,

deci $\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C = \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$.

1.8. Aplicații ale trigonometriei în geometrie

1. Dacă a este latura triunghiului, atunci $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$, deci $a = 2$. Rezultă că $\overline{AB}\cdot\overline{AC} = a\cdot a\cdot\cos 60^\circ = 2$.

2. $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{5}{6}$. **3.** $(2\vec{u}+\vec{v})(2\vec{v}-\vec{u}) = 3\vec{u}\cdot\vec{v} + 2\vec{v}^2 - 2\vec{u}^2 = 3|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\frac{\pi}{3} + 2|\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}|^2 = 9$.

4. $\overline{AC}\cdot\overline{AD} = (\overline{AB}+\overline{AD})\cdot\overline{AD} = \overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{AD}\cdot\overline{AD} = 5$. **5.** a) $\vec{v}\cdot\vec{w} = 2\cdot 3 + 3\cdot 2 = 12$. b) $\cos(\vec{v},\vec{w}) =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{12}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}} = \frac{12}{13}$. **6.** Avem $\overrightarrow{AB} = 7\vec{i} - 7\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$ și $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) =$ $= (7\vec{i} - 7\vec{j})(\vec{i} + 3\vec{j}) = -14$. **7.** Fie $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ perpendicular pe $\vec{v}$. Atunci $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, de unde rezultă că $2a + 5b =$ $= 0$. Putem considera $\vec{u} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$. **8.** Vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ sunt perpendiculari dacă și numai dacă $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, adică $m(m-2) -$ $- 3 = 0$, deci $m = 3$ (pentru $m > 0$). **9.** Fie $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$, $a, b \in \mathbf{R}$. Din $|\vec{v}| = 5$ deducem că $a^2 + b^2 = 25$, iar din $\vec{v} \perp \vec{u}$ rezultă că $3a - 4b = 0$. Obținem $a = 4$, $b = 3$ sau $a = -4$, $b = -3$. Deci $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ sau $\vec{v} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$. **10.** $\cos(\vec{u},\vec{v}) < 0$. **11.** $m \in (-\infty, 3)$. **12.** Fiecare dintre cele șase produse scalare este nul, deoarece vectorii care se înmulțesc sunt perpendiculari. **13.** Deoarece $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ și $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$, rezultă că $AC = BD$. Cum $ABCD$ este paralelogram și $AC = BD$, înseamnă că $ABCD$ este dreptunghi. Altfel: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)^2 \Rightarrow AB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = AB^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} \Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow AB \perp AD \Rightarrow ABCD$ – dreptunghi. **14.** Avem că $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(\vec{u} + \vec{v})^2} = \sqrt{\vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2} = 5$ și $|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(\vec{u} - \vec{v})^2} = \sqrt{\vec{u}^2 - 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2} = 5$. **15.** Punctul O este mijlocul lui BC, deci $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) =$ $= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{AO}^2 - \overrightarrow{OB}^2 = AO^2 - OB^2$. Cum centrul cercului circumscris este egal depărtat de vârfuri, atunci $AO = OB$, prin urmare $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ și astfel $m(\sphericalangle A) = 90°$. **16.** a) $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5$. b) $S_{ABC} = \frac{AB\cdot AC}{2} = 6$. c) $\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$. d) $h_a = \frac{AB\cdot AC}{BC} = \frac{12}{5}$. e) $R = \frac{1}{2}BC = \frac{5}{2}$. **17.** Cum triunghiul este isoscel, mediana AM este perpendiculară pe baza BC. Din teorema lui Pitagora, $AM^2 = AB^2 - BM^2 = 16$, deci $AM = 4$. Rezultă că $d(G, BC) = GM = \frac{1}{3}AM = \frac{4}{3}$. **18.** Din teorema cosinusului, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot$ $\cdot \cos A = 13$, deci $BC = \sqrt{13}$. Perimetrul triunghiului este $\mathcal{P}_{ABC} = 7 + \sqrt{13}$. **19.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\cdot AC\cdot\cos A =$ $= \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{5}{2}$. **20.** $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB\cdot AC} = -\frac{1}{2}$. **21.** $b\cos C + c\cos B = b\cdot\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} +$ $+ c\cdot\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2a^2}{2a} = a$. **22.** $a = 2b\cos C \Leftrightarrow a = 2b\cdot\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow (b-c)(b+c) =$ $= 0 \Leftrightarrow b = c$. **23.** Unghiul obtuz se opune laturii mai mari; dacă A este acest unghi, $\cos A = \frac{a^2 + (a+1)^2 - (a+2)^2}{2a(a+1)} =$ $= \frac{a^2 - 2a - 3}{2a(a+1)}$. Cum $\cos A < 0$, deducem că $\frac{a^2 - 2a - 3}{2a(a+1)} < 0$. Avem că $a > 0$, deoarece a este latură a triunghiului, prin urmare $a^2 - 2a - 3 < 0$, de unde $a \in \{1, 2\}$. Pentru $a = 1$ nu există triunghi de laturi 1, 2, 3 ($3 = 1 + 2$). În final, rămâne că $a = 2$. **24.** Din teorema cosinusului, $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB\cdot BC} = \frac{1}{8}$, iar $\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC\cdot BC} = \frac{3}{4}$. Astfel, $\cos 2C = 2\cos^2 C - 1 = \frac{1}{8} = \cos B$, prin urmare $B = 2C$. **25.** Din teorema medianei, $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} =$ $= \frac{2(64 + 16) - 36}{4} = 31$, prin urmare $m_a = \sqrt{31}$. **26.** Din teorema cosinusului, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos A =$

Scanned with OKEN Scanner

$= 12$. Atunci $m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = \frac{2(16+4)-12}{4} = 7$, prin urmare $m_a = \sqrt{7}$. **27.** Cum $\ell_a = \frac{2bc}{b+c}\cdot\cos\frac{A}{2} =$

$= \frac{2bc}{b+c}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \frac{12}{7}\sqrt{15}$. **28.** Din teorema sinusurilor avem $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$, prin urmare $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} =$

$= \sqrt{2}$. **29.** Din teorema sinusurilor, $\frac{AC}{\sin B} = 2R$, deci $AC = 2R\sin B = 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. **30.** Cum $C = \pi - A - B =$

$= \frac{7\pi}{12}$, atunci $\sin C = \sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Din teorema sinusurilor, $R =$

$= \frac{c}{2\sin C} = 3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. **31.** $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow m(\sphericalangle A) = 90°$.

32. Cum $A = \pi - B - C = \frac{7\pi}{12}$, obținem că $\sin A = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Din teorema sinusurilor,

$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$, adică $AC = \frac{AB\cdot\sin B}{\sin C} = 6\sqrt{2}$, iar $BC = \frac{AB\cdot\sin A}{\sin C} = 3(\sqrt{6}+\sqrt{2})$. Perimetrul triunghiului este $\mathcal{P} = AB + BC + CA = 3(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6})$. **33.** Observăm că (3, 4, 5) constituie un triplet pitagoric: $5^2 = 3^2 + 4^2$, deci ΔABC este dreptunghic. Aria sa este $S = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$ și, cum $S = p\cdot r$, rezultă că $r = \frac{S}{p} = \frac{6}{6} = 1$. **34.** Aria

triunghiului este $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8\cdot 4\cdot 3\cdot 1} = 4\sqrt{6}$, deci $r = \frac{S}{p} = \frac{4\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **35.** Din formula lui

Heron, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 84$. Cum $S = \frac{ah_a}{2}$, rezultă că $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{56}{5}$. **36.** Din formu-

la lui Heron, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{10\cdot 5\cdot 3\cdot 2} = 10\sqrt{3}$, deci $R = \frac{abc}{4S} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$. **37.** a) $C = 2B \Rightarrow \sin C =$

$= 2\sin B\cos B \Rightarrow \frac{c}{2R} = 2\frac{b}{2R}\cos B \Rightarrow \frac{c}{2b} = \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$; rezultă că $B = 30°$, $C = 60°$, $A = 90°$, prin urmare $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$. b) Cum $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, obținem ecuația $c^2 - 2c - 3 = 0$, care are singura soluție pozitivă $c = 3$. Cunoscând laturile, cu teorema cosinusului putem afla unghiurile. **38.** Cum $S_{ABC} =$

$= \frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}$, rezultă că $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, prin urmare $A = \frac{\pi}{3}$ sau $A = \frac{2\pi}{3}$. În primul caz, $BC^2 = AB^2 + AC^2 -$

$- 2AB\cdot AC\cdot\cos A = 76$, deci $BC = 2\sqrt{19}$. În cel de-al doilea, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos A = 196$, deci

$BC = 14$. **39.** Cum $\sin B = 1$, rezultă că $m(\sphericalangle B) = 90°$. Avem că $\sin A = \frac{BC}{AC}$, de unde $AC = \frac{BC}{\sin A} = 8$. Cu teorema lui

Pitagora, $AB^2 = AC^2 - BC^2 = 4\sqrt{3}$. În concluzie, $S_{ABCD} = \frac{4\cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$. **40.** $S_{ABCD} = AB\cdot AD\cdot\sin\sphericalangle BAD = 6\cdot 8\cdot$

Scanned with OKEN Scanner

· $\sin 45° = 24\sqrt{2}$. **41.** a) $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{2p}{2R} = \frac{p}{R}$. b) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{S^2}{pabc} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4S}{abc} \cdot \frac{S}{p} = \frac{r}{4R}$. **42.** Fie O centrul cercului circumscris triunghiului. În ΔOBC, din inegalitatea triunghiului obținem că $2R \geq a$, cu egalitate când $O \in BC$, deci în cazul triunghiului dreptunghic. Din inegalitatea mediilor $\frac{b+c}{2} \geq bc$, cu egalitate dacă $b = c$. Înmulțind membru cu membru cele două inegalități, rezultă cerința problemei. Egalitatea se atinge în triunghiul dreptunghic isoscel.

Clasa a X-a

2.1. Radicali și logaritmi

1. b) Observăm că $\sqrt{11-6\sqrt{2}} = 3-\sqrt{2}$ și $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$. c) Se ridică la pătrat în ambii membri. **2.** $\frac{b}{a} - \sqrt{2} = 1$. **3.** $a = 2$. **4.** $a = 1$, $b = 2$. **5.** a) $x \in [0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. c) 2. **6.** Deoarece $1{,}7^2 < 3 < 1{,}8^2$, rezultă că $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, deci $\sqrt{3} = 1{,}7\ldots$. Cum $1{,}2^3 < 2 < 1{,}3^3$, rezultă $1{,}2 < \sqrt[3]{2} < 1{,}3$, deci $\sqrt[3]{2} = 1{,}2\ldots$. **7.** Deoarece $14 < \sqrt{200} < 15$ și $5 < \sqrt[3]{200} < 6$, rezultă $a = 14 - 5 = 9$. **8.** a) 0. b) 6. c) 1. **9.** a) $E = 5$. b) $a = \frac{2}{3}$. **10.** Cum $E(x) = x^{\frac{11}{6}}$ și $a = 2^{\frac{3}{11}}$, rezultă $E(a) = \sqrt{2}$. **11.** a) $a = \sqrt[16]{2^8 \cdot 2^4 \cdot 2^2 \cdot 2} = \sqrt[16]{2^{15}}$, deci $a \cdot b = 2$. b) $a = 2$. **12.** $k = 2$. **13.** $\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1} = (\sqrt{2}-1) - (\sqrt[3]{2}-1) = \sqrt{2} - \sqrt[3]{2}$. **14.** c) $a = 2$. **15.** Aducem radicalii la ordin comun: $\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$; $\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$; $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$, deci $\sqrt{2} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{4}$. **16.** a) Cum $a = \sqrt[6]{(1+\sqrt{2})^3} = \sqrt[6]{7+5\sqrt{2}}$ și $b = \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$, rezultă $a > b$. b) Avem $a^2 = \sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt[4]{15}$ și $b^2 = \sqrt{2}+\sqrt{6}+2\sqrt[4]{12}$. Cum $\sqrt{3}+\sqrt{5} > \sqrt{2}+\sqrt{6}$ și $\sqrt[4]{15} > \sqrt[4]{12}$, rezultă că $a > b$. **17.** a) 3. b) –2. c) $\frac{1}{2}$. d) $\frac{3}{2}$. **18.** Cum $a = -3$, $b = -4$, $c = -2$, rezultă că $b < a < c$. **19.** a) $a = 7$. b) $a = \frac{5}{12}$. **20.** a) 1. b) Avem că $\lg\frac{2}{1} + \lg\frac{3}{2} + \ldots + \lg\frac{10}{9} = \lg\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{10}{9} = \lg 10 = 1$. c) 1. **21.** a) 3. b) 2. **22.** a) 2; b) 0; c) 0. **23.** a) $a = \frac{1}{2}$. b) Fie $\log_2 3 = x$; atunci $E = (3+x)(5+x) - (6+x)(2+x) = 3 \in \mathbb{Q}$. c) $a = 2$. d) $a = 1$. **24.** $a = 3$. **25.** $\frac{1}{\log_2 30} + \frac{1}{\log_3 30} + \frac{1}{\log_5 30} = \log_{30} 2 + \log_{30} 3 + \log_{30} 5 = \log_{30} 30 = 1$. **26.** a) $a = 2$; b) $a = 4$. **27.** a) $\log_3 5$. b) 2. c) $\log_{0,3} 2$. d) –1. e) $\log_3 5$. **28.** a) $\log_3 4 > 1 > \log_4 3$. b) Inegalitatea din stânga este echivalentă cu $2^9 < 5^4$, iar cea din dreapta cu $5^2 < 2^5$. c) Inegalitatea este

Scanned with OKEN Scanner

echivalentă cu $\lg^2 4 > \lg 3 \cdot \lg 5$. Avem: $\lg 3 \cdot \lg 5 < \left(\frac{\lg 3+\lg 5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lg 15}{2}\right)^2 < \left(\frac{\lg 16}{2}\right)^2 = \lg^2 4$. Altfel: se arată că $\log_3 4 > \frac{5}{4} > \log_4 5$. **29.** a) $\log_3 4 < \log_3 9 = 2 = \sqrt{4} < \sqrt{5}$, deci $2 \in (\log_3 4, \sqrt{5})$. b) Avem că $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ (deoarece $(\sqrt{2})^6 < (\sqrt[3]{3})^6 \Leftrightarrow 8 < 9$) și $\sqrt[3]{3} < 2 < \log_2 5$. c) Avem că $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$, iar $\frac{3}{2} < \log_2 3$. **30.** Deoarece $2^8 < 500 < 2^9$, rezultă că $8 < \log_2 500 < 9$, deci $[\log_2 500] = 8$. **31.** a) Inegalitatea este echivalentă cu $2\sqrt{2} < 3 < 4$. b) Folosind a), avem $a > \frac{3}{2} + \frac{1}{2} > 2$ și $a < 2 + \frac{2}{3}$, deci $[a] = 2$. **32.** $\log_{12} 18 = \frac{\log_3 18}{\log_3 12} = \frac{2+\log_3 2}{1+2\log_3 2} = \frac{2+a}{1+2a}$. **33.** Din $\log_{40} 100 = a$ deducem că $\log_2 5 = \frac{3a-2}{2-a}$, apoi $\log_{20} 50 = \frac{5a-2}{a+2}$. **34.** a) $100^{\lg 2} + \sqrt[3]{-27} = (10^{\lg 2})^2 - \sqrt[3]{27} = 2^2 - 3 = 1$. b) 0. **37.** Numerele $\frac{1}{\log_a x}, \frac{1}{\log_b x}, \frac{1}{\log_c x}$ sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă $\frac{2}{\log_b x} = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_c x}$ sau $2\log_x b = \log_x a + \log_x c$ sau $\log_x b^2 = \log_x ac$, adică $b^2 = ac$, deci dacă și numai dacă a, b, c sunt în progresie geometrică.

2.2. Numere complexe

1. $z_1 + z_2 = -1 + i$; $3z_1 - 2z_2 = 17 - 12i$. **2.** a) $-i$. b) i. **3.** a) $-3 + 4i$. b) $8 + 4i$. c) $\frac{64}{65}$. d) -1. e) -4. f) 1. **4.** a) 8. b) $-\frac{8}{5}$. c) -8. d) -4. e) 2^{12}. **5.** a) 1. b) $\frac{1}{5}$. c) 0, respectiv 1. d) 0. **6.** a) Avem că $z = \frac{4a+(4-a^2)i}{4+a^2}$ și acest număr este real când $a = \pm 2$. b) Cum $z = \frac{1}{a+1+i(a-2)} = \frac{a+1-i(a-2)}{(a+1)^2+(a-2)^2}$, rezultă că $\frac{a+1}{(a+1)^2+(a-2)^2} = \frac{2}{5}$, de unde $a_1 = 1, a_2 = \frac{5}{4}$. **7.** a) $x = \frac{1}{8}, y = -\frac{13}{4}$. b) $a = -8, b = 0$. **8.** a) $z = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1+i}\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2\cdot 51} + (i^2)^{51} = \frac{2}{1+i}\left(\frac{1}{i}\right)^{51} - 1 = \frac{1-i}{-i} - 1 = i$. b) Deoarece $\frac{1-i}{1+i} = -i$, $z = \frac{(-i)^{10}-1}{-i-1} = \frac{2}{1+i} = 1-i$. **9.** $2 + i$. **10.** Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$; atunci $i(z-\bar{z}) = i(a+bi-a+bi) = -2b \in \mathbb{R}$. **11.** Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$; avem că $2\bar{z} + 3z = 5a + bi \in \mathbb{R}$, deci $b = 0$ și atunci $z \in \mathbb{R}$. **13.** a) -1. **14.** a) Dacă $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, obținem că $a + bi + 3i = 6a - 6bi$, de unde $a = 6a$ și $b + 3 = -6b$, deci $a = 0$, $b = -\frac{3}{7}$. Prin urmare, $z = -\frac{3}{7}i$. b) $z = 1 - 4i$. c) $z = i$. **15.** Dacă $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, rezultă că $a^2 - b^2 + 2abi = b + ai$, deci $a^2 - b^2 = b$ și $2ab = a$. Rezolvând sistemul, găsim soluțiile $z \in \left\{0, -i, \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right\}$. **17.** $|z_1| = 5\sqrt{2}$; $|z_2| = \sqrt{6}$; $|z_3| = 1$; $|z_4| = 2\sqrt{3}$; $|z_5| = 13$; $|z_6| = 4$. **18.** Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$; atunci $a \geq 5$ și $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 9$, imposibil. **19.** Deoarece $1 + i(z+\bar{z}) = 1 + 2ai \in \mathbb{R}$, rezultă că $a = 0$, deci $z = 2i$ și $|z| = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

20. Observăm că $1 + i + i^2 + i^3 = 0$. Atunci, pentru $n = 4k$, $z = (1 + i + i^2 + i^3) + i^4(1 + i + i^2 + i^3) + \ldots + i^{4k-4}(1 + i + i^2 + i^3) + i^{4k} = i^{4k} = 1$; pentru $n = 4k + 1$; $z = i^{4k} + i^{4k+1} = 1 + i$; pentru $n = 4k + 2$, $z = i^{4k} + i^{4k+1} + i^{4k+2} = i$, iar pentru $n = 4k + 3$, $z = 0$. a) Dacă $n = 2010 = 4 \cdot 502 + 2$, atunci $z = i$ și $|z| = 1$. b) Numărul z este real dacă și numai dacă $n \in \{4k, 4k + 3\}$, unde $k \in \mathbb{N}$. **21.** a) Condiția din enunț este echivalentă cu $(z + i)^{10} = -(z - i)^{10}$, de unde rezultă că $|z + i|^{10} = |z - i|^{10}$, deci $|z + i| = |z - i|$ pentru că $|z + i|$ și $|z - i|$ sunt numere reale pozitive. b) Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Conform punctului a), avem $|a + (b + 1)i| = |a + (b - 1)i|$ sau $\sqrt{a^2 + (b+1)^2} = \sqrt{a^2 + (b-1)^2}$, de unde obținem $b = 0$, deci $z = a \in \mathbb{R}$. **22.** a) $S = \{\pm 3i\}$; b) $S = \{1 \pm i\}$. c) $S = \{4 \pm 3i\}$. d) Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, o soluție; atunci $(a + bi)^2 = 2i$ implică $a^2 - b^2 = 0$ și $2ab = 2$, prin urmare $a = b = 1$ sau $a = b = -1$. Obținem soluțiile $z_1 = 1 + i$ și $z_2 = -1 - i$. **23.** 10. **24.** a) $z + \bar{z} = 2a$. b) $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$. c) $c = -6$, $d = 25$. **25.** $z^3 - 8 = (z - 2) \cdot (z^2 + 2z + 4) = 0$, deci $z^3 = 8$. **26.** b) $z_1 = 2i$, $z_2 = -1 + i$. **27.** a) 1; b) -1; c) -1. **28.** a) Deoarece $z^2 - z + 1 = 0$ și $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1) = 0$, rezultă că $z^3 = -1$; b) Din $z^{10} = (z^3)^3 \cdot z = -z$, deducem că $z^{10} + z^{-10} = -z - \frac{1}{z} = -1$. **29.** a) $S = 1$. b) Din ipoteză rezultă că $\alpha^3 = 1$, deci $a = [(-\alpha^2)^{6n+2} + 1]^2 - \alpha = (\alpha^{12n+3} \cdot \alpha + 1)^2 - \alpha = (\alpha + 1)^2 - \alpha = \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. **30.** b) $S_1 = z + \frac{1}{z} = 1$; $S_2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = -1$; $S_3 = -2$; $S_4 = -1$; $S_5 = 1$; $S_6 = 2$. c) Grupând termenii produsului câte șase și folosind b), obținem că $P = (1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2)^{16} \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = 2^{33}$. **31.** a) $t_1 = -1$, $t_2 = -i$, $t_3 = i$. b) Notăm $\frac{3z+1}{z-1} = t$ și obținem $t^3 + t^2 + t + 1 = 0$. Cum $z = \frac{1+ti}{t-3}$, găsim $z_1 = \frac{-1+i}{4}$; $z_2 = \frac{-3+i}{5}$; $z_3 = 0$. **32.** a) $S = \{-1, 1, -3i, 3i\}$. b) Notând pe x^3 cu t, obținem ecuația $t^2 + 7t - 8 = 0$, ale cărei soluții sunt $t_1 = 1$ și $t_2 = -8$. Ecuația $x^3 = 1$ are soluțiile 1 și $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, iar ecuația $x^3 = -8$ are soluțiile -2, $1 \pm i\sqrt{3}$, deci mulțimea soluțiilor ecuației considerate este $S = \left\{1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, -2, 1 \pm i\sqrt{3}\right\}$. **33.** $M_2 = \{-1, 1\}$, $M_4 = \{-1, 1, i, -i\}$, deci $M_2 \cup M_4 = M_4$, mulțime de cardinal 4. Apoi, $|M_{12}| = 12$, $|M_{16}| = 16$, $|M_{12} \cap M_{16}| = |M_4| = 4$, prin urmare $|M_{12} \cup M_{16}| = 12 + 16 - 4 = 24$. **34.** a) $f(a + bi) = 3(a + bi) - 4(a - bi) = -a + 7bi$. b) $(f \circ f)(z) = f(f(z)) = f(3z - 4\bar{z}) = 3(3z - 4\bar{z}) - 4\overline{(3z - 4\bar{z})} = 3(3z - 4\bar{z}) - 4(3\bar{z} - 4z) = 25z - 24\bar{z}$. c) Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $f(z) = 0 \Leftrightarrow -a + 7bi = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

2.3. Funcții

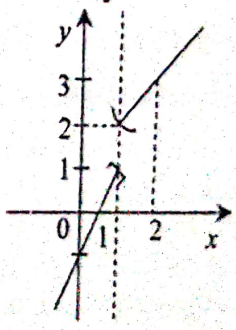
1. a) $D = (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty)$; b) $D = (-2, 1)$; c) $D = [0, 2)$; d) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. **2.** a) 2. b) 16; c) 3. **3.** Cum $\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lg \frac{n+1}{n}$, deducem că $S = \lg 2 + \lg \frac{3}{2} + \ldots + \lg \frac{n+1}{n} = \lg\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \lg(n+1)$. **4.** a) Inegalitatea

Scanned with OKEN Scanner

este echivalentă cu $\lg\frac{x_1+x_2}{2} \geq \frac{\lg x_1+\lg x_2}{2}$ sau $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \geq x_1x_2$, adică $(x_1-x_2)^2 \geq 0$. b) Inegalitatea este echivalentă cu $a^{\frac{x_1+x_2}{2}} \leq \frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}$ sau $\left(a^{\frac{x_1}{2}}-a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2 \geq 0$. **5.** $(f\circ f\circ f)(x) = -8x+3$, iar această funcție este strict descrescătoare. **6.** Funcțiile $f_1, f_2 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 2009^x$ și $f_2(x) = \log_{2009} x$ sunt strict crescătoare (deoarece bazele sunt mai mari ca 1), deci f este strict crescătoare. **7.** a) $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, deci f este impară. b) $f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, deci f este pară. c) Pentru orice $x \in (-1, 1)$ avem $-x \in (-1, 1)$ și $f(-x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = -\ln\frac{1-x}{1+x} = -f(x)$, deci f este impară. d) $f(-1) \neq f(1)$ și $f(-1) \neq -f(1)$, deci f nu este nici pară, nici impară.

8. a) Deoarece $f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in A$, trebuie precizate valorile $f(0)$, $f(1)$ și $f(2)$, deci există $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ funcții; b) Deoarece $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in A$, avem că $f(0) = 0$, deci trebuie precizate $f(1)$ și $f(2)$; găsim $5 \cdot 5 = 25$ funcții. **9.** Se știe că $\operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists)\, x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y\}$. Fie $y \in \mathbb{R}$; căutăm $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) = y$. adică (*) $yx^2 - 2x + y = 0$. Observăm că, pentru $y = 0$, avem $x = 0$. Pentru $y \neq 0$, ecuația (*) este de gradul al II-lea și are $\Delta = 4 - 4y^2$, deci există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$ dacă și numai dacă $y \in [-1, 1]$. Astfel, $\operatorname{Im} f = [-1, 1]$.

10. a) Cum $1 \neq 4$ și $f(1) = f(4)$, f nu este injectivă. Deoarece pentru orice $y \in \{0, 1, 2\}$, există $x \in \{1, 2, 3. 4\}$, astfel încât $f(x) = y$ (dacă $y = 0$, atunci $x = 2$; dacă $y = 1$, atunci $x = 3$; dacă $y = 2$, atunci $x = 1$ sau $x = 4$), rezultă că funcția f este surjectivă. b) Avem $2 \neq 4$ și $f(2) = f(4)$, deci f nu este injectivă. Funcția f nu este surjectivă pentru că $f(x) \neq 1$, oricare ar fi $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. c) Deoarece oricare ar fi $x_1, x_2 \in \{1, 2, 3\}$, $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$, rezultă că funcția f este injectivă. Funcția f nu este surjectivă, deoarece există $y = 1$ astfel încât $f(x) \neq 1$, oricare ar fi $x \in \{1, 2, 3\}$. **11.** $S = 0$. **12.** a) Observăm că $f(1) = f(-2)$ și $1 \neq -2$, deci f nu este injectivă. De asemenea, $f(x) \geq 0$ pentru orice x, deci f nu ia valori negative; rezultă că f nu este surjectivă. b) Deoarece $f(0) = f(-1)$, f nu este injectivă. Cum ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții reale, f nu este nici surjectivă. **13.** În figura de mai jos este trasat graficul funcției f. Cum fiecare paralelă la Ox: $y = m$, $m \in \mathbb{R}$ (codomeniul lui f), intersectează graficul lui f cel mult o dată, funcția f este injectivă. Deoarece există cel puțin o paralelă la Ox: $y = m$, $m \in (1, 2]$, care nu intersectează graficul funcției, f nu este surjectivă. **14.** Ecuația $f(x) = y$, $y \in \mathbb{R}$ (codomeniul lui f), are soluția $x = \begin{cases}\frac{y-1}{2}, & y < 3\\ y+1, & y \geq 0\end{cases}$. Există ecuații $f(x) = y$ care au cel puțin două soluții (ecuațiile $f(x) = y$, $y \in [0, 3)$ au exact două soluții), deci f nu este injectivă. Cum fiecare ecuație $f(x) = y$, $y \in \mathbb{R}$ are cel puțin o soluție, f este surjectivă. *Observație.* Putem folosi pentru rezolvarea problemei și metoda grafică (vezi problema precedentă) sau chiar definițiile. **15.** a) Dacă $g(1) = a$, atunci $f(a) = 1$, deci $a = 0$. b) Dacă $g(3) = a$, atunci $f(a) = 3$ sau $a^5 + a + 1 = 3$; rezultă că $a = 1$, deci $g(3) = 1$. **16.** Fiecare ecuație $f(x) = y$, $y \in (1, 3)$, are soluție unică $x = \frac{3-y}{y-1} \in (0, \infty)$, deci f este bijectivă. **17.** Ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții în $\mathbb{N}$, deci f nu este inversabilă.



Scanned with OKEN Scanner

18. a) $f^{-1}:(1,\infty)\to(0,\infty), f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$. b) $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x-1}{3}}$. c) $f^{-1}:(2,\infty)\to(1,\infty)$, $f^{-1}(x)=\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$. d) Fiecare ecuație $f(x)=y$, $y\in[1,7]$, are soluție unică $x=\frac{y+3}{2}\in[2,5]$, deci f este bijectivă. Inversa este $f^{-1}:[1,7]\to[2,5], f^{-1}(y)=\frac{y+3}{2}$. e) $f^{-1}:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f^{-1}(x)=\log_3(2^x-1)$. f) $f^{-1}:(0,\infty)\to(1,\infty)$, $f^{-1}(x)=2^{\frac{x}{3}}$. **19.** a) $f^{-1}:(2,\infty)\to\mathbb{R}, f^{-1}(x)=\log_3(x-2)$. b) $f^{-1}:\mathbb{R}\to(1,\infty), f^{-1}(x)=1+10^{x-1}$. c) $f^{-1}:[1,\infty)\to$ $\to[-1,\infty)$, $f^{-1}(x)=x^2-2x$. d) $f^{-1}:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\setminus\{2\}, f^{-1}(x)=\frac{2x}{x-1}$. e) $f^{-1}:[1,\infty)\to[1,\infty), f^{-1}(x)=1+$ $+\sqrt{x-1}$. **20.** $f^{-1}:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}\to\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}, f^{-1}(y)=\frac{2y}{2-3y}$. **21.** $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f^{-1}(y)=\begin{cases}y, y<0\\ \sqrt{y}, y\geq 0\end{cases}$. **23.** Fiecare ecuație $f(x)=y$, $y\in[0,\infty)$ are soluție unică $x=y^2+1$, $x\in[1,\infty)$, rezultă că f este bijectivă, deci inversabilă și $f^{-1}:[0,\infty)\to[1,\infty)$. $f^{-1}(x)=x^2+1$. Avem $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $g(x)=x$ și $h:[1,\infty)\to[1,\infty)$, $h(x)=x$. Funcțiile g și h nu sunt egale (nu au același domeniu de definiție). **24.** Funcția $g:[1,\infty)\to[-4,\infty)$, $g(x)=f(x)$ este inversabilă. **25.** Deoarece inversa funcției f este $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$, condiția dată este echivalentă cu $a(1-x)+b+ax+b+\frac{x+1-b}{a}=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Deducem că $\frac{1}{a}=1$ și $a+2b+\frac{1-b}{a}=0$, deci $a=1$, $b=-2$ și astfel $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-2$. **26.** $f^{-1}(-a)=b$ și $f^{-1}(-b)=a\Leftrightarrow f(b)=-a$ și $f(a)=-b\Leftrightarrow ab+b=-a$ și $a^2+b=-b$. Rezultă $a=1$, $b=-\frac{1}{2}$ sau $a=-2$, $b=-2$. **27.** f este inversabilă $\Leftrightarrow a\neq 0$. În acest caz $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și $f^{-1}(x)=$ $=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$. Avem că $f^{-1}=f\Leftrightarrow\frac{1}{a}=a$ și $-\frac{b}{a}=b\Leftrightarrow a=1, b=0$ sau $a=-1, b\in\mathbb{R}$. **28.** b) $f(x)=2x-1$ sau $f(x)=$ $=2x+3$. **29.** Fie $t\in\mathbb{R}$, arbitrar. Cum f este bijectivă, există $x_t\in\mathbb{R}$ cu $f(x_t)=t$. Din $f(f(x_t))=2f(x_t)+1$ rezultă că $f(t)=2t+1$, $t\in\mathbb{R}$. **30.** f este strict crescătoare, deci injectivă. **31.** b) Observăm că $f(1)=f(2)=-9$ și $1\neq 2$. d) Avem $f(x)\geq -10$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci f nu ia valori în $(-\infty,-10)$, prin urmare nu este surjectivă. **32.** a) $a<0, b>0$. b) $a\geq 0, b\leq 0$. c) $ab<0$. **33.** a) $a\geq -1$. b) $a\leq -1$. c) $a=-1$. **34.** a) Dacă $x\in\mathbb{Q}$, atunci $(f\circ f)(x)=f(x)=x$, iar dacă $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, atunci $1-x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(1-x)=1-(1-x)=x$. Prin urmare, $(f\circ f)(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. b) Conform a), inversa funcției f este chiar f. Cum f este inversabilă, rezultă că este bijectivă. **35.** 10. **36.** $f^{-1}(5)=x\Leftrightarrow f(x)=5\Leftrightarrow f(x)=f(2)$. Rezultă $x=2$. **37.** Fiecare ecuație $f(z)=t$, $t\in\mathbb{C}$ are soluție unică $z=-\frac{2}{5}t+\frac{3}{5}\bar{t}\in\mathbb{C}$, deci f este inversabilă și $f^{-1}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f^{-1}(t)=-\frac{2}{5}t+\frac{3}{5}\bar{t}$. **38.** Pentru fiecare $y\in\mathbb{C}$, ecuația $f(z)=y$ are soluție unică $z=-\frac{1}{2}i\bar{y}$, deci f este bijectivă și $f^{-1}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f^{-1}(z)=-\frac{1}{2}i\bar{z}$. Totodată, $f(z)\cdot\overline{f^{-1}(z)}=|z|^2\geq 0$, oricare ar fi $z\in\mathbb{C}$.

Scanned with OKEN Scanner

39. a) Fie $x_1, x_2 \in A$ astfel încât $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, deci $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$; atunci $f(x_1) = f(x_2)$ (pentru că g este injectivă), de unde rezultă $x_1 = x_2$ (căci f este injectivă). Prin urmare, $g \circ f$ este injectivă. b) Fie $z \in C$. Deoarece g este surjectivă, rezultă că există $y \in B$, astfel încât $g(y) = z$. Cum f este surjectivă, înseamnă că există $x \in A$, astfel încât $f(x) = y$, deci $(g \circ f)(x) = g(y) = z$, ceea ce înseamnă că $g \circ f$ este surjectivă. **40.** a) Fie $x_1, x_2 \in A$, astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$. Rezultă că $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ sau $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, de unde, având în vedere că $g \circ f$ este injectivă, deducem că $x_1 = x_2$. Prin urmare, f este injectivă. b) Deoarece $g \circ f$ este surjectivă, pentru orice $y \in C$, există $x \in A$ astfel încât $(g \circ f)(x) = y$, deci $g(f(x)) = y$. Astfel, pentru orice $y \in C$, există $t = f(x) \in B$ astfel încât $g(t) = y$. Rezultă că g este surjectivă. **41.** a) $D = [0, 1]$. b) $D = \mathbb{R}$. c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. **42.** a) $\frac{3\pi}{2}$; b) π; c) $\frac{\pi}{2}$. **43.** 1. **44.** a) 0; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) -1. **45.** Dacă $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = a$, $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$, cu $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, și atunci $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \operatorname{ctg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a} = 2$. **46.** a) Fie $\arcsin x = a$; atunci $\sin a = x$, cu $a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Rezultă că $\sin(2 \arcsin x) = \sin(2a) = 2 \sin a \cos a = 2x\sqrt{1-x^2}$. b) Dacă $\arccos x = b$ (deci $\cos b = x$, $b \in [0, \pi]$), avem $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) = \cos\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos b}{2}} = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$. **47.** Știm că $\arcsin(\sin x) = x$, oricare ar fi $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Drept urmare, $f(a) = \arcsin(\sin a) = a$, $f(a + \pi) = \arcsin(\sin(a + \pi)) = \arcsin(-\sin a) = -\arcsin(\sin a) = -a$, $f(a + 2\pi) = \arcsin(\sin(a + 2\pi)) = \arcsin(\sin a) = a$, $f(a + 3\pi) = \arcsin(\sin(a + 3\pi)) = \arcsin(-\sin a) = -a$, deci $f(a) + f(a + \pi) + f(a + 2\pi) + f(a + 3\pi) = 0$. **48.** Deoarece $\arccos x = a \Leftrightarrow \cos a = x$, $a \in [0, \pi]$, $x \in [-1, 1]$, avem $\arccos(\cos a) = a$, $a \in [0, \pi]$. Folosind și periodicitatea funcției cosinus, $f(2m\pi) = \arccos(\cos 0) = 0$ și $f((2n + 1)\pi) = \arccos(\cos \pi) = \pi$, deci $S = 0 + \pi + 0 + \pi + \ldots + \pi + 0 = 1003\pi$. **49.** $\arccos(\cos x) = x$ numai pentru $x \in [0, \pi]$. Cum $a \in [\pi, 2\pi]$, implică $2\pi - a \in [0, \pi]$, rezultă că $\arccos(\cos a) = \arccos(\cos(2\pi - a)) = 2\pi - a$. **50.** a) Dacă $a = \arccos\frac{3}{5}$, avem că $a \in [0, \pi]$ și $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right) = \sin a = \sqrt{1-\cos^2 a} = \frac{4}{5}$. b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$. c) Dacă $a = \arccos\frac{4}{5}$, atunci $\sin\left(2\arccos\frac{4}{5}\right) = \sin 2a = 2\sin a \cos a = \frac{24}{25}$. d) Fie $\arcsin\frac{12}{13} = a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Atunci $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13}\right) = \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$. **51.** a) Fie $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = a$, deci $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$ și $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; $\arcsin\frac{4}{5} = b$, deci $\sin b = \frac{4}{5}$ și $b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Acum, $E = \cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \arcsin\frac{4}{5}\right) = \cos(2a - b) = \cos 2a \cos b + \sin 2a \sin b$. Cum $\cos 2a = \frac{1-\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a} = \frac{3}{5}$, $\sin 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg}^2 a} = \frac{4}{5}$, $\cos b = \sqrt{1-\sin^2 b} = \frac{3}{5}$, găsim că $E = 1$. b) Fie $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} = a$, $\arccos\frac{3}{\sqrt{10}} =$

Scanned with OKEN Scanner

$= b$, deci $\sin a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos b = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $a, b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Rezultă că $\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \sin b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.4. Ecuații și inecuații

1. Din condițiile de existență rezultă că $x = 1$. Prin verificare, stabilim că $x = 1$ este soluție a ecuației. **2.** a) $x = 1$. b) $x = -2$. c) $x = 1$ sau $x = -2$. **3.** a) $x = 2$. b) $x = 1$ sau $x = 2$. c) $x = 0$, $x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$. d) $x = 1$. e) $x = 0$ sau $x = 6$. **4.** a) $x = 6$ sau $x = 18$. b) $x = 5$ sau $x = 17$. c) $x = 3$. **5.** a) $x = 4$. b) Radicalii au sens pentru $x \in [1, \infty)$. Pe acest interval, ecuația este echivalentă cu $|\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| = 2$. Obținem $\sqrt{x-1} \le 1$, deci $x \le 2$. În concluzie $x \in [1, 2]$. **6.** a) Din condițiile de existență rezultă $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Cu substituția $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = t$, ecuația considerată devine $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$, deci $t = \frac{1}{2}$ sau $t = 2$. Dacă $t = \frac{1}{2}$, atunci $x = -\frac{5}{3}$, iar dacă $t = 2$, atunci $x = \frac{5}{3}$. În concluzie, mulțimea soluțiilor este $\left\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right\}$. b) Din condițiile de existență rezultă că $x \in (1, \infty)$. Cu substituția $t = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ găsim $x = -\frac{5}{3}$ și $x = \frac{5}{3}$. Convine numai $x = \frac{5}{3}$. **7.** a) $x = 2$. b) Eliminând radicalul, obținem ecuația $x^3 + 3x^2 + 4x = 0$, cu singura soluție reală $x = 0$. c) $x = 0$, $x = 1$ sau $x = -4$. d) Trebuie ca $x \le 2$. Ecuația este echivalentă cu $\sqrt{2-x} = \sqrt[3]{x-2}$. Cum $\sqrt{2-x} \ge 0$ și $\sqrt[3]{x-2} \le 0$, rezultă că $x = 2$ este soluție unică a ecuației. e) Ecuația este echivalentă cu $\sqrt[6]{(x-1)^2} = \sqrt[3]{3-x}$ sau $\sqrt[3]{|x-1|} = \sqrt[3]{3-x}$, deci $|x-1| = 3-x$, de unde rezultă că $x = 2$. **8.** a) Dacă $x > 1$, atunci $\sqrt[3]{x-1} > 0 > 1 - \sqrt[3]{x}$, iar dacă $x < 1$, avem $\sqrt[3]{x-1} < 0 < 1 - \sqrt[3]{x}$. Cum $x = 1$ verifică ecuația dată, $x = 1$ este soluția unică a ecuației. *Soluție alternativă.* Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-1} - 1$ este strict crescătoare, deci injectivă. Cum ecuația se scrie $f(x) = 0 = f(1)$, rezultă că $x = 1$ este unica soluție a ecuației. b) $x \in \{-3, -2, 6\}$. **9.** a) Propoziția este falsă ($2 > -3$ și $2^2 < (-3)^2$); b) Propoziția este falsă ($(-3)^2 > 2^2$ și $-3 < 2$); c) Inegalitatea $a^2 > b^2$ este echivalentă cu $(a-b)(a+b) > 0$, care, deoarece $a + b > 0$, este echivalentă cu $a > b$. **10.** a) În mod necesar $x^2 - 4x \ge 0$, deci $x \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty) = D$. Dacă $x - 3 \le 0$ și $x \in D$, inegalitatea este adevărată, deci orice $x \in (-\infty, 0]$ este soluție. Dacă $x - 3 > 0$, $x \in D$, inecuația este echivalentă cu $\left(\sqrt{x^2-4x}\right)^2 \ge (x-3)^2$, deci $x \in \left[\frac{9}{2}, \infty\right)$. În concluzie, mulțimea soluțiilor inecuației este $(-\infty, 0] \cup \left[\frac{9}{2}, \infty\right)$. b) În mod necesar, $x \in [1, \infty) = D$. Dacă $2x - 3 \le 0$, $x \in D$, inegalitatea nu poate avea loc. Dacă $2x - 3 \ge 0$, $x \in D$, inecuația este echivalentă cu $(\sqrt{x-1})^2 \le (2x-3)^2$, deci $x \in [2, \infty)$. În concluzie, inecuația dată are soluțiile $x \in [2, \infty)$. c) $x \in (1, 2]$. **11.** a) $x \in (-\infty, -3] \cup [13, \infty)$. b) $x \in \left[\frac{7}{4}, 2\right] \cup [4, \infty)$. c) $x \in [-2, 3]$. **12.** $x \in [-1, 1]$.

Scanned with OKEN Scanner

14. a) Observăm că $x^2+x\geq 0$ dacă și numai dacă $x\in(-\infty,-1]\cup[0,\infty)$. Pentru $x\in[0,\infty)$, este clar că $x+1+\sqrt{x^2+x}\geq 0$. Dacă $x\in(-\infty,-1]$, atunci inegalitatea considerată este echivalentă cu $\sqrt{x^2+x}\geq -x-1$ sau $x^2+x\geq(-x-1)^2$ sau $x+1\leq 0$, care este adevărată. b) Expresia din enunț are sens dacă și numai dacă $x+1\geq\sqrt{x^2+x}$ și $x^2+x\geq 0$, deci $x\in\{-1\}\cup[0,\infty)$. c) Soluția ecuației este $x=0$. **15.** a) $x=-\frac{1}{3}$. b) $x=-2$. c) $x=1$. d) $x=1$. e) $x=1$ sau $x=3$. f) $x=-1$. **16.** a) $x=1$ sau $x=-1$. b) $x=1$ sau $x=2$. c) $x=0$. d) $x=1$ sau $x=-1$. e) $x=0$ sau $x=2$. **17.** a) $x=0$. b) $x=0$ sau $x=\frac{9}{2}$. c) Ecuația este echivalentă cu $2^4\cdot 2^{\frac{x-20}{4}}=2^{\sqrt{x+1}}$, $x\geq -1$, deci $x-4=4\sqrt{x+1}$; obținem $x=24$. d) Notăm $2^{x-\sqrt{x^2-5}}=y$, $x\in(-\infty,-\sqrt{5}\,]\cup[\sqrt{5},\infty)$ și obținem ecuația $y^2-6y+8=0$, cu $y_1=2$, $y_2=4$. Din $y=2$ găsim $x=3$, iar din $y=4$ rezultă că $x=\frac{9}{4}$. **18.** c) Dacă notăm $2^x=a$, $3^x=b$, $7^x=c$, ecuația devine $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$, deci $a=b=c$ sau $2^x=3^x=7^x$. Așadar, $x=0$. **19.** a) Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3^x$ este strict crescătoare, deci și injectivă. Cum $f(1)=4$, rezultă că ecuația $f(x)=4$ are soluția unică $x=1$; b) $x=0$. **20.** a) $x=\pm 2$. b) $x=\pm 9$. c) $x=3$. d) $x=-1$. **21.** a) $x=9$. b) $x=6$. c) $x=3$. d) $x=4$. **22.** a) Notând $\log_2 x=t$, $x>0$, $x\neq 1$, obținem $\frac{1}{t}+\frac{2}{t}=9$, deci $t=\frac{1}{3}$ și $x=\sqrt[3]{2}$. b) $x=2$. c) $x=\sqrt{5}$ sau $x=25$. **23.** a) $x=10^{-6}$ sau $x=10$. b) $x=2$ sau $x=\frac{1}{4}$. c) $x=\sqrt[3]{10}$ sau $x=\frac{1}{\sqrt[6]{10}}$. **24.** a) Ecuația are sens pentru $x\in\left(\frac{4}{5},\infty\right)\setminus\{1\}=D$. Pe D avem $\lg x^2=\lg(5x-4)$, deci $x^2-5x+4=0$. Obținem $x=4$. b) $x=23$ sau $x=-\frac{9}{5}$. **25.** a) $x_1=5$, $x_2=\sqrt[5]{5}$; b) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{8}$. **26.** a) Cu notația $y=\log_2 x$, avem $E(x)=1+2y+y(1+y)+2y^2+y^3=(1+y)^3=(1+\log_2 x)^3$, unde $x\in(0,\infty)$. b) $x=\frac{1}{8}$. **27.** b) Ecuația este echivalentă cu $(\log_x 2-2)(\log_x 3-2)=0$ și are soluțiile $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{3}$. c) Obținem ecuația $(2^{3x}-2)(2^x-2)=0$ cu soluțiile $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=1$. **28.** Cu substituția $3^x=y$, obținem ecuația $y^2+9=y(28-2y)$, ale cărei soluții sunt $y_1=9$ și $y_2=\frac{1}{3}$. Rezultă că $x_1=2$, $x_2=-1$. **29.** a) $x=1$; b) $x=0$. **30.** a) Se arată că $2\cdot 3^{x+1}=(3^x-1)+(5\cdot 3^x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. b) Condiția $2\lg(2^x-1)=\lg 2+\lg(2^x+3)$ este verificată de $x=\log_2 5$. **31.** a) Sistemul are sens pentru $x\in(1,\infty)$ și $y\in(0,1)$. Prima ecuație devine $\log_3(\log_2 x)-\log_3(-\log_2 y)=1$ sau $\log_2 x=-3\log_2 y$, deci $x=\frac{1}{y^3}$. Se obține soluția $x=64$, $y=\frac{1}{4}$. b) Din prima ecuație rezultă $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2}$, deci $\frac{x}{y}=2$ sau $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$. Cum $x-y>0$ și $x+y>0$ (din ecuația a doua), rezultă că $x=2y$. A doua ecuație devine $\log_3 y+\log_3 3y=1$, cu soluția $y=1$. Soluția sistemului este $x=2$, $y=1$. **32.** a) $x\in(-9,\infty)$. b) Inecuația este echivalentă cu $x<\frac{4}{x}$ sau $\frac{x^2-4}{x}<0$. Rezultă că

Scanned with OKEN Scanner

$x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$. c) $x = 1$. d) $x \in [0, \infty)$. **33.** a) $x \in [-3, 3] \setminus \{0\}$. b) $x \in (1, \infty)$. c) $x \in [10^{-4}, 10]$. d) $x \in (0, 1) \cup \cup [\sqrt{2}, 4]$. e) $x \in (-\infty, 1)$. **34.** a) Cu notația $\lg x = y$, $x > 0$, avem că $y^2 - 2y - 8 \le 0$, deci $y \in [-2, 4]$, de unde obținem $x \in [10^{-2}, 10^4]$. b) $x \in \left[\frac{28}{3}, \infty\right)$. c) $x \in [-1, 0) \cup (0, 2]$. **35.** a) Din condițiile de existență, rezultă că $x \in (-1, 2) \setminus \{0\}$. Pentru $1 + x \in (0, 1)$, inecuația devine $2 - x \ge 1 + x$ sau $x \le \frac{1}{2}$, deci orice $x \in (-1, 0)$ este soluție a inecuației. Pentru $1 + x \in (1, \infty)$, rezultă că $2 - x \le 1 + x$, deci $x \ge \frac{1}{2}$, adică $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right)$. Mulțimea soluțiilor inecuației date este $(-1, 0) \cup \left[\frac{1}{2}, 2\right)$. b) Notăm $2^x = t$; inecuația devine $\log_2(9 - t) \ge \log_2 \frac{8}{t}$, $t \in (0, 9)$, deci $t^2 - 9t + 8 \le 0$ și $t \in (0, 9)$. Așadar, $t \in [1, 8]$, de unde rezultă că $x \in [0, 3]$. **36.** a) $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$. b) $x \in \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$. c) $x \in \left\{\frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$. **37.** a) $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$. b) Avem că $2x = x + k\pi$, deci $x \in \{k\pi \mid k \in \in \mathbb{Z}\}$. c) $x \in \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right\}$. d) $x \in \{-\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. e) $x \in \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{(2k+1)\pi}{4} \mid k \in \in \mathbb{Z}\right\}$. **38.** a) $x \in \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. b) $x \in \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. c) Deoarece $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$, ecuația este echivalentă cu $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ și are soluțiile $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \cup \left\{\frac{2k\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. **39.** a) $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. b) Ecuația este echivalentă cu $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$, de unde $\sin x = 1$ sau $\sin x = -\frac{1}{2}$. Mulțimea soluțiilor este $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. c) $x \in \left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi\right\} \cup \left\{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi\right\} = \left\{\pm\frac{\pi}{6} + k\pi\right\}$. d) $x \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. e) Deoarece $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ și $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ecuația este echivalentă cu $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$. De aici $\sin x \in \in \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$, prin urmare $x \in \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. **40.** a) $x \in \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. b) Ecuația este echivalentă cu $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a cărei mulțime de soluții este $\left\{\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. c) Ecuația este echivalentă cu $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, deci $x \in \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. d) Ecuația este echivalentă cu $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}$, sau $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, de unde obținem $x \in \left\{\frac{\pi}{6} + (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. **41.** a) Cu notația

Scanned with OKEN Scanner

$tg\,x = t$ obținem ecuația $5t^2 - 3t - 2 = 0$, cu soluțiile $t = 1$ și $t = -\frac{2}{5}$. Rezultă că $x \in \left\{\frac{\pi}{4}+2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \cup$ $\cup\left\{-\text{arctg}\frac{2}{5}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. b) $x \in \left\{-\frac{\pi}{4}+2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \{\text{arctg}\,2+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$. c) $x \in \left\{\frac{\pi}{4}+2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \cup$ $\cup\{\text{arctg}\,2+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$. **42.** a) Ecuația este echivalentă cu $2\sin 2x(\cos x + 1) = 0$ și are soluțiile $x \in$ $\in \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}$. b) Ecuația este echivalentă cu $\cos 2x(2\cos x + 1) = 0$ și are soluțiile $x \in$ $\in\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. c) $x \in \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. **43.** a) $x \in \{k\pi \mid k \in$ $\in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. b) $x \in \left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. c) $x \in \left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. **44.** Cum $\sin x -$ $-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = -\cos x$, inecuația devine $-\cos x \geq 1$, deci $\cos x \leq -1$ și, cum $\cos x \geq -1$, deducem că $\cos x = -1$. Obținem soluțiile $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **45.** Întrucât $\sin x \geq 0$ (membrul stâng fiind nenegativ), ecuația este echivalentă cu $1 + |\cos x| = \sin^2 x$, deci $\cos^2 x + |\cos x| = 0$ sau $\cos x = 0$. Găsim soluțiile $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **46.** $m = -\frac{1}{5}$; $x \in \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$. **47.** a) $x = -\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$. b) Avem $\arcsin x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, deci $x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. c) $x =$ $= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. d) $x = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg}\frac{1}{3}\right) = \text{ctg}\left(\text{arctg}\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\text{tg}\left(\text{arctg}\frac{1}{3}\right)} = 3$. e) $x = \frac{1}{2}$.

2.5. Combinatorică

1. 7. **2.** Deoarece $50! \vdots 47$ și $50! \not\vdots 47^2$, rezultă că $50!$ nu este nici pătrat perfect, nici cub perfect. **3.** $S_n = 2 -$ $-\frac{n+3}{(n+2)!}$. **4.** a) $\frac{11}{10}$. b) 0. c) 12. **5.** C_7^3. **7.** a) $\frac{n+2}{n}$; b) $(n-4)^2$; c) $\frac{4}{n+1}$. **10.** b) $\frac{20!}{10!\cdot 9!} = C_{20}^{10}\cdot C_{10}^{1} \in \mathbb{N}$. **11.** Deoarece $C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \in \mathbb{N}$, rezultă că $(n!)^2$ divide $(2n)!$ **12.** a) Condiția din enunț revine la $C_{n+1}^{3} : C_n^3 =$ $= \frac{n+1}{n-2} \in \mathbb{N}$. Deoarece $n-2 \mid n+1$ dacă și numai dacă $n-2 \mid (n+1)-(n-2)$, adică $n-2 \mid 3$, rezultă că $n \in \{3, 5\}$. b) $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. **13.** 2. **14.** a) Se folosește inducția matematică. b) Avem $[3a_2] = 2$, iar pentru $n \geq 3$, $[3a_n] = \left[1+\frac{2}{n}\right] = 1$. **15.** a) Se impun condițiile $7 - x \in \mathbb{N}$, $x - 3 \in \mathbb{N}$, $7 - x \geq x - 3$. Rezultă $x \in \{3, 4, 5\}$. b) $x \in$ $\in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. **16.** a) $x = 5$. b) $x = 3$. c) $x = 10$. d) $x = 3$. e) $x = 7$. **17.** a) $n = 5$. b) $x = 9$. c) $x = 7$. **18.** $x \in \{8, 9,$

Scanned with OKEN Scanner

10}. b) $x \in \{0, 1, 2, 3\}$. **19.** a) $x \in \{3, 4\}$. b) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. c) În mod necesar $n \geq 5$. Inecuația este echivalentă cu $n^2 - 7n - 8 \leq 0$, $n \geq 5$, deci $n \in [-1, 8] \cap [5, \infty) \cap \mathbb{N}$, adică $n \in \{5, 6, 7, 8\}$. d) $n \in \{3, 4, 5, \ldots, 14\}$. e) $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. f) $x \in \{6, 7, 8\}$. g) $x \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$. h) $n \in \{2, 3, 4\}$. i) $n \in \{10, 11, \ldots, 17\}$. **20.** a) $x = 22$, $y = 15$. b) Sistemul este echivalent cu $\begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} = 7 \cdot \dfrac{x!}{(x-y+1)!} \\ 6 \cdot \dfrac{x!}{y!(x-y)!} = 5 \cdot \dfrac{x!}{(y+1)!(x-y-1)!} \end{cases}$, sau $\begin{cases} x-y+1=7 \\ 6(y+1)=5(x-y) \end{cases}$, deci $\begin{cases} x=10 \\ y=4 \end{cases}$. **21.** a) $a = 1$. b) $n \in \{2, 3\}$. d) $C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \ldots + C_{p+n}^p = C_{p+2}^{p+1} - C_{p+1}^{p+1} + C_{p+3}^{p+1} - C_{p+2}^{p+1} + \ldots + C_{p+n+1}^{p+1} - C_{p+n}^{p+1} = C_{p+n+1}^{p+1} - C_{p+1}^{p+1}$. **22.** 6! **23.** a) A_7^4. b) A_6^3. c) A_5^2. **24.** Din $C_n^2 = 120$ obținem $n = 16$. **25.** C_{10}^6. **26.** O submulțime cu cinci elemente care conține pe 2 și pe 3 are forma $\{2, 3\} \cup X$, X submulțime cu trei elemente a mulțimii $\{0, 1, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Rezultă că X poate fi aleasă în C_7^3 moduri. Prin urmare, 35 de submulțimi ale lui A au cinci elemente și conțin numerele 2 și 3. **27.** $C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 42$. **28.** Submulțimile sunt de forma $\{0\} \cup X$, unde X este o submulțime a mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$. Există $2^4 = 16$ asemenea submulțimi. **29.** Submulțimile căutate au forma $\{1\} \cup X$, unde X este o submulțime a mulțimii $\{2, 3, \ldots, 10\}$. Sunt $C_9^2 = 36$ astfel de submulțimi. **30.** Mulțimea X are forma $\{4, 5\} \cup A$, unde A este o submulțime a mulțimii $\{1, 2, 3\}$. Sunt $2^3 = 8$ mulțimi cu proprietatea cerută. **31.** $C_5^1 + C_5^3 + C_5^5 = 2^4 = 16$. **32.** Cele două numere pare pot fi alese în C_5^2 moduri, iar cele trei numere impare pot fi alese în C_5^3, deci numărul submulțimilor este $C_5^2 \cdot C_5^3 = 100$. **33.** *Soluția 1*: Numărul de submulțimi cu trei elemente este $C_9^3 = 84$. Dintre acestea trebuie excluse submulțimile care conțin toate elementele numere pare, deci C_5^3 submulțimi. Numărul submulțimilor căutate este 74. *Soluția 2*: Submulțimile căutate conțin 1 număr impar și 2 pare, 2 numere impare și unul par sau 3 numere impare. Numărul lor este $C_4^1 \cdot C_5^2 + C_4^2 \cdot C_5^1 + C_4^3 \cdot C_5^0 = 74$. **34.** *Soluția 1*: În total sunt $2^7 = 128$ de submulțimi. Dintre acestea trebuie excluse submulțimile cu toate elementele numere pare, deci $2^4 = 16$ submulțimi. Numărul submulțimilor căutate este 112. *Soluția 2*: Submulțimile cu cel puțin un număr impar cu forma $X \cup Y$ unde X este o submulțime nevidă a mulțimii $\{1, 3, 5\}$, iar Y o submulțime a mulțimii $\{0, 2, 4, 6\}$. Numărul lor este $(2^3 - 1)2^4 = 112$. **35.** Sunt $C_5^3 = 10$ submulțimi de trei elemente ale mulțimii A. Dintre ele, doar $\{1, 3, 5\}$ are toate elementele numere impare. Rezultă că sunt 9 submulțimi care verifică cerința dată. *Soluție alternativă*. Submulțimile căutate au forma $X \cup Y$, unde $X \neq \emptyset$, $X \subset \{2, 4\}$, $Y \subset \{1, 3, 5\}$ și $X \cup Y$ are trei elemente. Dacă X are un element, atunci Y are două elemente și sunt $C_2^1 \cdot C_3^2 = 6$ submulțimi $X \cup Y$. Dacă X are două elemente, atunci Y are un element și sunt $C_2^2 \cdot C_3^1 = 3$ submulțimi. În total, obținem 9 submulțimi. **36.** a) $C_{10}^3 = 120$. b) Submulțimile lui A cu trei elemente și suma elementelor număr par sunt formate din: trei numere pare, deci $C_5^3 = 10$ submulțimi, sau un număr par și două impare, deci $5 \cdot C_5^2 = 50$ submulțimi. În total sunt 60 de submulțimi cu proprietățile cerute. **37.** $C_7^5 = 35$. **38.** a) C_{10}^4. b) $C_{10}^4 - C_9^3$. **39.** Cu cele 10 puncte putem forma $C_{10}^2 = 45$ de drepte. Cum 10 dintre aceste drepte provin din laturi, vom avea 35 de diagonale. **40.** a) $C_{17}^2 - C_{10}^2 - C_7^2 + 2 = 72$ drepte. b) $C_{17}^3 - C_{10}^3 - C_7^3 = 525$

Scanned with OKEN Scanner

triunghiuri. **41.** $C_3^2 \cdot C_4^3 = 12$. **42.** $C_{12}^3 \cdot C_{10}^2 = 9900$. **43.** Dacă echipa are 4 fete și 2 băieți, fetele le alegem în C_{18}^4 moduri, iar băieții în C_{12}^2 moduri, deci avem $C_{18}^4 \cdot C_{12}^2$ moduri de a forma echipa. Dacă echipa conține 5 fete și un băiat, avem $C_{18}^5 \cdot C_{12}^1$ moduri de formare a echipei. Dacă echipa are 6 fete, avem $C_{18}^6 \cdot C_{12}^0$ moduri de formare a echipei. În total sunt $C_{18}^4 \cdot C_{12}^2 + C_{18}^5 \cdot C_{12}^1 + C_{18}^6 \cdot C_{12}^0$ moduri de formare a echipei. **44.** O asemenea funcție ia valoarea 1 în două elemente ale domeniului și 0 în rest. Aceste două elemente le putem alege în $C_{10}^2 = 45$ de moduri. **45.** Numărul total al funcțiilor este $2^3 = 8$. Dacă f nu este surjectivă, atunci $\text{Im}\, f = \{4\}$ sau $\text{Im}\, f = \{5\}$, deci numărul funcțiilor surjective este $8 - 2 = 6$. **46.** Evident $f(1)$ poate lua 4 valori, $f(2)$ oricare dintre cele 4 valori rămase și $f(3)$ poate lua oricare dintre cele 3 valori rămase. Sunt $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ de funcții. **47.** $4! = 24$. **48.** 150. **49.** a) 6^5. b) 6^4. **50.** $C_6^4 = 15$. **51.** $2 \cdot C_4^3 = 8$. **52.** -80, respectiv $C_5^3 = 10$. **53.** a) $T_3 = C_{50}^2 (2x)^{48} (-\sqrt[3]{x})^2 =$ $= 2^{48} C_{50}^2 x^{48} \cdot \sqrt[3]{x^2}$. b) $2^6 C_{10}^4 x^7 \cdot \sqrt[3]{x}$. **54.** a) $T_7 = C_9^6$. b) Termenul general este $T_{k+1} = C_{200}^k 2^k x^{\frac{200-k}{3} \cdot \frac{k}{2}}$ și nu conține x dacă $\frac{200-k}{3} - \frac{k}{2} = 0$, adică pentru $k = 80$. Termenul căutat este $T_{81} = C_{200}^{80} \cdot 2^{80}$. **55.** a) Termenul general al dezvoltării este $T_{k+1} = C_4^k 2^{4-k} x^k$ și conține pe x^3 pentru $k = 3$. Coeficientul lui x^3 este egal cu $2C_4^3 = 8$. b) Termenul general din dezvoltare este $T_{k+1} = C_9^k (a^2)^{9-k} (a^{-\frac{1}{3}})^k = C_9^k a^{18-\frac{7k}{3}}$ și conține pe a^4 dacă $18 - \frac{7k}{3} = 4$, deci $k = 6$; termenul căutat este $T_7 = C_9^6 a^4$. c) Termenul general al dezvoltării este $T_{k+1} = C_{12}^k a^{\frac{48-7k}{12}}$ și conține pe $\sqrt{a}$ dacă $\frac{48-7k}{12} = \frac{1}{2}$, deci $k = 6$. Termenul căutat este $T_7 = C_{12}^6 \sqrt{a}$. **56.** Termenul general al dezvoltării este $T_{k+1} = (-2)^k C_n^k x^{2n-3k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Primii trei coeficienți sunt C_n^0, $-2C_n^1$, $4C_n^2$. Din ecuația $C_n^0 - 2C_n^1 + 4C_n^2 = 49$ rezultă că $n = 6$. Termenul independent de x este $T_5 = 16C_6^4$. **57.** a) Din condiția $C_n^2 - C_n^1 = 27$ găsim $n = 9$. b) Cum $T_2 = 9x^{\lg x - 1} = 900$, rezultă că $x^{\lg x - 1} = 100$ sau, cu notația $\lg x = y$, $y(y-1) = 2$, deci $y = -1$ sau $y = 2$. Obținem $x = \frac{1}{10}$ și $x = 100$. **58.** Avem $T_{k+1} = C_n^k y^{\frac{1}{2}(n-k)} \frac{1}{2^k} y^{-\frac{k}{4}}$. a) Coeficienții termenilor de rang 1, 2 și 3 sunt: C_n^0, $\frac{1}{2}C_n^1$ și $\frac{1}{4}C_n^2$. Din ecuația $2 \cdot \frac{1}{2}C_n^1 = \frac{1}{4}C_n^2 + C_n^0$ găsim $n = 8$. b) Pentru $n = 8$, $T_{k+1} = C_8^k y^{\frac{16-3k}{4}}$, $k = \overline{0,8}$. Avem $\frac{16-3k}{4} \in \mathbb{N}$, pentru $k = 0$ și $k = 4$. Termenii căutați sunt T_1 și T_5. **59.** a) Din egalitatea $C_n^2 = 36$ rezultă că $n = 9$. b) Avem că $T_{k+1} = C_9^k x^{\frac{5}{4}(9-k)} x^{-\frac{k}{2}}$. Din condiția $\frac{5}{4}(9-k) - \frac{k}{2} = 3$ obținem $k = \frac{33}{7} \notin \mathbb{N}$, deci nu există termen care să conțină x^3. **60.** a) Cum $C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 22$, rezultă $n = 6$. b) Avem $T_3 + T_5 = 135 \Leftrightarrow C_6^2 \cdot 2^{x+1} +$ $+ C_6^4 \cdot 2^{2-x} = 135 \Leftrightarrow 2^{x+1} + 2^{2-x} = 9 \Rightarrow x = 2$ sau $x = -1$. **61.** a) Pentru $n \geq 2$, din $2 \cdot \frac{C_n^1}{2} = C_n^0 + \frac{C_n^2}{4}$ rezultă $n = 8$. b) Deoarece $T_{k+1} = C_8^k \cdot 2^{\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{16}\right)(8-k)} \cdot 2^{\left(\frac{5}{16} - \frac{x}{2}\right)k}$, condiția $T_6 - T_4 = 1$ devine $C_8^5 \cdot 2^{1-x} - C_8^3 2^x = 56$. Rezultă $2^{1-x} - 2^x = 1$, cu soluția $x = 0$. **62.** Soluția inecuației date este $(0, 1) \cup (3, 9)$. Cum n este număr natural maxim

Scanned with OKEN Scanner

rezultă $n = 8$. Pentru $n = 8$, termenul general al dezvoltării este $T_{k+1} = C_8^k(\sqrt{a})^{8-k}(-\sqrt[3]{b})^k$ și conține b^2 pentru $k = 6$. Termenul căutat este $T_7 = C_8^6 ab^2$. **63.** Avem $(1+\sqrt{2})^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k(\sqrt{2})^k = C_{10}^0 + C_{10}^2 \cdot 2 + \ldots + C_{10}^{10} \cdot 2^5 +$ $+ \sqrt{2}(C_{10}^1 + C_{10}^3 \cdot 2 + \ldots + C_{10}^9 \cdot 2^4) = A + B\sqrt{2}$, $A, B \in \mathbb{N}$. Cum $(1+\sqrt{2})^{10} = 3403 + 2408\sqrt{2}$, rezultă că $A =$ $= 3403$ și $B = 2408$, iar suma cerută este egală cu $B\sqrt{2} = 2408\sqrt{2}$. **64.** a) Deoarece $(\sqrt{2}+1)^7 = \sqrt{2}^7 +$ $+ C_7^1\sqrt{2}^6 + C_7^2\sqrt{2}^5 + \ldots + C_7^6\sqrt{2} + 1$ și $(\sqrt{2}-1)^7 = \sqrt{2}^7 - C_7^1\sqrt{2}^6 + C_7^2\sqrt{2}^5 + \ldots + C_7^6\sqrt{2} - 1$, diferența dintre cele două numere este egală cu $2(C_7^1 \cdot 2^3 + C_7^3 \cdot 2^2 + C_7^5 \cdot 2 + C_7^7) \in \mathbb{Q}$. b) Numărul este egal cu $2\sqrt{2}(C_7^1 \cdot 2^6 + C_7^3 \cdot 2^5 + C_7^5 \cdot 2^4 + C_7^7 \cdot 2^3) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **65.** b) $S_1^2 - 2S_2^2 = (S_1 - \sqrt{2}S_2)(S_1 + \sqrt{2}S_2) =$ $= (1-\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2})^n = (-1)^n$. **66.** a) 2^{15}. b) 1. c) $(5-4)^{2008} = 1$. **67.** b) Conform a), $\sum_{k=0}^{n}(k+1)C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k +$ $+ n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} = 2^n + n2^{n-1} = 2^{n-1}(n+2)$. **68.** b) Conform punctului a), $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1 +$ $+ C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}) = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - C_{n+1}^0) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

2.6. Matematici aplicate. Probabilități

1. Cum $a = 25\%b$, rezultă că $b = 4a$. Din $p\%(a + b) = a$, obținem $p = 20$. **2.** Fie x prețul înainte de reducere. Din $x - 20\%x = 320$ rezultă că $x = 400$ lei. **3.** Fie x prețul inițial. Din $x + 15\%x = 460$, rezultă că $x = 400$ lei. **4.** 40 lei. **5.** Din $p\% \cdot 1000 = 80$, rezultă că $p\% = 8\%$. **6.** Fie $p\%$ procentul cu care trebuie ieftinit produsul. Din $5400 -$ $- p\%5400 = 4860$, deducem că $p = 10$. Procentul căutat este egal cu 10%. **7.** Fie x prețul înainte de cele două ieftiniri. După prima ieftinire prețul este $x - 10\%x = \frac{9x}{10}$, iar după a doua $\frac{9x}{10} - 25\%\frac{9x}{10} = \frac{27x}{40}$. Din $\frac{27x}{40} = 540$ rezultă că $x = 800$ lei. **8.** Fie x prețul produsului înainte de scumpiri. După prima scumpire, prețul devine $x +$ $+ 10\%x = \frac{11x}{10}$, iar după a doua scumpire este $\frac{11x}{10} + 20\%\frac{11x}{10} = \frac{33x}{25}$. Din $\frac{33x}{25} = 660$ rezultă că $x = 500$ lei. **9.** Fie x prețul produsului. Din relația $x + 19\%x = 238$, rezultă că $x = 200$ lei. Astfel, TVA = $19\% \cdot 200$ lei = 38 lei. **10.** Prețul produsului este 300 lei, iar TVA-ul este 57 lei. **11.** $\frac{2}{5}$. **12.** 1. **13.** $\frac{5}{36}$. **14.** Sunt 1000 de cazuri posibile. Mulțimea cazurilor favorabile este $B = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n < 1000$ și n este pătrat perfect și cub perfect$\}$, deci $B =$ $= \{0^6, 1^6, 2^6, 3^6\}$. Probabilitatea cerută este egală cu $\frac{4}{1000} = \frac{1}{250}$. **15.** Deoarece $A = \{2k - 1 \mid k = 1, 2, \ldots, 1005\}$, A are 1005 elemente, deci sunt 1005 cazuri posibile. Mulțimea multiplilor lui 3 din A este $B = \{3, 9, \ldots, 2007\} =$ $= \{3(2k - 1) \mid k = 1, 2, \ldots, 335\}$, deci sunt 335 cazuri favorabile. Probabilitatea cerută este $\frac{335}{1005} = \frac{1}{3}$. **16.** Mulți-

Scanned with OKEN Scanner

mea cazurilor posibile este $A = \{2k \mid k = 1, 2, 3, \ldots, 1005\}$, deci sunt 1005 cazuri posibile. Mulțimea cazurilor favorabile este $B = \{4k \mid k = 1, 3, 5, \ldots, 501\}$, deci 251 cazuri favorabile. Probabilitatea cerută este $\frac{251}{1005}$.

17. $\frac{C_5^3}{2^5} = \frac{5}{16}$. **18.** Avem $2^6 - 1 = 63$ submulțimi nevide și $2^3 - 1 = 7$ submulțimi nevide cu elemente impare. Probabilitatea cerută este $\frac{7}{63} = \frac{1}{9}$. **19.** Există 90 de numere de câte două cifre, dintre care 25 au ambele cifre impare. Probabilitatea cerută este $\frac{5}{18}$. **20.** $\frac{5^3}{9 \cdot 10^2} = \frac{5}{36}$. **21.** Există 900 de numere de trei cifre. Numerele care au exact două cifre egale au forma $\overline{abb}$, $\overline{aba}$ sau $\overline{abb}$, unde $a \neq 0$, $a \neq b$, deci numărul cazurilor favorabile este $3 \cdot 81 = 243$ numere. Probabilitatea cerută este $\frac{27}{100}$. **22.** Există 5^4 funcții cu domeniul și codomeniul din enunț, dintre care injective sunt $A_5^4 = 120$. Probabilitatea cerută este $P = \frac{120}{625} = \frac{24}{125}$. **23.** a) $4^4 = 256$. b) $P = \frac{48}{256} = \frac{3}{16}$. **24.** $\frac{4!}{4^4}$. **25.** $\frac{C_6^4}{6^4}$. **26.** a) $\frac{C_8^2}{C_{12}^2} = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}$. b) $\frac{C_4^2}{C_{12}^2} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$. c) $\frac{8 \cdot 4}{C_{12}^2} = \frac{32}{66} = \frac{16}{33}$. **27.** Avem că $M(X) = -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$. Apoi $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$. Variabila aleatoare X^2 are repartiția X^2: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, deci $M(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Astfel, $D(X) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$. **28.** a) Dacă extrage două bile albe, câștigă 2 €; acest eveniment are probabilitatea $\left(\frac{8}{n+8}\right)^2$. Dacă extrage bile de culori diferite, pierde 1 €; acest eveniment are probabilitatea $\frac{8}{n+8} \cdot \frac{n}{n+8} + \frac{n}{n+8} \cdot \frac{8}{n+8} = \frac{16n}{(n+8)^2}$. Dacă extrage două bile negre, pierde 4 €; acest eveniment are probabilitatea $\left(\frac{n}{n+8}\right)^2$. b) Asociem jocului variabila aleatoare X: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ \frac{64}{(n+8)^2} & \frac{16n}{(n+8)^2} & \frac{n^2}{(n+8)^2} \end{pmatrix}$. Speranța matematică de câștig este egală cu media lui X, care este $M(X) = \frac{-4(n^2+4n-32)}{(n+8)^2}$. Avem că $M(X) = 0 \Leftrightarrow n = 4$ (soluția $n = -8$ nu este acceptabilă).

2.7. Geometrie analitică

1. Avem $B(2, -3)$ și $C(-2, 3)$ și $BC = 2\sqrt{13}$. **2.** $a = b = 2$. **3.** Fie A' simetricul lui A față de mijlocul M al lui BC.

Scanned with OKEN Scanner

Avem $M\left(-2, -\frac{5}{2}\right)$ și totodată $M\left(\frac{a-3}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$. Astfel, obținem $a=-1$, $b=-7$, deci $A'(-1,-7)$. **4.** Fie $D(a, b)$. Cum $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă diagonalele se înjumătățesc, rezultă că $\frac{-2+8}{2}=\frac{7+a}{2}$ și $\frac{9-3}{2}=\frac{-4+b}{2}$, deci $a=-1$ și $b=10$. **5.** Deoarece $\vec{v}$ este coliniar cu $\vec{u}$, de sens opus lui $\vec{u}$, rezultă $\vec{v}=\lambda\vec{u}$, cu $\lambda<0$. Dar $1=|\vec{v}|=|\lambda|\cdot|\vec{u}|=|\lambda|\cdot 5$, $\lambda<0$, implică $\lambda=-\frac{1}{5}$ și atunci $\vec{v}=-\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j}$. **6.** a) Vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari dacă $\frac{2}{a}=\frac{a-1}{1}$, deci $a_1=-1$, $a_2=2$. b) Vectorii sunt perpendiculari dacă $2a+(a-1)=0$ sau $a=\frac{1}{3}$. c) Avem $|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2=2a^2-2a+6\geq\frac{11}{2}$ sau $(2a-1)^2\geq 0$, care este adevărată, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$. **7.** Cum $\overrightarrow{BA}=-\vec{i}+4\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}+8\vec{j}$, rezultă că $\cos B=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{30}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{4\cdot 17}}=\frac{15}{17}$. **8.** $a=1$, $b=-13$. **9.** a) $(3,-5)$. b) $(5,6)$. c) $(5,4)$. d) $(2,-3)$. **10.** Dreptele sunt concurente în punctul $A(2,3)$. **11.** Punctul de intersecție dintre d_1 și d_2 este $A(1,-1)$ și aparține lui d_3 pentru $a=0$. **12.** $3x+y-5=0$. **13.** Mijlocul segmentului AB este punctul $C(2,1)$. Ecuația dreptei OC este $y=\frac{1}{2}x$. **14.** $C(9,2)$; $D\left(4,-\frac{7}{4}\right)$; BC: $3x+28y-83=0$. **15.** Avem $m_{AB}=m_{AC}=-1$, deci $AB\parallel AC$. Rezultă că dreptele AB și AC coincid, prin urmare A, B, C sunt coliniare. **16.** a) $2x+y=0$. b) Deoarece $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n=-n$ și $\log_3 9^n=2n$, rezultă că $A_n=B_n$. c) Punctul A_n aparține dreptei A_1A_2 pentru că $B_n\in B_1B_2$ $(2\cdot(-n)+2n=0)$. **17.** a) $y=2x+1$. b) $\frac{1}{2}$. c) A_n sunt pe dreapta A_1A_2. **18.** Avem că $G(1,2)$ și ecuația dreptei OG este $y=2x$. **19.** Dacă m_1, m_2 sunt pantele celor două drepte, atunci $m_1=-1$, $m_2=-\frac{3}{a}$. Din condiția $m_1=m_2$ rezultă că $a=3$. **20.** $x-2y-6=0$. **21.** $3y-4x-14=0$. **22.** Deoarece $m_{d_1}=m_{d_2}=\frac{3}{4}$, deci $d_1\parallel d_2$. Dacă $A\in d_1$, atunci $d(d, d_2)=d(A, d_2)$. Considerăm $A(1,1)\in d_1$ și găsim $d(d, d_2)=\frac{4}{15}$. **23.** Notând cu m_1 și m_2 pantele celor două drepte, cum $m_1\cdot m_2=-1$, deci $-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{a}=-1$, obținem că $a=1$. **24.** $4x+5y-1=0$. **25.** Fie $M(0, a)$; atunci $m(\sphericalangle AMB)=90^\circ\Leftrightarrow m_{MA}\cdot m_{MB}=-1\Leftrightarrow\frac{a+1}{4}\cdot\frac{a-1}{-2}=-1\Leftrightarrow a\in\{-3,3\}$. **26.** Fie AD, $D\in BC$, înălțimea din A în triunghiul ABC. Avem $A(-2,0)$ și $m_{AD}=-\frac{1}{m_{BC}}=-\frac{1}{3}$. Ecuația dreptei AD este $y=-\frac{1}{3}(x+2)$. **27.** $x-2y+2=0$. **28.** Ecuația înălțimii din A este $5x-y-1=0$, iar cea a înălțimii din B este $6y-7x+27=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Intersectând cele două înălțimi, obținem că $H\left(-\frac{21}{23},-\frac{128}{23}\right)$. **29.** a) $H\left(-\frac{1}{2},3\right)$. b) $2x + y - 2 = 0$.

30. $Q\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{6}\right)$; $H\left(0,\frac{10}{3}\right)$; $G(1, 1)$. b) $m_{QG} = m_{HG} = -\frac{7}{3}$, deci Q, H, G sunt coliniare. c) $HG = \frac{\sqrt{58}}{3}$; $QG = \frac{\sqrt{58}}{6}$. **31.** a) $a = \pm 2$. b) $a = 1$. c) $S_{OAB} = \frac{1}{2}(a^2+4)$ este minimă pentru $a = 0$. **32.** a) Din $m_{MA} = m_{MC}$ și $M \in (0, 4)$, rezultă concluzia b). Deoarece $E(1, 0)$, $F(0, 3)$ rezultă $m_{EF} = -3$. Din $m_{BM} \cdot m_{EF} = -1$ rezultă $BM \perp EF$. c) $BM = EF = \sqrt{10}$. **33.** a) $B'(7, -1)$; $C'(-5, 5)$. b) $m_{B'A} = m_{C'A} = -\frac{1}{2}$, deci B', A, C' sunt coliniare. c) $m_{BC'} = m_{BC}$. d) $B'C' = 6\sqrt{5}$; $BC = 3\sqrt{5}$. **34.** a) $\sqrt{3}$; b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; c) $a = 1$; d) $\sqrt{3}$; e) $2\sqrt{3}$. **35.** Ecuația dreptei AN este $2x + 5y - 6 = 0$, ecuația dreptei BM este $5x + 3y - 6 = 0$, iar ecuația perpendicularei din O pe AB este $3x - 2y = 0$. Cele trei drepte sunt concurente în punctul $P\left(\frac{12}{19},\frac{18}{19}\right)$. **36.** Coordonatele punctelor care apar sunt: $D\left(\frac{3}{2},1\right)$, $E\left(0,-\frac{5}{4}\right)$, $F\left(\frac{5}{6},0\right)$, $M\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{8}\right)$, $N\left(\frac{5}{12},1\right)$. Cum $DM \parallel OB$ și $DN \parallel OA$, rezultă că $DM \perp DN$. Deoarece $m_{OM} \cdot m_{ON} = -1$, răspunsul la cea de-a doua întrebare este afirmativ. **37.** $LMNP$ este un romb cu un unghi drept. **38.** Deoarece MP și NQ au același mijloc, rezultă că $MNPQ$ este paralelogram. În plus, $MP = NQ$, deci $MNPQ$ este dreptunghi.

39. Deoarece $m_{AB} \cdot m_d = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$, rezultă că dreptele AB și d sunt perpendiculare. Mijlocul M al segmentului AB are coordonatele $\left(-\frac{7}{5},\frac{6}{5}\right)$, deci aparține dreptei d. În concluzie, punctele A și B sunt simetrice față de dreapta d. **40.** $A'\left(\frac{21}{5},\frac{2}{5}\right)$. **41.** a) $5\sqrt{2}$. b) $\frac{12}{\sqrt{5}}$. **42.** Cum $m_{d_1} = m_{d_2} = -\frac{3}{4}$, rezultă că $d_1 \parallel d_2$ și $A(1, -1) \in d_1$; avem $d(d_1, d_2) = d(A, d_2) = \frac{3}{2}$. **43.** Avem că $S_{ABC} = \frac{AB \cdot CC'}{2}$, unde $CC' \perp AB$, $C' \in AB$. Rezultă că $S_{ABC} = 2$. **44.** a) $a = 3$, $b = -1$. b) $G\left(\frac{8}{3},3\right)$. c) $m_{AC} \cdot m_{BD} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$. d) Observăm că $ABCD$ este un romb cu latura $AB = 5\sqrt{2}$ și diagonalele $AC = 4\sqrt{10}$, $BD = 2\sqrt{10}$. Deci $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = 20$. **45.** a) $A(3, 0)$. $B(0, 4)$, $m_{AB} = -\frac{4}{3}$. b) Ecuația AD este $y = \frac{3}{4}(x-3)$, iar a dreptei BC este $y - 4 = \frac{3}{4}x$. Deducem $C\left(-\frac{16}{3},0\right)$ și $D\left(0,-\frac{9}{4}\right)$. Ecuația dreptei CD este $y = -\frac{27}{64}x - \frac{9}{4}$. **46.** a) $A_2B_2 = 2\sqrt{2}$. b) $3x + y - 3 = 0$. c) $3x + y - 1 = 0$; d) 6; e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. f) 18. **47.** a) Deoarece $m_{OA_1} = m_{OA_2}$, rezultă că O, A_1 și A_2 sunt coliniare. b) 4 drepte. c) 2^{n-1}.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XI-a

3.1. Permutări

1. $\sigma\tau = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, $\tau\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$, $\tau^{-2} = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$. **2.** $(\sigma\tau)^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}$, $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$, $\tau^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&4&3&1\end{pmatrix}$. **3.** Cum $\sigma^4 = e$, rezultă că $\sigma^{2009} = \sigma$. **4.** $x = \sigma^{-1}\tau^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$. **5.** b) $\alpha = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$. **6.** a) $\sigma^3 = e$. b) Deoarece $\sigma^{2009} = \sigma^{2007} \cdot \sigma^2 = \sigma^2$, rezultă că $x = \sigma^{-2} = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$. **7.** a) Avem $\sigma\tau = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ şi $\tau\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$. b) Numărul de inversiuni ale permutării σ este 3. c) Ecuaţia este echivalentă cu $x = \sigma^{-1}\tau = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$. **8.** Deoarece $m(\sigma_1) = 3$, $m(\sigma_2) = 4$, $m(\sigma_3) = 5$, rezultă că $\varepsilon(\sigma_1) = -1$, $\varepsilon(\sigma_2) = 1$ şi $\varepsilon(\sigma_3) = -1$. **9.** a) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&1&4&2&3&5\end{pmatrix}$. b) $m(\sigma) = m(\sigma^{-1}) = 7$. **10.** $i = 8, j = 3$. **11.** a) Deoarece $A = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\}$, rezultă că ea are cinci elemente. b) Având în vedere că $m(\sigma) = 4$, deci $\varepsilon(\sigma) = 1$, obţinem $\varepsilon(\sigma^2) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma) = 1$ şi $\varepsilon(\sigma^3) = \varepsilon(\sigma^4) = \varepsilon(e) = 1$. **12.** a) Întrucât $S_3 = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$, unde $e = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$, $\sigma_4 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$, $\sigma_5 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, avem $\varepsilon(e) = 1$, $\varepsilon(\sigma_1) = -1$, $\varepsilon(\sigma_2) = -1$, $\varepsilon(\sigma_3) = 1$, $\varepsilon(\sigma_4) = 1$, $\varepsilon(\sigma_5) = -1$. b) Deoarece trei dintre permutările lui S_3 sunt pare şi trei sunt impare, rezultă că produsul lor (indiferent de ordinea factorilor) este o permutare impară. **13.** a) $m(\sigma) = 9$. b) Dacă ecuaţia ar avea o soluţie $x \in S_6$, atunci, cum $\varepsilon(x^4) = 1$ şi $\varepsilon(\sigma) = -1$, ar rezulta că $1 = -1$, ceea ce este fals. Deci ecuaţia considerată nu are nicio soluţie în S_6. **14.** a) Căutăm $x = \begin{pmatrix}1&2&3\\x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}$ astfel încât $\begin{pmatrix}1&2&3\\x_1&x_2&x_3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&2&3\\x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}$. I. Dacă $x_1 = 1$, atunci $x\sigma(1) = x_3$ şi $x\sigma(1) = 3$, deci $x_3 = 3$ şi $x_2 = 2$. Aşadar, $x = e$. II. Dacă $x_1 = 2$, avem $x\sigma(1) = x_3$ şi $x\sigma(1) = 1$, deci $x_3 = 1$ şi $x_2 = 3$. Observăm că $x = \sigma^2$. III. Pentru $x_1 = 3$, obţinem $x\sigma(1) = x_3$ şi $x\sigma(1) = 2$, de unde rezultă că $x_3 = 2$ şi $x_2 = 1$, adică $x = \sigma$. Prin urmare, soluţiile ecuaţiei sunt e, σ şi σ^2. b) Fie x o soluţie a ecuaţiei considerate. Deoarece $x^3 = x\sigma$ şi $x^3 = \sigma x$, rezultă că $x\sigma = \sigma x$, deci $x \in \{e, \sigma, \sigma^2\}$. Se observă că numai σ^2 este soluţie.

3.2. Matrice

1. 625. **2.** $A + B = \begin{pmatrix}3&3\\2&-1\end{pmatrix}$, $2A - 3B = \begin{pmatrix}1&-4\\-11&18\end{pmatrix}$, $A + A^t = \begin{pmatrix}4&0\\0&6\end{pmatrix}$. **3.** $A \cdot B = \begin{pmatrix}-1&-1\\-3&5\end{pmatrix}$, $B \cdot A =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **4.** $X = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $a+b+c+d=-6$. **5.** $x=2, y=0, z=3$. **6.** $B = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-2 & n^2+n \\ -n & 0 \end{pmatrix}$. **7.** $f(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **9.** b) Să presupunem că există două matrice $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $I_2 = XY - YX$. Deoarece $\text{tr}(XY - YX) = \text{tr}(XY) - \text{tr}(YX) = 0$, rezultă că $\text{tr}(I_2) = 0$, ceea ce este fals. **10.** a) Fie $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ două matrice din $G (a_1 > 0, a_2 > 0)$. Deoarece $AB = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2+b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $a_1a_2 > 0$, rezultă că $A \cdot B \in G$. b) Putem alege $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $D = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. c) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, atunci $I_2 - A + A^2 = \begin{pmatrix} a^2-a+1 & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cum $a^2 - a + 1 > 0$, înseamnă că $I_2 - A + A^2 \in G$. **11.** a) Fie $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Cum $XA = \begin{pmatrix} c & -a \\ d & -b \end{pmatrix}$ și $AX = \begin{pmatrix} -b & -d \\ a & c \end{pmatrix}$, relația $AX = XA$ este echivalentă cu $d = a$ și $c = -b$, deci $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. **12.** Notăm cu A matricea $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Deoarece $A^2 = O_2$, rezultă că $A^{2007} = O_2$. **13.** Întrucât $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$, rezultă că $A^4 = I_2$, deci $A^{2008} = I_2$. **14.** $A^n = 2^{n-1}A$. **15.** a) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3 = O_3$. b) $A^n = (I_3 + B)^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2$.

16. $B^n = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$. **17.** Observăm că $A = 2\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$ și, conform rezultatului de la problema precedentă, deducem că $A^n = 2^n\begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{6} & -\sin\frac{n\pi}{6} \\ \sin\frac{n\pi}{6} & \cos\frac{n\pi}{6} \end{pmatrix}$. **18.** Se verifică ușor că $A^n = A$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $B = I_2 + aA$ și $(aA)I_2 = I_2(aA)$, rezultă că $B^n = (I_2 + aA)^n = I_n + C_n^1 aA + C_n^2 a^2A^2 + \ldots + C_n^n a^nA^n = I_2 + C_n^1 aA + C_n^2 a^2 A + \ldots + C_n^n a^n A = I_2 + (C_n^1 a + C_n^2 a^2 + \ldots + C_n^n a^n)A = I_2 + [(1+a)^n - 1]A$. **19.** a) Cum $A^2 = A$, rezultă că $X(a)X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + (a+b)A + abA^2 = I_2 + (a+b+ab)A = X(a+b+ab)$. b) Deoarece $X(a)X(b) = X((a+1)\cdot(b+1) - 1)$, rezultă că $(X(a))^2 = X((a+1)^2 - 1)$ și $(X(a))^3 = X(a)\cdot X((a+1)^2 - 1) = X((a+1)^3 - 1)$. Astfel, intuim că $(X(a))^n = X((a+1)^n - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, egalitate pe care o demonstrăm apoi prin inducție. c) Observăm că $X(1)X(2) = X(2\cdot 3 - 1)$, $X(1)X(2)X(3) = X(2\cdot 3\cdot 4 - 1)$ și demonstrăm

Scanned with OKEN Scanner

prin inducție că $X(1)X(2)\cdot\ldots\cdot X(n)=X((n+1)!-1)$. Deci ecuația $X(1)X(2)\cdot\ldots\cdot X(2009)=X(t-1)$ este echivalentă cu $X(2010!-1)=X(t-1)$, de unde obținem $t=2010!$ **20.** Căutăm $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $X^2=I_2$. Ultima egalitate este echivalentă cu sistemul $a^2+bc=1$; $b(a+d)=0$; $c(a+d)=0$; $bc+d^2=1$. Alegând $d=-a$, a doua și a treia ecuație sunt verificate, iar celelalte două conduc la $bc=1-a^2=(1-a)(1+a)$, care este satisfăcută de $b=1+a$ și $c=1-a$. Drept urmare, orice matrice de forma $X=\begin{pmatrix}a & 1+a\\ 1-a & -a\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ este soluție a ecuației considerate, ceea ce înseamnă că ecuația are o infinitate de soluții. **21.** a) $S=O_3$. b) Deoarece $BC=(I_3+A)(I_3+aA)=I_3+(a+1)A+aA^2$ și $A^2=14A$, rezultă că $BC=I_3+(15a+1)A$, deci $BC=I_3$ dacă și numai dacă $a=-\frac{1}{15}$. c) $A^{n+1}=A^{n-1}\cdot A^2=A^{n-1}\cdot 14A=14A^n$. **22.** a) Deoarece $BA=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 5 & 2\end{pmatrix}=AB$, rezultă că $B\in C(A)$. c) Fie X o soluție a ecuației. Cum $XA=X^2+X^3=AX$, înseamnă că $X=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & x\end{pmatrix}$. Astfel, ecuația este echivalentă cu $\begin{pmatrix}x & 0\\ y & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x^2 & 0\\ 2xy & x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ sau $x^2+x-2=0$ și $y+2xy=3$, de unde obținem $(x,y)\in\{(1,1),(-2,-1)\}$. Așadar, $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ sau $X=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix}$. **23.** a) $A^3=O_3$. b) Fie $X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_4 & x_5 & x_6\\ x_7 & x_8 & x_9\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $AX=XA$. Efectuând înmulțirile, obținem $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1+x_4 & x_2+x_5 & x_3+x_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2+x_3 & x_3 & 0\\ x_5+x_6 & x_6 & 0\\ x_8+x_9 & x_9 & 0\end{pmatrix}$, de unde rezultă că $x_1=x_5=x_9=a$, $x_2=x_3=x_6=0$, $x_4=x_8=b$ și $x_7=c$, deci $X=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\end{pmatrix}\in M$. c) Dacă $X\in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ este o soluție a ecuației $X^2=A$, atunci $AX=X^3=XA$, deci, conform punctului b), rezultă că $X=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\end{pmatrix}$. Drept urmare, $X^2=\begin{pmatrix}a^2 & 0 & 0\\ 2ab & a^2 & 0\\ b^2+2ac & 2ab & a^2\end{pmatrix}\neq A$, ceea ce arată că ecuația considerată nu are soluție.

24. b) Vom demonstra prin inducție propoziția $P(n)$: $A^nB-BA^n=nA^n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Evident, $P(1)$ este adevărată conform ipotezei. Presupunem $P(k)$ adevărată. Atunci, din $A^kB-BA^k=kA^k$ rezultă că $A^{k+1}B-ABA^k=kA^{k+1}$ sau $A^{k+1}B-BA^{k+1}+BA^{k+1}-ABA^k=kA^{k+1}$, deci $A^{k+1}B-BA^{k+1}+(BA-AB)A^k=kA^{k+1}$, de unde, având în vedere că $BA-AB=-A$, obținem $A^{k+1}B-BA^{k+1}=(k+1)A^{k+1}$. Prin urmare, $P(k+1)$ este adevărată. **25.** b) Se demonstrează prin inducție. c) Fie S_n suma elementelor matricei A^n. Demonstrăm prin inducție propoziția $P(n)$: $S_n=n+3$, $n\in\mathbb{N}^*$. Evident, $P(1)$ și $P(2)$ sunt adevărate. Dacă presupunem $P(k-2)$, $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 3$, adevărată, atunci, din relația $A^k-A^{k-2}=A^2-I_3$ rezultă că $S_k-S_{k-2}=S_k-3$ sau $S_k=(k+1)+5-3=k+3$, deci $P(k)$ este adevărată (*q.e.d.*).

Scanned with OKEN Scanner

3.3. Determinanți

1. Cum $A^2 = 5A$, avem $A^3 = 25A$, deci $I_2 + A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 125 & -62 \\ -62 & 32 \end{pmatrix}$, de unde rezultă că $\det(I_2 + A + A^2 + A^3) = 156$. **2.** $x \in \{1, 8\}$. **3.** $\det(XX^t) = \det(X)\det(X^t) = (\det(X))^2 = (ad - bc)^2$. **4.** b) 2007. c) 2007^2. **5.** a) Deoarece $\det(A) = z\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + |w|^2$, iar $\det(A) = 0$, rezultă că $|z| = |w| = 0$, deci $z = w = 0$. Drept urmare, $A = O_2$. b) Din relația $A \cdot B = O_2$ obținem $\det(A \cdot B) = 0$ sau $\det(A) \cdot \det(B) = 0$. De aici, deducem că $\det(A) = 0$, sau $\det(B) = 0$, deci, conform punctului a), $A = O_2$ sau $B = O_2$. **6.** $\Delta_1 = 24$, $\Delta_2 = -90$, $\Delta_3 = 22$. **7.** $\det(A - A^t) = 0$. **8.** $x \in \{-1, 3\}$. **9.** Se aplică regula triunghiului sau regula Sarrus. **10.** $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$. **11.** $\Delta_1 = 160$, $\Delta_2 = 4$.

12. a) Avem $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2 - aL_1 \\ L_3 - aL_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_4 - aL_3 \\ L_3 - aL_2 \\ L_2 - aL_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(d-b)(d-c)(c-b)$. **13.** a) 96. b) $a \in \{1, 3\}$. c) $x \in \{0, 1\}$. **14.** a) $n!$. b) $[x + (n-1)a](x-a)^{n-1}$. **15.** a) Evident, $\det(\bar{A}) = \bar{a} \cdot \bar{d} - \bar{b} \cdot \bar{c} = \overline{ad - bc} = \overline{\det(A)}$. b) Avem $\det(A \cdot \bar{A}) = \det(A) \cdot \det(\bar{A}) = \det(A) \cdot \overline{\det(A)} = |\det(A)|^2 \in \mathbb{R}$.; c) $AB = BA$, rezultă că $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$, deci $\det(A^2 + B^2) = \det(A + iB) \cdot \det(A - iB) = \det(A + iB) \cdot \det(\overline{A + iB}) = \det(A + iB) \cdot \overline{\det(A + iB)} = |\det(A + iB)|^2 \geq 0$. **16.** a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} d & e \\ f & g \end{pmatrix}$. Se arată că $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(ad - bc + dg - ef) = 2 \cdot (\det(A) + \det(B))$. b) Presupunem, prin reducere la absurd, că $\det(A + B) > \det(A) + \det(B)$ și $\det(A - B) > \det(A) + \det(B)$. Adunând aceste relații, obținem $\det(A + B) + \det(A - B) > 2(\det(A) + \det(B))$, ceea ce contrazice rezultatul demonstrat la punctul a). **17.** a) Se efectuează calculele. b) Rezultă din punctul a), observând că $\text{tr}(A) = 2$ și $\det(A) = -1$. **18.** a) $\det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-x)(d-x) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc$. b) Deoarece $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, are loc egalitatea $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$ și cum $A^2 = O_2$, $\det(A) = 0$, rezultă că $\text{tr}(A) = a + d = 0$; c) Conform punctului b), din egalitatea $A^2 = O_2$ rezultă că $\det(A) = ad - bc = 0$ și $\text{tr}(A) = a + d = 0$. Drept urmare, din relația de la punctul a) deducem că $\det(A - xI_2) = x^2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, de unde, pentru $x = -2$, obținem $\det(A + 2I_2) = 4$. **20.** a) Se folosește următoarea proprietate: dacă matricea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se obține din $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ prin înmulțirea unei linii (coloane) cu $\lambda \in \mathbb{C}$, atunci $\det B = \lambda \det A$. Astfel, avem $\det(\lambda X) = \begin{vmatrix} \lambda x_{11} & \lambda x_{12} & \lambda x_{13} \\ \lambda x_{21} & \lambda x_{22} & \lambda x_{23} \\ \lambda x_{31} & \lambda x_{32} & \lambda x_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_{11} & \lambda x_{12} & \lambda x_{13} \\ x_{21} & \lambda x_{22} & \lambda x_{23} \\ x_{31} & \lambda x_{32} & \lambda x_{33} \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \lambda x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & \lambda x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & \lambda x_{33} \end{vmatrix} = \lambda^3 \det X$. b) Evident, $-(A - A^t)^t = -(A^t - A) = A - A^t$. Dacă notăm cu B matricea $A - A^t$,

Scanned with OKEN Scanner

avem $\det(B) = \det(B') = \det(A - A')' = \det((-1)(A - A')) = (-1)^3\det(A - A') = -\det(B)$, deci $\det(B) = 0$. **21.** c) Fie $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, $C(c, f(c))$ trei puncte din plan cu $a, b, c \in \mathbb{N}$; $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta_2| = \frac{1}{2}|\Delta_1| = \frac{1}{2}\cdot|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)|$. Cum cel puțin două dintre numerele a, b, c au aceeași paritate, diferența lor se divide cu 2 și deci $2 \mid \Delta_1$. Să arătăm acum că $3 \mid \Delta_1$. Dacă două dintre numerele a, b, c dau același rest la împărțirea cu 3, atunci 3 divide diferența lor și $3 \mid \Delta_1$. În caz contrar, rezultă că a, b, c dau resturi diferite la împărțirea cu 3 și atunci $3 \mid a+b+c$, deci $3 \mid \Delta_1$. Prin urmare, $6 \mid \Delta_1$, ceea ce înseamnă că $\mathcal{A}_{ABC}$ este număr natural, divizibil cu 3. **22.** Evident, $\mathcal{A}_{[ABC]} = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -50$, deci $\mathcal{A}_{[ABC]} = 25$. **23.** Întrucât $\mathcal{A}_{[ABC]} = (m-1)^2 + 1$, rezultă că $\mathcal{A}_{[ABC]}$ este minimă dacă și numai dacă $m = 1$. **24.** $\mathcal{A}_{[ABCD]} = \mathcal{A}_{[ABC]} + \mathcal{A}_{[ADC]} = \frac{15}{2} + \frac{3}{2} = 9$. **25.** Se arată că $\mathcal{A}_{[ABC]} = 0$. **26.** $a = 3$. **27.** a) $3x - 2y + 5 = 0$. b) $m = -3$. **28.** a) $3x - 4y + 7 = 0$. b) $C_1\left(-\frac{17}{3}, 0\right)$, $C_2(1, 0)$. **29.** b) Evident, $\det M = \pm 2S_{ABC} = \pm 1$.

3.4. Inversa unei matrice. Ecuații matriceale

1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -5 & 4 & 7 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **2.** $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **3.** $x = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

5. a) $B^3 = I_3$. b) $B^{-1} = B^2$. **6.** b) Deoarece $BC = (I_3 + A)\left(I_3 - \frac{1}{11}A\right) = I_3 - \frac{1}{11}A + A - \frac{1}{11}A^2 = I_3 - \frac{1}{11}A + A - \frac{10}{11}A = I_3 - A + A = I_3$, rezultă că B este inversabilă și C este inversa ei. **7.** a) Se efectuează calculele. b) Dacă $A \neq O_4$, atunci cel puțin unul dintre numerele a, b, c, d este nenul, deci $\alpha \neq 0$. Prin urmare, relația de la punctul a) este echivalentă cu $A\cdot\left(\frac{1}{\alpha}A'\right) = I_4$, de unde rezultă că A este inversabilă și $A^{-1} = \frac{1}{\alpha}A'$ (am avut în vedere că inversa unei matrice, dacă există, este unică). **8.** b) Fie $X(a) \in G$. Căutăm $X(t) \in G$ astfel încât $X(a)\cdot X(t) = X(t)\cdot X(a) = I_2$. Conform punctului a), relația precedentă este echivalentă cu $X(at + a + t) = X(0)$ sau $at + a + t = 0$, deci $t = \frac{-a}{a+1}$. Așadar, $X(a)$ este inversabilă și $(X(a))^{-1} = X\left(\frac{-a}{a+1}\right) \in G$, căci $\frac{-a}{a+1} \neq -1$. **9.** a) $\det(A) = 3m^2 + m - 1$; b) Deoarece A este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dacă și numai dacă $\det(A) \neq 0$, rezultă că $m \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}\right\}$; c) Egalitatea $A^{-1} = A^*$ este echivalentă cu $\det A = 1$, deci $m \in \left\{-1, \frac{2}{3}\right\}$. **10.** Din $A^2 = O_2$ deducem că $A^2 - I_2 = -I_2$ sau

Scanned with OKEN Scanner

$(A - I_2)(A + I_2) = -I_2$, de unde rezultă că $A - I_2$ și $A + I_2$ sunt inversabile. **11.** $X = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. **12.** Matricele A și B sunt inversabile și $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, iar $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Deci, soluția ecuației este $X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **13.** Avem $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $X = BA^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. **14.** Matricea A este inversabilă și $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Deci ecuația $A(X + B) = C$ este echivalentă cu $X + B = A^{-1}C$ sau $X = A^{-1}C - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. **15.** b) Din egalitatea $A^2 = I_3$ deducem că $A^{-1} = A$. Drept urmare, ecuația considerată este echivalentă cu $2AX = B$ sau $X = \frac{1}{2}A^{-1}B = \frac{1}{2}AB = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix}$. **16.** Observăm, mai întâi, că $\det A = -1 \neq 0$, deci A este matrice inversabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Fie $X_1, X_2 \in \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $f(X_1) = f(X_2)$. Atunci $AX_1 = AX_2$, de unde rezultă că $A^{-1}(AX_1) = A^{-1}(AX_2)$ sau $X_1 = X_2$. Așadar, f este injectivă. Funcția f este surjectivă, pentru că oricare ar fi $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, există $X = A^{-1}Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $f(X) = AX = A(A^{-1}Y) = Y$. Prin urmare, f este bijectivă. **17.** Din relația $A \cdot A^{-1} = I_3$ deducem că $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ sau $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. Pe de altă parte, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^*$, deci $\det(A^{-1}) = \left(\frac{1}{\det(A)}\right)^3 \cdot \det(A^*)$. Prin urmare, $\frac{1}{\det(A)} = \left(\frac{1}{\det(A)}\right)^3 \cdot \det(A^*)$, de unde rezultă că $\det(A^*) = (\det(A))^2$. **18.** a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \notin M$. b) Fie $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$ o matrice inversabilă și $B^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M$ inversa ei. Din relația $B \cdot B^{-1} = I_2$ obținem sistemul $\begin{cases} ax + bz = 1 \\ ay + bt = 0 \\ cx + dz = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}$. Cum $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, din $ay + bt = 0 = cx + dz$ rezultă că $ay = bt = cx = dz = 0$. Dacă $a = 0$, atunci $b = z = 1$ (căci $ax + bz = 1$), deci $t = 0$ (din $bt = 0$), $d = 0$ (din $dz = 0$) și $c = y = 1$ (pentru că $cy + dt = 1$), $x = 0$. Drept urmare, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dacă $a \neq 0$, atunci $y = 0$ și, analog, găsim $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **19.** Căutăm $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $B = xI_3 + yJ$ să verifice condiția $AB = BA = I_3$. Cum $J^2 = 3J$, avem $(aI_3 + bJ)(xI_3 + yJ) = axI_3 + ayJ + bxJ + byJ^2 = axI_3 + (ay + bx + 3by)J$. Astfel, egalitatea $A \cdot B = I_3$ este echivalentă cu $axI_3 + (bx + y(a + 3b))J = I_3$ sau $(bx + y(a + 3b))J = (1 - ax)I_3$, de unde rezultă că $\begin{cases} ax = 1 \\ bx + y(a+3b) = 0 \end{cases}$, deci $x = \frac{1}{a}$ și $y = \frac{-b}{a(a+3b)}$. Evident, pentru aceste valori ale necunoscutelor x, y este adevărată relația $AB = BA = I_3$, ceea ce înseamnă că A este

Scanned with OKEN Scanner

inversabilă și $A^{-1} = B = \frac{1}{a} I_3 - \frac{b}{a(a+3b)} J$. **20.** a) Dacă $A \in H$, atunci A este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ (căci $\det(A) \in \mathbb{Q}^*$) și $A^2 + A - A^{-1} = O_3$. Înmulțind această egalitate cu A, obținem $A^3 + A^2 - I_3 = O_3$. b) Fie $A \in H$. Conform punctului a), avem $A^3 = I_3 - A^2$, de unde rezultă că $\det(I_3 + A) \cdot \det(I_3 - A) = \det(A^3) = (\det(A))^3 \neq 0$, deci $\det(I_3 + A)$, $\det(I_3 - A) \in \mathbb{Q}^*$ (pentru că $I_3 + A, I_3 - A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$). Așadar, $A + I_3$ și $A - I_3$ sunt inversabile în $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$.

3.5. Rangul unei matrice

1. $\text{rang}(A) = 2$, $\text{rang}(B) = 2$, $\text{rang}(C) = 3$. **2.** $\text{rang}(I_3 + A) = 3$, $\text{rang}(I_3 + A + A^t) = 1$. **3.** $x = -1$, $y = 2$. **4.** Se arată cu ușurință că $\det(A) = (m+2)(m-1)^2$. Dacă $m \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$, atunci $\text{rang}(A) = 3$. Pentru $m = -2$, obținem $\text{rang}(A) = 2$, iar pentru $m = 1$, avem $\text{rang}(A) = 1$. **5.** Deoarece $\begin{vmatrix} b & b+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, rezultă că $\text{rang}(A) \geq 2$. **6.** Remarcăm faptul că toți minorii de ordinul al doilea au coloane proporționale, deci sunt egali cu 0. Așadar, $\text{rang}(A) = 1$ (căci A are elemente nenule). **7.** b) Se arată, prin inducție, că $A^n = 32^{n-1} A$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Astfel, rezultă că $\text{rang}(A^n) = \text{rang}(A) = 1$. **8.** Deoarece $\det(A) = (m-1)^2$, rezultă că $\text{rang}(A) = 3$, oricare ar fi $m \in \mathbb{R} - \{1\}$. Pentru $m = 1$, $\text{rang}(A) = 1$. Deci $\text{rang}(A) \neq 2$, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$. **9.** Se arată ușor că $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = 1$ și $\text{rang}(A + B) = 2$. **10.** Pentru $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avem $A^2 = O_2$, deci $\text{rang}(A) = 1$ și $\text{rang}(A^2) = 0$. **11.** b) Observăm că $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ și $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$, deci $\text{rang}(M) = 2$. c) Dacă unul dintre minorii de ordin trei ai lui M, care conține ultima coloană, este 0, atunci punctul $D(a, b)$ este coliniar cu două dintre punctele A, B, C. De aici, având în vedere că A, B, C sunt coliniare, rezultă că A, B, C, D sunt puncte coliniare, deci toți minorii de ordin trei ai matricei M sunt nuli. Drept urmare, $\text{rang}(M) = 2$, căci $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. **12.** Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, astfel încât $A \neq A^t$. Deoarece

$$A - A^t = \begin{pmatrix} 0 & b-d & c-g \\ d-b & 0 & f-h \\ g-c & h-f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix},$$

rezultă că $\det(A - A^t) = 0$, deci $\text{rang}(A) \leq 2$. Remarcăm faptul că minorii de ordinul al doilea: $\begin{vmatrix} 0 & b-d \\ d-b & 0 \end{vmatrix} = (b-d)^2$, $\begin{vmatrix} 0 & c-g \\ g-c & 0 \end{vmatrix} = (c-g)^2$, $\begin{vmatrix} 0 & f-h \\ h-f & 0 \end{vmatrix} = (f-h)^2$ nu pot fi simultan 0, pentru că în acest caz am avea $A = A^t$. Prin urmare, $\text{rang}(A - A^t) = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

3.6. Sisteme de ecuații liniare

1. $x = 6, y = 4, z = 6$. **2.** $(x, y, z) \in \{(1 - 3\lambda, 0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. **3.** Sistemul este incompatibil. **4.** $S = \{(0, \lambda, 1 - 2\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. **5.** Deoarece determinantul matricei sistemului, Δ, este egal cu -8, putem aplica regula lui Cramer. Astfel, obținem $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{1}{2}$, $z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{1}{2}$ și $\frac{\Delta t}{\Delta} = \frac{1}{2}$. **6.** Cum sistemul considerat este liniar omogen, iar $\Delta \neq 0$, rezultă că singura soluție este cea banală $x = y = z = 0$. **7.** $m = \frac{2}{7}$. **8.** a) $\det(A) = (a - b)(b - c)(c - a)$. b) Deoarece sistemul este liniar și omogen, iar $\det(A) \neq 0$, rezultă că avem numai soluția banală $x = y = z = 0$. c) $S = \{(\lambda, -\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. **9.** Sistemul considerat este echivalent cu următorul sistem liniar și omogen: (*) $\begin{cases} (2a-1)x + 2by + 2cz = 0 \\ 2cx + (2a-1)y + 2bz = 0 \\ 2bx + 2cy + (2a-1)z = 0 \end{cases}$. Determinantul matricei sistemului (*) este $\Delta = \begin{vmatrix} 2a-1 & 2b & 2c \\ 2c & 2a-1 & 2b \\ 2b & 2c & 2a-1 \end{vmatrix}$. Acesta, dezvoltat după regula triunghiului, dă o sumă de 5 termeni pari și unul impar, deci este nenul, ceea ce înseamnă că sistemul este compatibil determinat, soluția sa fiind $x = y = z = 0$. **10.** Deoarece $\Delta = \det(A) = a^2 + 1 \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat. Conform regulii lui Cramer, avem $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{1}{a^2+1}$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{a}{a^2+1}$, $z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{a^2}{a^2+1}$. Evident, x, y, z sunt în progresie geometrică cu rația a. **11.** $m = -1$. **12.** b) $x = 0, y = 0, z = 1$. c) Dacă $a = -2$, atunci mulțimea soluțiilor sistemului S este $\{(\lambda - 1, \lambda - 1, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, iar dacă $a = 1$, atunci $S = \{(1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. **13.** a) $m \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. b) $m \in \{0, 1\}$. **14.** a) $m \in \{1, 2\}$. b) Dacă $m \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$, atunci sistemul este de tip Cramer, deci este compatibil (determinat). Pentru $m = 1$, avem $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$. Rangul matricei A este 2 și $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ este un minor principal. Există un singur minor caracteristic: $\Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, deci, conform teoremei lui Rouché, sistemul este compatibil. Dacă $m = 2$, atunci $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right)$. Rangul matricei A este 2 și $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ este un minor principal. Avem un singur

Scanned with OKEN Scanner

minor caracteristic: $\Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Aşadar, sistemul este compatibil (teorema lui Rouché). c) Înlocuind pe $z_0 = 2$, obţinem $\begin{cases} x_0 + y_0 = -2 \\ mx_0 + y_0 = m-3 \\ x_0 + my_0 = -5 \end{cases}$. Cum $x_0 = -y_0 - 2$, rezultă că $\begin{cases} -my_0 - 2m + y_0 = m-3 \\ -y_0 - 2 + my_0 = -5 \end{cases}$, de unde, prin adunare, deducem că $-2m - 2 = m - 8$, deci $m = 2$. **15.** a) Determinantul matricei sistemului este $\Delta = 2(1-m)$, deci sistemul are soluţie unică dacă şi numai dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. b) După cum am văzut la punctul a), pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, sistemul este compatibil determinat. Dacă $m = 1$, sistemul este compatibil simplu nedeterminat. c) Deoarece $S_1 = \{(t, 1, 2-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, avem $x^2 + y^2 + z^2 = 2t^2 - 4t + 5 = 2(t^2 - 2t + 1) + 3 = 2(t-1)^2 + 3$, de unde rezultă că minimul căutat este 3. **16.** a) $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$. b) $m = 1$. c) Dacă $m = 1$, mulţimea soluţiilor sistemului este $S = \{(\lambda, 1-\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Soluţiile căutate se obţin pentru acele valori ale parametrului λ care verifică egalitatea $2\lambda^2 - (1-\lambda)^2 = 14$, adică $\lambda \in \{-5, 3\}$. Deci $(x, y, z) \in \{(-5, 6, 0), (3, -2, 0)\}$. **17.** Deoarece $\Delta = \det(A) = (m-1)^2 \neq 0$, soluţia sistemului este $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{m+2}{m-1} = 1 + \frac{3}{m-1}$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = 0$, $z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-3}{m-1}$. Cerinţa enunţului este îndeplinită dacă şi numai dacă $(m-1) \mid 3$, adică $m \in \{-2, 0, 2, 4\}$. **18.** a) $m = 1$. b) Pentru $m = 1$, Δ_p este minor principal şi, cum $\Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, rezultă că sistemul este incompatibil. Pentru $m \neq 1$, sistemul este compatibil determinat, având soluţia $\left(\frac{-1}{m-1}, 1, \frac{-m}{m-1}\right)$. Condiţia $x + y + z = 4$ este echivalentă cu $m = \frac{1}{2}$. c) $m \in \{0, 2\}$. **19.** a) Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Observăm că rang $A = 3$ şi $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ este un minor principal. Cum nu există minori caracteristici, rezultă că sistemul este compatibil. b) Sistemul este compatibil simplu nedeterminat cu x_4 necunoscută secundară. Fie $x_4 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Soluţia sistemului este $x_1 = = \frac{1+a-b-2t}{2}$, $x_2 = \frac{1-a-b-2t}{2}$, $x_3 = b + t$, $x_4 = t$. Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 şi $x_1 + x_2$ sunt în progresie aritmetică cu raţia r, atunci $x_4 - x_3 = x_2 - x_1 = r$, deci $r = -a = -b$. Din condiţia $(x_1 + x_2) - x_4 = r$ se obţine $r = \frac{1}{3}$ şi apoi din relaţia $x_3 - x_2 = r$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă că $a=b=-\frac{1}{18}$. c) Dacă $x_4>0$, atunci $t>0$. Cum $x_2=1-a-b-2t>0$, obținem $1-a-b>0$, deci $a+b<1$.

20. a) $n\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$. b) $m=1, n=3$. **21.** a) $x=\frac{4}{5}, y=\frac{3}{5}, z=0$. b) Determinantul matricei sistemului este $\Delta=-2abc\neq 0$.

c) Rezolvând sistemul obținem $x_0=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos A\in(-1,1)$. Analog arătăm că $y_0, z_0\in(-1,1)$. **22.** a) Scădem prima coloană din celelalte două, apoi scoatem factor $b-a$ de pe a doua coloană și $c-a$ de pe a treia coloană etc. b) Deoarece $\Delta_x=c-b, \Delta_y=a-c, \Delta_z=b-a$ și $\Delta=\det(A)\neq 0$, rezultă că $x=\frac{\Delta x}{\Delta}$, $y=\frac{\Delta y}{\Delta}, z=\frac{\Delta z}{\Delta}$. c) Observăm că rang $A=2$ și rang $\overline{A}=3$. Conform teoremei Kronecker–Capelli, sistemul este incompatibil. **23.** a) $a=4$. b) Dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$, atunci sistemul este compatibil determinat. Dacă $a=4$, atunci rang$(A)=2$ și $\Delta_p=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}$ este un minor principal. Pentru ca sistemul să fie compatibil trebuie ca minorul caracteristic să fie nenul: $\Delta_C=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 7 & -1 & b\end{vmatrix}\neq 0$. Deci $a=4$ și $b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$. **24.** a) $a=2, b=0$. b) $a=4, b\neq -2$. **25.** a) Cerința din enunț este satisfăcută dacă și numai dacă sistemul (*) $\begin{cases}2x-3y=-1\\ x+9y=3\\ 5x-6y=p\end{cases}$ are soluție. Rangul matricei sistemului (*) este 2 și $\Delta_p=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 9\end{vmatrix}$ este un minor principal. Sistemul (*) este compatibil dacă și numai dacă minorul caracteristic $\Delta_C=\begin{vmatrix}2 & -3 & -1\\ 1 & 9 & 3\\ 5 & -6 & p\end{vmatrix}$ se anulează, adică $p=-2$. b) $m=2, n=-12, p=-2$.

3.7. Probleme de sinteză – algebră

1. b) $A^2=O_4$. b) Din relația de la punctul a) deducem că $B(2I_4-B)=I_4$ sau $B(I_4-A)=I_4$, de unde rezultă că B este inversabilă și $B^{-1}=I_4-A$. c) Deoarece $A^n=O_4$, oricare ar fi $n\geq 2$, rezultă că $B^n=(A+I_4)^n=A^n+C_n^1A^{n-1}+$ $+C_n^2A^{n-2}+\ldots+C_n^{n-1}A+I_4=nA+I_4$. **2.** b) Deoarece $\det(A)\neq 0$, înseamnă că matricea A este inversabilă. Dacă $f(X)=f(Y)$, atunci $AX=AY$ sau $A^{-1}(AX)=A^{-1}(AY)$, de unde rezultă că $X=Y$. Așadar, f este injectivă. c) Dacă $\det(A)\in\{-1,1\}$, avem $A^{-1}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Atunci, pentru orice $Y\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$ există $X=A^{-1}Y\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{Z})$, astfel încât $f(X)=Y$. Prin urmare, f este surjectivă și, cum f este și injectivă, înseamnă că este bijectivă. **3.** a) $\det(A)=0$, rang$(A)=2$. b) Mulțimea soluțiilor sistemului este $S=\{(\lambda,-2\lambda,\lambda)\mid\lambda\in\mathbb{C}\}$; c) Cum $\det(A^n)=0$ și $\det(I_3)=1$, rezultă că $A^n\neq I_3$; **4.** a) Se aplică formula pentru determinantul Vandermonde de ordinul trei (vezi cap. 3.3.). b) Deoarece

Scanned with OKEN Scanner

$f(x) = (x-b)(x-c)(x-d) + (x-a)(x-c)(x-d) + (x-a)(x-b)(x-d) + (x-a)(x-b)(x-c)$, rezultă că $f(a) = (a-b)(a-c)(a-d)$. La ultima linie se adună primele două linii înmulțite cu -1; c) Dezvoltând determinantul A după ultima linie, obținem: $-g(a)(d-b)(d-c)(c-b) + g(b)(d-a)(d-c)(c-a) - g(c)(d-a)(d-b)(b-a) + g(d)(c-a)(c-b)(b-a) = A = \Delta = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$, de unde, împărțind cu $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$, deducem că $\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} + \frac{g(d)}{f'(d)} = 1$. **5.** a) Cum $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3\cdot 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ și $2^2 - 3\cdot 1^2 = 1$, rezultă că $X \in G$. b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \in G$ și $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 3d & c \end{pmatrix} \in G$. Deci $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ și $a^2 - 3b^2 = 1$, $c^2 - 3d^2 = 1$. Avem $AB = \begin{pmatrix} ac+3bd & ad+bc \\ 3(ad+bc) & ac+3bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 3\beta & \alpha \end{pmatrix}$, unde $\alpha = ac + 3bd$ și $\beta = ad + bc$. Întrucât $\alpha^2 - 3\beta^2 = (a^2 - 3b^2)(c^2 - 3d^2) = 1$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, rezultă că $AB \in G$. c) Se arată prin inducție că $B^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 3b_n & a_n \end{pmatrix}$, cu $a_n > 0$, $b_n > 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Astfel, deducem că $B^n \neq I_2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$; $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in G$, deci $X^n \in G$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ (conform punctului b)). Cum $X^i \neq X^j$, oricare ar fi $i, j \in \mathbb{N}^*$, $i < j$ (căci, în caz contrar, $X^{j-i} = I_2$, fals), rezultă că mulțimea G este infinită. **6.** a) Avem $\det(A) = 0$ și $\operatorname{rang}(A) = 2$. b) Soluțiile ecuației $f(x) = 0$ sunt $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ și $x_3 = -5$. c) Condiția din enunț este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+2b+3c=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases}$, a cărui soluție este $(\lambda, -2\lambda, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Putem alege $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. **7.** a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in G$. Deoarece $A + B = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}$ și $AB = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$, rezultă că $A + B$ și AB aparțin mulțimii G. b) Fie $A \in U(G)$. Din relația $A \cdot A^{-1} = I_2$ deducem că $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$, deci $\det(A) = \pm 1$ (căci $\det(A), \det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$). Cum $\det(A) = a^2 + b^2 \geq 0$, înseamnă că $\det(A) = 1$. c) Dacă $A \in U(G)$, atunci, conform punctului d), rezultă că $\det(A) = a^2 + b^2 = 1$, deci $(a, b) \in \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$. În fiecare dintre aceste cazuri obținem $A^4 = I_2$. **8.** a) Dacă $Y = \begin{pmatrix} a & m & n \\ b & p & q \\ c & r & s \end{pmatrix}$, atunci egalitatea $AY = YA$ este echivalentă cu $\begin{pmatrix} m & n & 0 \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & m & n \\ b & p & q \end{pmatrix}$, de unde rezultă că $m = n = q = 0$, $p = a$, $q = m$, $r = b$, $s = p$, deci $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$. b) Cum $\det(Z) = 0$ și $\det(Z) = a^3$, rezultă că $a = 0$. Deci, $Z^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix}^3 = O_3$. c) Să presupunem că există $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $X^3 = A$. În acest caz,

Scanned with OKEN Scanner

$AX = X^4$ și $XA = X^4$, deci $AX = XA$. Conform punctului b), rezultă că $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$. Cum $\det(X^3) = \det A = 0$, înseamnă că $\det(X) = 0$, deci $X^3 = O_3$ (conform punctului b)), ceea ce implică $O_3 = A$, fals. **9.** a) Se efectuează calculele (este relația lui Cayley–Hamilton). c) Deoarece $f \in \mathbb{Q}[X]$ și $x_1 = \sqrt{5}$ este o rădăcină, rezultă că $x_2 = -\sqrt{5}$ este cea de-a doua rădăcină a lui f, deci $x_1 + x_2 = 0 = a + d$ și $x_1x_2 = -5 = ad - bc$. d) Conform punctului b), avem $\det(A^2 - 5I_2) = \det(A - \sqrt{5}I_2)\det(A + \sqrt{5}I_2) = 0$, deci $\det(A - \sqrt{5}I_2) = 0$ sau $\det(A + \sqrt{5}I_2) = 0$. Dacă $\det(A - \sqrt{5}I_2) = 0$, atunci $\begin{vmatrix} a - \sqrt{5} & b \\ c & d - \sqrt{5} \end{vmatrix} = 0$ sau $ad - bc + 5 = \sqrt{5}(a + d)$. Pentru $a + d \neq 0$, obținem $\sqrt{5} = \frac{ad - bc + 5}{a + d} \in \mathbb{Q}$, fals. Deci $a + d = 0$ și $ad - bc = -5$, de unde, având în vedere relația lui Cayley, deducem că $A^2 = 5I_2$. Dacă $\det(A + \sqrt{5}I_2) = 0$, raționăm analog. **10.** a) Din relația $A^2 = I_3$ deducem că A este inversabilă și $A^{-1} = A$. b) Deoarece $A^2 = I_2$, rezultă că $A^{2k} = I_2$ și $A^{2k+1} = A$ ($k \in \mathbb{N}^*$), deci $X = (A + A^3 + \ldots + A^{2003}) + (A^2 + A^4 + \ldots + A^{2004}) = 1002A + 1002 \cdot I_3$. Așadar, $\det(X) = 1002^3 \det(A + I_3) = 0$. c) Demonstrăm, prin inducție, propoziția $P(n)$: $(AB)^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & 0 \\ c_n & d_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{N}^*$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Este clar că $P(1)$ este adevărată. Presupunem $P(k)$ adevărată pentru un $k \in \mathbb{N}^*$. Cum $(AB)^{k+1} = (AB)^k(AB) = \begin{pmatrix} a_k & b_k & 0 \\ c_k & d_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k + b_k & a_k + 2b_k & 0 \\ c_k + d_k & c_k + 2d_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, rezultă că $P(k + 1)$ este adevărată. Așadar, $(AB)^n \neq I_3$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. **11.** a) $X = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. b) Căutăm $D = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $D \neq O_2$, astfel încât $A \cdot D = D \cdot A = O_2$. Avem $x + 2z = 0$, $y + 2t = 0$, $x + 2y = 0$ și $z + 2t = 0$, de unde rezultă că $x = 4t$, $y = -2t$, $z = -2t$, deci $D = \begin{pmatrix} 4t & -2t \\ -2t & t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{C}^*$. c) Dacă $AX = XA = O_2$, atunci $(A + X)^n = C_n^0A^n + C_n^1A^{n-1}X + C_n^2A^{n-2}X^2 + \ldots + C_n^{n-1}AX^{n-1} + C_n^nX^n = A^n + O_2 + O_2 + \ldots + O_2 + X^n = A^n + X^n$. **12.** a) Cum $B \cdot \left(I_3 - \frac{1}{11}A\right) = (I_3 + A)\left(I_3 - \frac{1}{11}A\right) = I_3 + \frac{10}{11}A - \frac{1}{11}A^2 = I_3$, rezultă că B este inversabilă și $B^{-1} = I_3 - \frac{1}{11}A$. b) $U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. c) Se știe că $\operatorname{rang}(X + Y) \leq \operatorname{rang}(X) + \operatorname{rang}(Y)$, oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă ar exista două matrice $C, D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $\operatorname{rang}(C) = \operatorname{rang}(D) = 1$, astfel încât $C + D = B$, atunci $3 = \operatorname{rang}(B) = \operatorname{rang}(C + D) \leq \operatorname{rang}(C) + \operatorname{rang}(D) = 2$, ceea ce este fals. Deci $C + D \neq B$. **13.** a) Cum $O_2^2 = O_2$ și $J^2 = O_2$, rezultă că O_2 și J sunt nilpotente. Deoarece $\det(K) = 0$, înseamnă că matricea K nu este inversabilă. Prin

Scanned with OKEN Scanner

inducție, deducem egalitatea $K^n = K$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, deci K nu este nilpotentă. c) Fie $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice nilpotentă ($B^n = O_2$, $n \in \mathbb{N}^*$). Atunci $\det(B) = 0$ și deci $B^2 - \text{tr}(B) \cdot B = O_2$ sau $B^2 = tB$ (unde $t = \text{tr}(B)$). De aici deducem că $B^n = t^{n-1}B$. Cum $B^n = O_2$, rezultă că $B = O_2$ sau $t = 0$, ceea ce implică $B^2 = O_2$. **14.** a) $J^2 = O_2$; Putem lua $M = J$, pentru că $\text{rang}(J) = 1$ și $\text{rang}(J^2) = \text{rang}(O_2) = 0$. b) Dacă B este inversabilă, atunci $\det(B) \neq 0$, deci și $\det(B^n) = (\det(B))^n \neq 0$, ceea ce înseamnă că B^n este inversabilă; Dacă $C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ nu este inversabilă, atunci $\det(C) = 0$, deci $C^2 - tC = O_2$, unde $t = \text{tr}(C) = p + s$ (Cayley–Hamilton). Plecând de la egalitatea $C^2 = tC$, se arată ușor că $C^n = t^{n-1}C$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. c) Studiem trei cazuri: I. Dacă $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^2) = 0$, atunci $D = O_2$, deci $D^n = O_2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, și $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^n) = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. II. Să presupunem $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^2) = 1$. În acest caz, $\det(D) = 0$ și atunci egalitatea $D^2 - \text{tr}(D) \cdot D + \det(D)I_2 = O_2$ devine $D^2 = tD$, unde $t = \text{tr}(D)$. Având în vedere că $D^2 = tD$, deducem, prin inducție, că $D^n = t^{n-1}D$, $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^2) = 1$, rezultă că $D \neq O_2$ și $D^2 \neq O_2$, deci $t \neq 0$ și $D^n \neq O_2$. Drept urmare, $\text{rang}(D^n) = 1$, căci $\text{rang}(D^n) \neq 0$ ($D^n \neq O_2$ și $\det(D^n) = 0$), ceea ce implică $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^n) = 1$. III. Dacă verifică $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^2) = 2$, atunci $\det(D) \neq 0$, deci $\det(D^n) \neq 0$, de unde rezultă că $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^n) = 2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. **15.** b) $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in M$. c) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice inversabilă și $M^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M$. Din relația $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = I_2$ rezultă că $\begin{cases} ax + bz = 1 \\ ay + bt = 0 \\ cx + dz = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}$. De aici deducem că $ay = bt = cx = dz = 0$. I. Pentru $a = 0$, obținem succesiv: $b = z = 1$ (căci $ax + bz = 1$), $t = d = 0$ (deoarece $bt = dz = 0$), $c = y = 1$ (din $cy + dt = 1$), deci $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. II. Dacă $y = 0$, avem: $d = t = 1$ (căci $cy + dt = 1$), $b = z = 0$ (deoarece $bt = dz = 0$), $a = x = 1$ (din $ax + bz = 1$), $c = 0$ din ($cx = 0$), deci $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **16.** b) Evident, $A^{2007} = (A^3)^{669} = (-I_2)^{669} = -I_2$. c) Fie $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Relația $AB = BA$ este echivalentă cu $\begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3t \\ -x-z & -y-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y & 3x-y \\ 2z-t & 3z-t \end{pmatrix}$, de unde rezultă că $y = -3z$ și $x = y + t$, deci $B = \begin{pmatrix} t-3z & -3z \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z & -3z \\ z & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t-z & 0 \\ 0 & t-z \end{pmatrix} = (-z) \cdot A + (t-z)I_2 \in I(A)$. **17.** a) Deoarece $A(x) + A(y) = A(x + y)$ și $x + y \in \mathbb{Z}$, dacă $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, rezultă că $A(x) + A(y) \in M$. Suma considerată este egală cu $A(0) = O_3$. b) Observăm că $A(x) \cdot A(y) = A(2xy)$ și $2xy \in \mathbb{Z}$, dacă $x, y \in \mathbb{Z}$. Deci $A(x) \cdot A(y) \in M$. Cum produsul dintre $A(0) = (O_3)$ și orice altă matrice din M este O_3, rezultă că produsul considerat este O_3. c) $A^{2007}(1) = A(2^{2006})$. **18.** b) $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{100} = A + 5A + 5^2A + \ldots + 5^{99}A = \frac{5^{100} - 1}{4}A$. c) Deoarece $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{100} - A^{101} = \left(\frac{5^{100} - 1}{4} - 5^{100}\right) \cdot A = \frac{-3 \cdot 5^{100} - 1}{4} \cdot A$, rezultă că matricea considerată are toate elementele strict negative.

Scanned with OKEN Scanner

19. a) $(m-1)^2$. b) Dacă $m \neq 1$, atunci rang $A = 3$, iar dacă $m = 1$, atunci rang $A = 1$. c) $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $x = y = z = 0$.

20. a) $-(p+2)(p-1)^2$. b) $p = 1$. c) $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.8. Șiruri

1. a) strict descrescător. b) strict crescător. c) descrescător. d) Avem $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Deci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător. **2.** a) Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit pentru că $0 \leq x_n \leq 2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$; b) Cum $0 < x_n < \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n < 2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit. c) Avem $0 < x_n = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) < 2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Deci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit. d) $x_n > 0$ și $x_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$. Așadar, șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit. **3.** a) Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ conține două subșiruri care au limite diferite: $a_{2n} \to 1$, $a_{2n+1} \to -1$. b) Avem $b_{2n} = 0 \to 0$, $b_{4n+1} = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$. c) Cum $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = +\infty$, rezultă că șirul $(c_n)_{n \geq 1}$ este divergent. d) Șirul $(d_n)_{n \geq 1}$ este divergent pentru că $\lim\limits_{n \to \infty} d_n = -\infty$.

4. a) $\frac{7}{8}$. b) ∞. c) 0. d) -2. e) $\frac{1}{2}$. f) 27. **5.** a) 0. b) $\frac{3}{2}$. c) ∞. d) $-\infty$. e) ∞. f) ∞. **6.** a) 1. b) 0. c) 1. d) 2. e) $\frac{2}{3}$. f) ∞.

7. a) 0. b) $-\frac{1}{2}$. c) $\frac{1}{2}$. d) 0. e) 0. f) $\frac{2}{3}$. **8.** a) $-\infty$. b) $\frac{1}{3}$. c) 1. d) Dacă $a \in (0, 1)$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} d_n = 0$. Pentru $a = 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} d_n = \frac{1}{2}$. Dacă $a > 1$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} d_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^n + 1} = 1$. e) Avem următoarele cazuri: $\lim\limits_{n \to \infty} e_n = \infty$, dacă $a \in (0, 3)$, $\lim\limits_{n \to \infty} e_n = 1$, dacă $a = 3$ și $\lim\limits_{n \to \infty} e_n = 0$, dacă $a > 3$. f) 2. **9.** a) ∞. b) 0. c) 0. d) 0. e) 0. f) ∞ **10.** a) e^2. b) e^3. c) e^2. d) 0. e) $\frac{1}{\sqrt{e}}$. f) 1. **11.** Putem folosi criteriul raportului (Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir cu proprietățile $a_n > 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, și $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Dacă $l < 1$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, iar dacă $l > 1$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$). a) Deoarece $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ și $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1$, rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. b) Analog, obținem $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. c) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

12. a) Cum $-\frac{n}{n^2+1} \le a_n \le \frac{n}{n^2+1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{n^2+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\right) = 0$, rezultă, conform criteriului cleştelui, că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. b) Din relaţia $\frac{nx-1}{n} < \frac{[nx]}{n} \le \frac{nx}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$. c) Deoarece $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le a_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. d) Avem $\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+n} \le a_n \le \frac{1+2+\ldots+n}{n^2+1}$ sau $\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{n^2+n}{2(n^2+1)}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. **13.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{4}$. **14.** a) Putem demonstra prin inducţie sau putem proceda astfel: $a_n = \frac{\sqrt{1\cdot3}\cdot\sqrt{3\cdot5}\cdot\sqrt{5\cdot7}\cdot\ldots\cdot\sqrt{(2n-3)(2n-1)}\cdot\sqrt{2n-1}}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)} \le$

$\le \frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\sqrt{2n-1}}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)} = \frac{\sqrt{2n-1}}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ (căci $\sqrt{1\cdot3} < \frac{1+3}{2} = 2$, $\sqrt{3\cdot5} < \frac{3+5}{2} =$

$= 4,\ldots$). b) Întrucât $0 \le a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. **15.** a) 0. d) 1. **16.** Cum $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) =$

$= \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$, rezultă că limita cerută este 1. **17.** Deoarece $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1)$, rezultă că limita cerută este ∞. **18.** Observăm că $x_n = \ln(n+1)$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, deci $(x_n)_{n\ge1}$ este divergent. **19.** Întrucât $a_n = \ln\frac{n+2}{n}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. **20.** $f(-1) + f(-2) + f(-3) + \ldots + f(-n) + n^2 =$

$= \left(\frac{1}{e^3} + \frac{1}{e^6} + \ldots + \frac{1}{e^{3n}}\right) - 2(1 + 2 + \ldots + n) + n + n^2 = \frac{1}{e^3-1}\cdot\left(1-\frac{1}{e^{3n}}\right)$, deci limita cerută este $\frac{1}{e^3-1}$.

21. Întrucât $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$, avem $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right) =$

$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty}(f(1) + f(2) + \ldots + f(n))^{n^2} = e^{-1}$. **22.** a) Evident, $\frac{x^3-1}{x^3+1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} =$

$= \frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{f(x+1)}{f(x)}$. b) Conform punctului a), avem $a_n = \frac{1}{3}\cdot\frac{f(3)}{f(2)}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{f(4)}{f(3)}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{f(n+1)}{f(n)} =$

$= \frac{1\cdot2\cdot f(n+1)}{n(n+1)\cdot f(2)} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$. c) Având în vedere rezultatul de la punctul b), obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3a_n}{2}\right)^{n^2} = e$. **23.** Cum $c = -a - b$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(a\sqrt{n+2} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) +\right.$

Scanned with OKEN Scanner

$+ b(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\Big) = 0 + 0 = 0$. **24.** Deoarece $x_n = \dfrac{2n^a}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} = \dfrac{2n^{a-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, pentru $a < \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, pentru $a = \dfrac{1}{2}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, dacă $a > \dfrac{1}{2}$. **25.** Deoarece $a_n = n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-a\right) + b$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, dacă $a \neq 1$. Dacă $a = 1$, atunci $a_n = \sqrt{n^2+1}-n+b = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}+b$ și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ dacă și numai dacă $a = 1$ și $b = 2$. **26.** Fie $b_n = \dfrac{n+1}{bn^2+n+2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, distingem următoarele cazuri. Dacă $a \leq -1$, șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ nu are limită. Dacă $a \in (-1, 1)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dacă $a > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Pentru $a = 1$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+b_n)^{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+b_n)^{\frac{1}{b_n}}\right]^{(n+2)b_n} = e^b$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{e}$ dacă și numai dacă $a = 1$ și $b = -1$. **27.** c) Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător (căci $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$) și mărginit superior (deoarece $a_n \leq \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)n} = 2 - \dfrac{1}{n} < 2$, $n \geq 2$). Așadar, șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent (teorema lui Weierstrass). **28.** c) Având în vedere rezultatul de la punctul b), deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!-1}{(n+1)!} = 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{(n+1)!}\right)^{-(n+1)!}\right]^{-1} = \dfrac{1}{e}$. **29.** a) Deoarece $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}$ și $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n+1}}} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, rezultă că relația considerată este adevărată. b) Avem $x_n = 2\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\right) > 2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \ldots + \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = 2\sqrt{n+1}-2$ și $x_n = 2\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\right) < 2\left[\dfrac{1}{2}+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+\ldots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\right] = 2\left(\sqrt{n}-\dfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{n}-1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. c) Cum $2\sqrt{n+1}-2 < x_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\sqrt{n+1}-2\right) = +\infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. d) Din relația de la punctul b) deducem că $\dfrac{2\sqrt{n+1}-2}{\sqrt{n}} < \dfrac{x_n}{\sqrt{n}} < \dfrac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, de unde obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\sqrt{n}} = 2$. e) Evident, $y_{n+1} - y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, (conform punctului b)). Tot din relația de la punctul b) rezultă că $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}-2 < x_n - 2\sqrt{n} \leq -1$, deci $y_n \in (-2, -1]$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, șirul $(y_n)_{n\geq 1}$

Scanned with OKEN Scanner

este convergent şi $-2 \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n \le -1$. **30.** a) Deoarece $b_{n+1}-b_n = a_{n+1}+\frac{1}{n+1}-a_n-\frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$ şi $c_{n+1}-c_n = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} > 0$, rezultă că $(b_n)_{n\ge 1}$ este strict descrescător şi $(c_n)_{n\ge 1}$ este strict crescător. b) Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi^2}{6}+0 = \frac{\pi^2}{6}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{\pi^2}{6}+0 = \frac{\pi^2}{6}$. c) Având în vedere rezultatele demonstrate la punctele a) şi b), deducem că $a_n+\frac{1}{n} > \frac{\pi^2}{6}$ şi $a_n+\frac{1}{n+1} < \frac{\pi^2}{6}$, deci $-\frac{1}{n} < a_n-\frac{\pi^2}{6} < -\frac{n}{n+1}$, de unde rezultă că $-1 < n\left(a_n-\frac{\pi^2}{6}\right) < -\frac{n}{n+1}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. Drept urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(a_n-\frac{\pi^2}{6}\right) = -1$.

3.9. Şiruri date prin formule de recurenţă

1. (x_n) este o progresie aritmetică cu raţia 2, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. **2.** a) $(a_n)_{n\ge 1}$ este o progresie geometrică cu raţia 4, deci $a_n = a_1\cdot 4^{n-1} = -2\cdot 4^{n-1}$ şi $S_n = -\frac{2}{3}(4^n-1)$. b) **4. 3.** $(a_n)_{n\ge 1}$ este o progresie geometrică cu raţia $\frac{11}{10}$, deci $a_n = a_1\cdot\left(\frac{11}{10}\right)^{n-1}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -\infty, a_1 < 0 \\ 0, a_1 = 0 \\ \infty, a_1 > 0 \end{cases}$. **4.** a) Deoarece $x_{n+1}-x_n = \frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})$, rezultă că diferenţele $x_{n+1}-x_n$ şi x_n-x_{n-1} au acelaşi semn, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. Aceasta înseamnă că semnul diferenţei $x_{n+1}-x_n$ coincide cu cel al diferenţei $x_1-x_0 = 1$. Aşadar, $x_{n+1}-x_n > 0$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, adică $(x_n)_{n\ge 1}$ este strict crescător. Se arată uşor, prin inducţie, că $x_n < 3$ $(n\in\mathbb{N})$. Deci şirul $(x_n)_{n\ge 0}$ este mărginit. b) Notăm $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem $l = \frac{l}{2}+\frac{3}{2}$, deci $l = 3$. **5.** $x_n = na$, şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} -\infty, a < 0 \\ 0, a = 0 \\ \infty, a > 0 \end{cases}$. **6.** Deoarece $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2(a_n-3)}{6(a_n+1)}\cdot\frac{a_n+1}{a_n-3} = \frac{1}{3}$, rezultă că $(b_n)_{n\ge 1}$ este o progresie geometrică cu raţia $\frac{1}{3}$, deci $b_n = b_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. De aici, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ şi cum $a_n = \frac{3+b_n}{1-b_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$. **7.** Observăm că $2a_1+a_0 = 3$, deci $a_1 = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^1$. Presupunem că $a_k = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^k$, pentru un $k\in\mathbb{N}^*$. Atunci $2a_{k+1} = 3-a_k = 3-1-\left(-\frac{1}{2}\right)^k = 2-\left(-\frac{1}{2}\right)^k$, de unde obţinem $a_{k+1} = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$. Deci $a_n = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(a_0+$

Scanned with OKEN Scanner

$+ a_1 + \ldots + a_n - (n+1)) = \frac{2}{3}$. **8.** $x_n = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. **9.** Dacă dăm valori lui n, în relația de recurență $a_n - a_{n-1} = 2n$, rezultă că $a_1 - a_0 = 2$, $a_2 - a_1 = 2 \cdot 2$, $a_3 - a_2 = 2 \cdot 3$, ..., $a_n - a_{n-1} = 2 \cdot n$, de unde, prin adunare, obținem $a_n = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = n(n+1)$. Așadar, avem $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{n}{n+1}$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right)^n = \frac{1}{e}$. **10.** Cum $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + 1 = \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, deci are limită ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$). **11.** a) Evident, $y_{n+1} - y_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, deci $(y_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu rația 1 și $y_n = y_1 + (n-1) \cdot 1 = n$. b) Dacă în egalitatea $x_{n+1} - x_n = n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) îi dăm valori lui n, obținem $x_2 - x_1 = 1$, $x_3 - x_2 = 2$, ..., $x_n - x_{n-1} = n - 1$, de unde, adunând relațiile, deducem că $x_n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ sau $x_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2} = \frac{1}{2}$. **12.** b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. **13.** a) Relația de recurență este echivalentă cu $x_{n+1} - 1 = (x_n - 1)^2$. Notând $y_n = x_n - 1$, rezultă că $y_{n+1} = y_n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) și $y_0 = a - 1$. Demonstrăm prin inducție că $y_n = y_0^{2^n}$, de unde obținem că $x_n = (a-1)^{2^n} + 1$. b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 1, a \in (0,2) \\ 2, a = 2 \\ \infty, a > 2 \end{cases}$. **14.** a) Deoarece $a_n - \sqrt{5} = \frac{(a_{n-1} - \sqrt{5})^2}{a_{n-1}}$, rezultă că $a_n \geq \sqrt{5}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. b) Cum $a_{n+1} - a_n = \frac{5 - a_n^2}{2a_n}$ și $a_n \geq \sqrt{5}$, rezultă că $a_{n+1} - a_n \leq 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător. De aici, având în vedere că $a_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$), deducem că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent. c) Notând $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, obținem $l = \frac{l+5}{2l}$, de unde rezultă că $l = \pm\sqrt{5}$. Deoarece $-\sqrt{5}$ nu convine, rămâne $l = \sqrt{5}$. **15.** a) Conform inegalității dintre media aritmetică și cea geometrică, avem $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{1}{x_n}} = 1$, oricare ar fi $n \geq 1$. b) Deoarece $x_{n+1} - x_n = \frac{1 - x_n^2}{2x_n} \leq 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. De aici, având în vedere că $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior, deducem că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Dacă notăm $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, obținem $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{l}\right)$, de unde rezultă că $l = \pm 1$, deci $l = 1$. **16.** $x_n = \frac{a}{\sqrt{1 + (n-1)a^2}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\sqrt{n} = \begin{cases} -1, a < 0 \\ 0, a = 0 \\ 1, a > 0 \end{cases}$. **17.** a) Vom demonstra prin inducție propoziția $P(n)$: $a_{n+1} > a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Observăm că $P(1)$: $a_2 > a_1$ este adevărată, căci $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, iar $a_1 = \sqrt{3}$. Presupunem

Scanned with OKEN Scanner

că $P(k)$; $a_{k+1} > a_k$ este adevărată ($k \in \mathbb{N}^*$). Deoarece $a_{k+2} = \sqrt{2+a_{k+1}} > \sqrt{2+a_k} = a_{k+1}$, rezultă că $P(k+1)$ este adevărată. Deci $P(n)$ este adevărată, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce înseamnă că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. b) Tot prin inducție arătăm că $a_n < 2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Cum șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător și mărginit superior de 2, rezultă că este convergent. Dacă notăm cu l limita lui $(a_n)_{n\geq 1}$ și trecem la limită în relația de recurență, obținem $l = \sqrt{2+l}$ sau $l = 2$ ($l \in (0, 2]$). c) Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2+a_{n+1}}-\sqrt{2+a_n}}{a_{n+1}-a_n} =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2+a_{n+1}}+\sqrt{2+a_n}} = \frac{1}{4}$. **18.** a) Demonstrăm prin inducție că $x_n > x_{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$. Cum $x_1 = 2$ și $x_2 = \frac{5}{4}$, rezultă că $x_1 > x_2$. Presupunem că $x_k > x_{k+1}$, pentru un număr $k \in \mathbb{N}^*$. În acest caz, $x_{k+1} - x_{k+2} =$ $= \frac{3(x_k - x_{k+1})}{(x_k+2)(x_{k+1}+2)} > 0$, deci $x_{k+1} > x_{k+2}$. Tot prin inducție putem arăta că $x_n \in (0, 2]$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Așadar, șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent și $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in [0, 2]$. b) Trecând la limită în relația de recurență, obținem $l^2 + 2l =$ $= 2l + 1$, de unde rezultă că $l = 1$. **19.** a) Inducție. b) Cum $x_n \in (0, 1)$, deducem că $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^5 - x_n}{4} = \frac{x_n(x_n^4-1)}{4} < 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. Deoarece șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton și mărginit, rezultă, conform teoremei lui Weierstrass, că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. c) Fie $l =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Trecând la limită în relația de recurență, obținem $4l = l^5 + 3l$, de unde rezultă că $l = 0$ ($l \in [0, 1)$). De aici deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^4+3}{4} = \frac{3}{4}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+2}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$. **20.** a) $\frac{x_{n+1}}{x_n} <$ $< \frac{n}{n+1} < 1, x_n > 0$. c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. **21.** a) Se arată că $x_{n+2} = \frac{1}{1-x_n}$ și $x_{n+3} = x_n (n \in \mathbb{N}^*)$. b) Având în vedere $x_{n+3} = x_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), demonstrăm, prin inducție, că $x_{3n} = x_0$, $x_{3n+1} = \frac{x_0-1}{x_0}$ și $x_{3n+2} = \frac{1}{1-x_0}$. Prin urmare, $x_n \in \left\{x_0, \frac{x_0-1}{x_0}, \frac{1}{1-x_0}\right\}$, ceea ce înseamnă că $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este divergent, deoarece conține subșiruri cu limite diferite (x_0, $\frac{x_0-1}{x_0}$ și $\frac{1}{1-x_0}$ nu pot fi toate egale).

3.10. Limite de funcții

1. a) 1. b) 2. c) ∞. d) $-\infty$. e) ∞. f) $-\infty$. 2. a) $\frac{1}{2}$. b) 1. c) -1. d) $-\infty$. e) 1. f) 0. 3. a) 4. b) 2. c) ∞. d) 0. e) 6. f) -1. 4. a) $\frac{3}{2}$. b) $-\frac{1}{56}$. c) $-\frac{1}{3}$. d) 0. e) $-\infty$. f) $\frac{1}{2}$. 5. a) $\frac{3}{4}$. b) 1. c) -1. d) 12. e) 2. f) $-0,5$. 6. a) 5. b) $\frac{2}{7}$. c) 8. d) $\frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

e) $\cos a$. f) $\frac{2}{3}$. 7. a) 0. b) 0. c) 1. d) 0. e) 0. f) ∞. 8. a) 2. b) 0. c) 0. d) $\frac{1}{e^2}$. e) 0. f) 0. 9. a) e. b) e. c) $\sqrt[3]{e}$. d) $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

e) e^{-8}. f) 1. 10. a) $\ln 2$. b) $\ln 6$. c) $\ln 2$. d) 1. e) $\frac{1}{2}$. f) $\frac{2}{3}$. 11. a) 0. b) $e^{-\frac{1}{6}}$. 12. Avem $\lim\limits_{x\searrow 0}\left(\frac{1}{f(x)}\right)^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x\sin\pi x}\overset{x-1=t}{=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^2}{(t+1)\sin(\pi t+\pi)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{-t^2}{(t+1)\sin\pi t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{-t}{t+1}\cdot$

$\cdot\frac{\pi t}{\sin\pi t}\cdot\frac{1}{\pi}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}(x-f(x))^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}$. 13. a) $\lim\limits_{x\nearrow 2}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\searrow 2}f(x)=\infty$. b) $\lim\limits_{x\nearrow -1}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\searrow -1}f(x)=$

$=-\infty$. $\lim\limits_{x\nearrow 1}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\searrow 1}f(x)=-\infty$. c) $\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=\infty$. d) $\lim\limits_{x\nearrow 1}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\searrow 1}f(x)=0$. 14. a) Funcția f nu are limită în $x=1$, deoarece $\lim\limits_{x\nearrow 1}f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\searrow 1}f(x)=+\infty$; b) Considerăm șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=2n\pi$ și $(y_n)_{n\geq 1}$,

$y_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=$

$=1$, rezultă că f nu are limită în $x=\infty$. c) Considerăm șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=\frac{1}{2n\pi}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$, $y_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$. Deoarece $x_n\to$

$\to 0$, $y_n\to 0$, $x_n\neq 0$, $y_n\neq 0$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ și $f(x_n)\to 1$, $f(y_n)\to 0$, rezultă că f nu are limită în $x=0$. d) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ două șiruri astfel încât $x_n\in\mathbb{Q}$, $y_n\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $x_n\neq a$, $y_n\neq a$ (oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$), $x_n\to a$, $y_n\to a$. Deoarece $f(x_n)\to 1$ și $f(y_n)\to 0$, rezultă că f nu are limită în $x=a$. 15. Deoarece $\lim\limits_{x\nearrow -1}f(x)=3$ și $\lim\limits_{x\searrow -1}f(x)=3$, rezultă că f are limită în $x=-1$ și $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=3$. 16. Cum $\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=-2$ și $\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=1$, rezultă că f nu are limită în $x=0$. 17. Întrucât

$\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\left(\frac{\sin x}{x}+2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)=3$ și $\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=3$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3$. 18. $a\in\{-3,1\}$. 19. $a=1$, $b=0$.

20. Deoarece $|f(x)-x^2|\leq|x^3|$, rezultă că $-|x^3|\leq f(x)-x^2\leq|x|^3$, ceea ce conduce la $-|x|+1\leq\frac{f(x)}{x^2}\leq|x|+1$ (oricare ar fi $x\in\mathbb{R}^*$). Cum $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|+1)=\lim\limits_{x\to 0}(|x|+1)=1$, deducem că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=1$. 21. e. 22. Deoarece

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\infty(1-\sqrt{a})=\pm\infty$, dacă $a\neq 1$, rezultă că, pentru a fi îndeplinită condiția din

enunț, este necesar să avem $a=1$. Pentru $a=1$, obținem $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+bx+1})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-bx-1}{x+\sqrt{x^2+bx+1}}=$

$=\frac{-b}{2}=\frac{-1}{2}$, deci $b=1$. 23. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+4x+1}-ax-b)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{2+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=\infty(\sqrt{2}-a)=$

$=\pm\infty$, dacă $a\neq\sqrt{2}$, rezultă că, în mod necesar, $a=\sqrt{2}$. Pentru $a=\sqrt{2}$, avem: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+4x+1}-ax-b)=$

Scanned with OKEN Scanner

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+4x+1-2x^2}{\sqrt{2x^2+4x+1}+x\sqrt{2}}-b\right) = \sqrt{2}-b = 2\sqrt{2}$, de unde obținem $b = -\sqrt{2}$. **24.** Întrucât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{2x-1}\right)^x =$

$= \left(\frac{a}{2}\right)^\infty = \begin{cases} 0, a\in(0,2) \\ \infty, a\in(2,\infty) \end{cases}$, rezultă că, în mod necesar, $a = 2$. Pentru $a = 2$, avem $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{2x-1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+b}{2x-1}\right)^x =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{b+1}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{b+1}}\right]^{\frac{(b+1)x}{2x-1}} = e^{\frac{b+1}{2}} = e^2$, de unde obținem $b = 3$.

3.11. Asimptote

1. $x = -2$ este asimptotă verticală a graficului funcției f la stânga și la dreapta. Dreapta cu ecuația $y = 2$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ și ∞. **2.** Dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ și ∞. Graficul funcției mai are și două asimptote verticale: $x = -1$ și $x = 0$. **3.** Dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală la stânga și la dreapta. Dreapta $y = x + 1$ este asimptotă oblică la ∞, iar dreapta $y = -x - 1$ este asimptotă oblică la $-\infty$. **4.** Graficul funcției f are dreapta $y = 0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$ și ∞ și fiecare dintre dreptele $x = k$, $k \in \{1, 2\}$ este asimptotă verticală la stânga și la dreapta. **5.** $y = x$ este asimptotă oblică la graficul funcției f spre ∞. **6.** $y = -x + \frac{1}{2}$. **7.** Graficul funcției are asimptota orizontală $y = 0$ la $-\infty$ și ∞. **8.** $y = x + 1$. **9.** $y = -ax$. **10.** $y = 0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ și $x = 0$ este asimptotă verticală la stânga și la dreapta. **11.** $y = x$. **12.** Graficul funcției are numai o asimptotă verticală la dreapta (dreapta de ecuație $x = 0$). **13.** Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, rezultă că graficul lui f nu admite asimptotă orizontală spre ∞. Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right) = 1$ și $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{n\to\infty}\ln x = \infty$, înseamnă că graficul funcției f nu are nici asimptotă oblică spre ∞. **14.** Deoarece $\lim\limits_{x\searrow -2} f(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x) = +\infty$, rezultă că $x = -2$ este asimptotă verticală la dreapta, iar $x = 2$ este asimptotă verticală la stânga. **15.** $y = \frac{\pi}{2}$. **16.** Funcția f este continuă pe $\mathbf{R}$, deci graficul ei nu are nicio asimptotă verticală. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} x\left(1-\frac{\sin x}{x}\right) = \infty$, rezultă că graficul lui f nu are asimptotă orizontală la $+\infty$. Avem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 1 = m$, dar $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to\infty}(-\sin x)$, care nu există (pentru că $\sin(2n\pi) \overset{n\to\infty}{\to} 0$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) \overset{n\to\infty}{\to} 1$). Deci graficul lui f nu are asimptotă oblică la ∞. Analog se arată că graficul lui f nu are asimptotă la $-\infty$. **17.** Condițiile impuse sunt echivalente cu $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x) = 2$ și $f(2) = 6$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+ax+b}{x^2} = 1$ (oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$), $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(a+1)x+b}{x-1} = a+1 = 2$ și $f(2) = 4+2a+b = 6$, obținem $a = 1$ și $b = 0$. **18.** Pentru

Scanned with OKEN Scanner

ca graficul funcției f să admită asimptota verticală $x=3$ este necesar și suficient ca $3+d=0$ și $a\cdot 3^2+b\cdot 3+c\neq 0$, deci $d=-3$. Celelalte condiții din enunț sunt echivalente cu $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=2$ și $f(1)=1$. Întrucât $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-3x}=a=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+bx+c}{x-3}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(b+3)x+c}{x-3}=b+3=2$ și $f(1)=\frac{1+b+c}{-2}=1$, rezultă că $a=1$, $b=-1$ și $c=-2$. **19.** Condițiile impuse sunt echivalente cu $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=4$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(a+\sqrt{b+\frac{c}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=a+\sqrt{b}$, rezultă că $a+\sqrt{b}=4$. Pe de altă parte, avem $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\overset{t=-x}{=}\lim\limits_{t\to\infty}(\sqrt{bt^2-ct+1}-at)=\infty\cdot(\sqrt{b}-a)$. Dacă $a\neq\sqrt{b}$, atunci $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\neq -1$, deci este necesar ca $a=\sqrt{b}$ și, cum $a+\sqrt{b}=4$, deducem de aici că $a=2$, $b=4$. Pentru $a=2$ și $b=4$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+cx+1}+2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{cx+1}{\sqrt{4x^2+cx+1}-2x}=\frac{c}{-4}=-1$, rezultă că $c=4$. **20.** Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+x+a$. Dacă $g(-1)\neq 0$ și $g(1)\neq 0$, atunci graficul lui f are două asimptote verticale (dreptele $x=-1$ și $x=1$). Cum $g(-1)=0$, înseamnă $a=0$, avem, în acest caz, $f(x)=\frac{x}{x-1}$, funcție al cărei grafic are o singură asimptotă verticală ($x=1$). Dacă $g(1)=0$, atunci $a=-2$ și $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$, iar graficul lui f are tot o singură asimptotă verticală ($x=-1$). Drept urmare, $a\in\{-2,0\}$.

3.12. Funcții continue

1. a) Deoarece $\lim\limits_{x\nearrow 1}f(x)=0$ și $\lim\limits_{x\searrow 1}f(x)=1$, rezultă că f este discontinuă în $x_0=1$. b) Remarcând că $\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=1$ și $f(0)=1$, deducem că f este continuă în $x_0=0$. **2.** Deoarece $f(x)=\begin{cases}x(1-x), x\in[0,1)\\(x-1)(2-x), x\in[1,2)\\(x-2)(3-x), x\in[2,3)\\0, x=3\end{cases}$, rezultă că f este continuă pe $[0,3]-\{1,2,3\}$. Să studiem continuitatea funcției f în punctele 1, 2 și 3. Avem: $\lim\limits_{x\nearrow 1}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\searrow 1}f(x)=0$ și $f(1)=0$, deci f este continuă în $x=1$. Analog, arătăm că f este continuă în $x=2$ și $x=3$. Prin urmare, funcția f este continuă pe $[0,3]$. **3.** a) Funcția este continuă pe $(0,\infty)$. b) Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$. **4.** Deoarece $\lim\limits_{x\nearrow 1}f(x)=-\infty$ și $f(1)=a\in\mathbb{R}$, rezultă că f nu este continuă în $x=1$. **5.** Funcția f nu are limită în $x=0$ (care este punctul de acumulare pentru $\mathbb{R}$), deci nu este continuă în $x=0$. Pentru a demonstra că f nu are limită în

Scanned with OKEN Scanner

$x=0$, se pot alege șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, definite prin $x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $y_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$. Avem $x_n\to 0$, $y_n\to 0$, $x_n\neq 0$, $y_n\neq 0$, $f(x_n)=0\to 0$, $f(y_n)=1\to 1$. **6.** $a=0$. **7.** $a=-\frac{5}{3}$. **8.** Cum $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}^*$, deducem că $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$, de unde rezultă că f este continuă în $x=0$ dacă și numai dacă $f(0)=1$. **9.** $a=4$, $b=0$. **10.** $a=-\frac{1}{2}$ și $b=1$. **11.** Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}=\begin{cases}0, x<0\\1, x=0\\\infty, x>0\end{cases}$, rezultă că $f(x)=\begin{cases}1, x<0\\\frac{1}{2}, x=0\\x, x>0\end{cases}$. Așadar, f este continuă pe $\mathbb{R}^*$ și discontinuă în $x=0$. **12.** a) Dacă $x\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]$, atunci avem $|f(x)|=|x|\leq|x|$, iar dacă $x\in(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap[-1,1]$, atunci $|f(x)|=|x^3|=|x|^3\leq|x|$, oricare ar fi $x\in[-1,1]$. b) Cum $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ și $|f(x)|\leq|x|$, oricare ar fi $x\in[-1,1]$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$, ceea ce înseamnă că f este continuă în $x=0$. **13.** a) Cum $\{x\}=x$, oricare ar fi $x\in[0,1)$, $f(x)=\sqrt{x-x^2}$, $x\in[0,1)$. b) Deoarece $\{x+1\}=\{x\}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, avem $f(x+1)=\sqrt{\{x+1\}-\{x+1\}^2}=\sqrt{\{x\}-\{x\}^2}=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. c) Funcția f este continuă pe $[0,1)$ și $f(x+1)=f(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, deci f este continuă pe $\mathbb{R}$. **14.** a) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2+7x-1$. Deoarece f este continuă și $f(-1)=-8$, iar $f(1)=8$, rezultă că există $x_0\in(-1,1)$, astfel încât $f(x_0)=0$, deci ecuația considerată are cel puțin o soluție în $(-1,1)$. b) Se arată în mod analog, considerând funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\ln x+2x-1$. **15.** Funcțiile $g_n, h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g_n(x)=x^n$, $h(x)=\ln x$ sunt strict crescătoare. Așadar, ecuația $f_n(x)=0$ are cel mult o soluție în intervalul $(0,\infty)$. Cum $f_n\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^n-1<0$, $f_n(1)=1>0$ și f_n este continuă, rezultă că ecuația are o rădăcină în intervalul $\left(\frac{1}{e},1\right)$. **16.** a) Deoarece funcțiile $f_1, f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=x^3$, $f_2(x)=x+1$ sunt strict crescătoare, rezultă că $f=f_1+f_2$ este strict crescătoare. Deci, ecuația $f(x)=3+\frac{1}{n+1}$ are cel mult o soluție. Considerăm acum funcția auxiliară $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-3-\frac{1}{n+1}$. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$, iar g este continuă, înseamnă că g are cel puțin un zero, deci ecuația considerată are cel puțin o soluție x_n, care este și singura, conform celor demonstrate mai înainte. b) Din definiția șirului $(x_n)_{n\geq 1}$, rezultă că $x_n^3+x_n+1=3+\frac{1}{n+1}$ sau $(x_n-1)(x_n^2+x_n+2)=\frac{1}{n+1}$, de unde obținem: $|x_n-1|=\frac{1}{(n+1)(x_n^2+x_n+2)}=\frac{1}{(n+1)\left(\left(x_n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right)}\leq\frac{1}{(n+1)\cdot\frac{7}{4}}$. De aici, având în

Scanned with OKEN Scanner

vedere că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)\cdot\frac{7}{4}}=0$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. c) Din relația $x_n-1=\dfrac{1}{(n+1)(x_n^2+x_n+2)}$ rezultă că $n(x_n-1)=\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{x_n^2+x_n+2}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}n(x_n-1)=1\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$. **17.** a) Funcția f este continuă pe $(0, 1]$, deoarece pe acest interval este produsul a două funcții continue (funcție elementară). În plus, $\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}x\sin\dfrac{\pi}{x}=0$ și $f(0)=0$, deci f este continuă în $x=0$. Așadar, f este continuă pe $[0, 1]$. b) Considerăm funcția auxiliară $g:\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\cos\dfrac{\pi}{x}$. Cum g este continuă pe $\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right]$ și $g\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\cdot g\left(\dfrac{1}{n}\right)=(-\cos(n+1)\pi)(-\cos n\pi)=(-1)^{n+2}\cdot(-1)^{n+1}=(-1)^{2n+3}=-1<0$, rezultă că există $x_n\in\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right)$, astfel încât $g(x_n)=0$. Deci, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{x}$ are cel puțin o soluție în intervalul $\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right)$. **18.** Fie funcția auxiliară $g:[-1, 1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x$. Cum $g(-1)=f(-1)-(-1)\geq 0$, $g(1)=f(1)-1\leq 0$, iar g este continuă, rezultă că există $u\in[-1, 1]$, astfel încât $g(u)=0$, adică $f(u)=u$. Existența numărului $v\in[-1, 1]$, cu proprietatea $f(v)=-v$, se arată în mod analog, considerând funcția auxiliară $h:[-1, 1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)+x$. **19.** a) Deoarece funcția f este continuă, ea păstrează semn constant pe fiecare dintre intervalele pe care nu se anulează. Rezolvând ecuația $f(x)=0$, $x\in[0, 5]$, obținem $x=1$. Cum $f(0)=3>0$ și $f(5)=-2<0$, rezultă că semnul funcției f este:

x	0		1		5
$f(x)$	3	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	-2

b) Avem

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	$-$

20. Întrucât $\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=\ln 1-0=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1\right)=\infty(0-1)=-\infty$ și f este continuă, rezultă că oricare ar fi $y\in(-\infty, 0)$, există $x\in(0, \infty)$, astfel încât $f(x)=y$. Deci f este funcție surjectivă. **21.** Deoarece funcțiile $f_1, f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=e^{3x}$, $f_2(x)=2x+1$ sunt strict crescătoare, rezultă că $f=f_1+f_2$ este strict crescătoare, deci injectivă. Pe de altă parte, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ și f este continuă (funcție elementară), deci, oricare ar fi $y\in\mathbb{R}$, există $x\in\mathbb{R}$, astfel încât $f(x)=y$, ceea ce înseamnă că f este surjectivă. Prin urmare, f este inversabilă, pentru că este bijectivă. **22.** a) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, iar f este continuă pe $\mathbb{R}$, rezultă că $\operatorname{Im}f=\mathbb{R}$. b) Analog, arătăm că $\operatorname{Im}f=\mathbb{R}$. **23.** Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=\dfrac{1}{2}$ și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sqrt{x^2-1}}{x^2}=0$, rezultă că există $a, b\in(0, \infty)$, $a<b$, astfel încât f este mărginită pe $(0, a]$ și pe $[b, \infty)$. Funcția f este continuă pe $[a, b]\subset(0, \infty)$, deci, conform teoremei lui Weierstrass, este mărginită pe $[a, b]$. Prin

Scanned with OKEN Scanner

urmare, f este mărginită pe $(0, \infty)$. **24.** a) Deoarece f este continuă în $x = 0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{e^{n+1}}\right) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{e^{n+1}}\right) =$ $= f(0) = 1$. b) Înlocuind în relația din ipoteză pe x cu $\frac{x}{e}$, obținem $f\left(\frac{x}{e}\right) - f\left(\frac{x}{e^2}\right) = \frac{x}{e}$. c) Se demonstrează prin inducție. d) Adunând relațiile $f(x) - f\left(\frac{x}{e}\right) = x$, $f\left(\frac{x}{e}\right) - f\left(\frac{x}{e^2}\right) = \frac{x}{e}$, ..., $f\left(\frac{x}{e^n}\right) - f\left(\frac{x}{e^{n+1}}\right) = \frac{x}{e^n}$, obținem $f(x) - f\left(\frac{x}{e^{n+1}}\right) = x\left(1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+...+\frac{1}{e^n}\right)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{e^{n+1}}\right) = 1$ și $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+...+\frac{1}{e^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{ex}{e-1}$, rezultă că $f(x) - 1 = \frac{ex}{e-1}$, deci $f(x) = 1 + \frac{ex}{e-1}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

3.13. Derivata unei funcții

1. $f'(-1) = \lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2+5x+3}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1}(2x+3) = 1$ și $f'(0) = \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2+5x}{x} =$ $= \lim\limits_{x\to0}(2x+5) = 5$. **2.** Funcția este derivabilă în orice punct $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Deoarece $f_s'(0) = \lim\limits_{x\nearrow0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\nearrow0}(x^2+1) = 1$ și $f_d'(0) = \lim\limits_{x\searrow0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\searrow0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$, rezultă că $f_s'(0) =$ $= f_d'(0)$, deci f este derivabilă și în $x = 0$. **3.** Funcția f nu este derivabilă în două puncte: $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$. **4.** $f_s'(0) = f_d'(0) = 0$, $f_s'(-1) = -\infty$, $f_d'(-1) = \infty$, $f_s'(1) = -\infty$, $f_d'(1) = \infty$. **5.** $(0, 1]$. **6.** Fie $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, $x \in$ $\in \mathbb{R}^*$. Funcția g nu are limită în $x = 0$, deoarece există șirurile $(a_n)_{n\geq1}$, $(b_n)_{n\geq1}$, $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n\sqrt{2}}$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(b_n) = \frac{1}{n^2(\sqrt{2})^3} = 0$. Prin urmare, f nu este derivabilă în $x = 0$. **7.** a) Deoarece $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} x\sin\frac{1}{x^2} = 0$, deducem că f este derivabilă în $x = 0$. Având în vedere că funcția f este derivabilă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$, rezultă că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$. b) Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right) = 0$. **8.** $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$. **9.** Cum $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$ și $f'(0) = (e^x - e^{-x})'_{x=0} = (e^x + e^{-x})_{x=0}$, rezultă că limita cerută este 2. **10.** Avem $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} =$

Scanned with OKEN Scanner

$= f'(1) = ((x-3)\ln x)'_{x=1} = \left(\ln x + \frac{x-3}{x}\right)_{x=1} = \ln 1 + \frac{-2}{1} = -2$. **11.** Deoarece funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, cerința din enunț este îndeplinită dacă f este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Dacă ecuația $x^2 + (m-2)x - m + 2 = 0$ are o rădăcină reală x_1, atunci f nu este derivabilă în x_1, iar dacă ecuația nu are nicio rădăcină reală, funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Deci m trebuie să verifice condiția $\Delta = (m-2)^2 + 4(m-2) < 0$, adică $m \in (-2, 2)$. **12.** a) $f'(x) = 2x + 4$. b) $f'(x) = 2x + \frac{2}{x^3}$. c) $f'(x) = -\frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x^6}$. d) $f'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}$. e) $f'(x) = 2x + e^x$. f) $f'(x) = 2^x \ln 2 + 5^x \ln 5$. g) $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$. h) $f'(x) = 2\cos x - 3\sin x$. i) $f'(x) = 2x - 2^{-x}\ln 2$. j) $f'(x) = 0$. k) $f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. l) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$. **13.** a) $f'(x) = \ln x + \frac{x-2}{x}$. b) $f'(x) = x(2\ln x + 1)$. c) $f'(x) = (x^2 + 4x + 5)e^x$. d) $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$. e) $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$. f) $f'(x) = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}$. g) $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$. h) $f'(x) = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$. i) $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{(x+\ln x)^2}$. j) $f'(x) = \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$. **14.** a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. b) $f'(x) = e^x + \frac{2x}{1+x^2}$. c) $f'(x) = \frac{-4(x+1)}{(x^2+1)(x^2+4x+5)}$. d) $f'(x) = \frac{x^3 - 3x + a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. e) $f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$. f) $f'(x) = \frac{4}{4-x^2}$. g) $f'(x) = \frac{\ln x}{x}$. h) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2+1}$. i) $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$. j) $f'(x) = 3e^{3x} + 2$. k) $f'(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. l) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. **15.** Condiția din enunț este echivalentă cu $f'(x) = 1$, de unde rezultă că $x = \ln 2$. **16.** Deoarece $f'(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ $(x \in \mathbb{R}^*)$, rezultă că $f'(1) = \frac{1}{e}$. Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ sau $y = \frac{1}{e}(x-1)$. **17.** Tangenta la graficul lui f în $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $9y = 2x$ dacă $f'(x_0) = \frac{2}{9}$, adică $\frac{1}{x_0} - \frac{4}{(x_0+1)^2} = \frac{2}{9}$. Deci $x_0 = \frac{1}{2}$ și $f(x_0) = -\ln 2 + \frac{2}{3}$. **18.** Ecuația tangentei la grafic în punctul $O(0, 0)$ este $y - f(0) = f'(0)(x-0)$, adică $y = (1-e)x$. Punctul de intersecție dintre această dreaptă și dreapta $x = 1$ are coordonatele $(1, 1-e)$. **19.** $y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x-1)$. **20.** $y + 1 = 0$. **21.** Deoarece $f'(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{x^2+1}$ și $\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, iar $\frac{x}{x^2+1} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, rezultă că funcția f' este mărginită. **22.** $f'(x) = e^{x\ln x}(x\ln x)' = f(x)(1 + \ln x)$. **23.** a) Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ pentru că $x^3 + 3x^2 - 4 \neq 0$, dacă $x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$. Cum $f^3(x) = x^3 + 3x^2 - 4$, rezultă că $3f^2(x) \cdot f'(x) =$

Scanned with OKEN Scanner

$= 3x^2 + 6x$ sau $f^2(x) \cdot f'(x) = x^2 + 2x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$. b) Avem $f_s'(-2) = \lim\limits_{x \nearrow -2} \dfrac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} =$

$= \lim\limits_{x \nearrow -2} \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+2}} = \infty$ și $f_d'(-2) = -\infty$. **24.** Cum $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \right.$

$\left. + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)\right] = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = \infty$. **25.** $f'(x) = -x + \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$. **26.** Deoarece $f'(x) = e^x(ax^2 + (2a + b)x +$

$+ b + c)$ și $f''(x) = e^x(ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c)$, condițiile din enunț sunt echivalente cu $c = 0$, $b + c = 1$, $2a + 2b + c = 4$, de unde rezultă că $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$. **27.** Întrucât $f'(x) = 2x + e^x$ și $f''(x) = 2 + e^x$, ecuația considerată este echivalentă cu $x^2 + 2x + 1 = 0$, a cărei soluție este $x = -1$. **28.** $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f''(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

29. a) Avem $f_1(x) = f_0'(x) = 2e^{2x}$, $f_2(x) = f_1'(x) = 4e^{2x}$ și $f_3(x) = f_2'(x) = 8e^{2x}$. b) Deoarece $f_n(x) = 2^n e^{2x}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ și $x \in \mathbb{R}$ (inducție), rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_1(a) + f_2(a) + \ldots + f_{n-1}(a)}{f_n(a)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2e^{2a} + 2^2e^{2a} + \ldots + 2^{n-1}e^{2a}}{2^n e^{2a}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 1$. **30.** a) Demonstrăm prin inducție propoziția $P(n)$: $f_{2n}(x) = f_0(x)$, $f_{2n+1}(x) = f_1(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. Evident, $P(0)$ este adevărată. Presupune $P(k)$ adevărată pentru un $k \in \mathbb{N}$. Avem $f_{2k+2}(x) = f_{2k+1}'(x) =$

$= f_1'(x) = (e^x - e^{-x})' = e^x + e^{-x} = f_0(x)$ și $f_{2k+3}(x) = f_{2k+2}'(x) = f_0'(x) = (e^x + e^{-x})' = e^x - e^{-x} = f_1(x)$, deci $P(k+1)$ este adevărată; b) Observăm că $f_0(0) = 2$ și $f_1(0) = 0$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_0(0) + f_1(0) + \ldots + f_n(0)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+0+2+0+\ldots}{n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$. **31.** a) $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{(x-1)+(x-2)}{(x-2)(x-2)} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$. b) Observăm că inegalitatea $f(x)f''(x) - (f'(x))^2 \leq$

≤ 0 este echivalentă cu $\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)' \leq 0$ sau $g'(x) \leq 0$, adică $-\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x-2)^2} \leq 0$, care este adevărată oricare ar fi $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$. **32.** $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot \dfrac{1}{(x+a)^{n+1}}$, oricare ar fi $x \in E = \mathbb{R} - \{-a\}$ și $n \in \mathbb{N}^*$. **33.** Se arată, prin inducție, că $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Astfel, $f^{(2004)}(0) = \sin(1002\pi) = 0$. **34.** a) Demonstrăm, prin inducție, propoziția $P(n)$: $f^{(n)}(x) = (x^2 + (2n + 1)x + n^2)e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Evident, $P(1)$ este adevărată, căci $f'(x) = (2x + 1)e^x + (x^2 + x)e^x = (x^2 + 3x + 1)e^x$. Presupunem că $P(k)$ este adevărată, pentru un număr $k \in \mathbb{N}^*$. Avem $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = ((x^2 + (2k + 1)x + k^2)e^x)' = (2x + 2k + 1)e^x + (x^2 + (2k + 1)x + k^2)e^x = (x^2 + (2k + 3)x +$

$+ (k + 1)^2)e^x$, deci $P(k + 1)$ este adevărată. b) Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f'(0) + f''(0) + \ldots + f^{(n)}(0)}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \dfrac{1}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

3.14. Teorema lui Fermat. Teorema lui Rolle. Teorema lui Lagrange

1. a) Evident, $f(x) \geq 0 = f(0)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. b) Funcția f nu are derivată în $x = 0$ ($f'_s(0) = -\infty$ și $f'_d(0) = +\infty$).

2. a) Funcția f este derivabilă pe $(-1, 3)$ și $f'(x) = 2x$, $x \in (-1, 3)$. Ecuația $f(x) = 0$ are soluția $x = 0$, deci, conform teoremei lui Fermat, funcția f ar putea avea ca punct de extrem doar pe $x = 0$. Cum $f(x) \geq f(0)$, oricare ar fi $x \in (-1, 3)$, rezultă că $x = 0$ este punct de minim pentru funcția f. b) $x = 1$ este punct de minim. c) Deoarece $f'(x) = \frac{1+2x^2}{1+x^2} \neq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, rezultă că f nu are puncte de extrem. d) Funcția f are două puncte de extrem: $x_1 = -1$ (minim) și $x_2 = 1$ (maxim). **3.** Presupunem că f are puncte de extrem local. Cum f este derivabilă pe $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$ și toate punctele acestei mulțimi sunt puncte interioare ei, rezultă f' are rădăcini reale (teorema lui Fermat). Dar $f'(x) = \frac{-2(3x^2+3x+1)}{x^3(x+1)^3}$ și, evident, $f'(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$. Deci presupunerea făcută este falsă, ceea ce înseamnă că f nu are puncte de extrem local. **4.** Deoarece 1 este punct interior lui $\mathbb{R}$, f este derivabilă în $x = 1$ și $x = 1$ este punct de extrem pentru f, rezultă că $f'(1) = 0$ (teorema lui Fermat). Din $f'(1) = 0$ obținem $\frac{1}{2} + a = 0$, deci $a = -\frac{1}{2}$. Pentru $a = -\frac{1}{2}$, avem:

x	$-\infty$		-1		1		∞
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$\searrow$		$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	

5. Din relația $f(x) \geq 1 = f(0)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $x = 0$ este punct de minim pentru funcția f având în vedere că $x = 0$ este punct interior mulțimii $\mathbb{R}$ și f este derivabilă în $x = 0$, deducem, conform teoremei lui Fermat, că $f'(0) = 0$, deci $a = 1$. Pentru $a = 1$, avem într-adevăr $f(x) \geq 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x) = e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$f(x) = e^x - x$	$\searrow$		1	$\nearrow$	

6. Presupunem, mai întâi, că $a^x + b^x \geq 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x + b^x$. Deoarece $f(x) \geq 2 = f(0)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $x = 0$ este punct interior mulțimii $\mathbb{R}$ și f este derivabilă în $x = 0$, rezultă că $f'(0) = 0$ (teorema lui Fermat). Deci $a^0 \ln a + b^0 \ln b = 0$, adică $\ln ab = 0$ sau $ab = 1$. Reciproc, dacă $ab = 1$, atunci $a^x + b^x \geq 2\sqrt{a^x b^x} = 2\sqrt{(ab)^x} = 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. **7.** Considerăm funcția $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)^n - 1 - ax$. Inegalitatea din enunț este echivalentă cu $f(x) \geq 0 = f(0)$, ceea ce arată că $x = 0$ este punct de minim al funcției f. De aici, având în vedere că 0 este punct interior intervalului $(-1, \infty)$ și f este derivabilă în $x = 0$, deducem că $f'(0) = 0$. Deci $a = n$, care satisface condiția din enunț (se poate verifica prin inducție după n). **8.** Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + 6^x - 3^x - 4^x$. Relația din enunț se scrie $f(x) \geq 0 = f(0)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, deci $x = 0$ este punct de minim pentru f. Cum $x = 0$ este punct interior lui $\mathbb{R}$ și f este derivabilă în 0,

Scanned with OKEN Scanner

rezultă că $f'(0) = 0$ (teorema lui Fermat), de unde obținem $\ln 2 + \ln a - \ln 3 - \ln 4 = 0$ sau $a = 6$. Să arătăm că $a = 6$ este soluție. Într-adevăr, în acest caz, $f(x) = 2^x + 6^x - 3^x - 4^x = (1 - 2^x)(2^x - 3^x) \geq 0$, căci $x \geq 0$ implică $1 - 2^x \leq 0$, $2^x - 3^x \leq 0$, iar $x > 0$ implică $1 - 2^x > 0$, $2^x - 3^x > 0$. **9.** a) Funcția f este continuă pe $[1, 3]$, derivabilă pe $(1, 3)$ și $f(1) = f(3) = -1$. b) Avem $\lim\limits_{x \nearrow 0} g(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} g(x) = g(0) = 2$ și $g'_s(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = 1$, $g'_d(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Deci g este continuă pe $[-1, \pi]$, derivabilă pe $(-1, \pi)$ și $g(-1) = g(\pi) = 2$. **10.** a) Nu, deoarece $f(0) \neq f(2)$. b) Nu, deoarece f nu este derivabilă pe $(-1, 1)$ $(f'_s(0) = 0 \neq 1 = f'_d(0))$. **11.** Funcția f este continuă pe intervalul $[1, 3]$, derivabilă pe $(1, 3)$ și $f(1) = f(3) = 0$, deci, conform teoremei lui Rolle, există $x_1 \in (1, 3)$ cu proprietatea $f'(x_1) = 0$. Analog arătăm că există $x_2 \in (3, 5)$ și $x_3 \in (5, 7)$, astfel încât $f'(x_2) = f'(x_3) = 0$. Cum f' este o funcție polinomială de gradul al treilea, nu poate avea mai mult de trei rădăcini reale. Drept urmare, f' are exact trei rădăcini reale. **12.** a) Evident, $f'(x) = 6x^5 + 4x^3 - 2x - 1$. b) Deoarece f este continuă pe $[0, 1]$, derivabilă pe $(0, 1)$ și $f(0) = f(1) = 0$, rezultă că există $c \in (0, 1)$, astfel încât $f'(c) = 0$. Deci ecuația considerată are cel puțin o soluție în intervalul $(0, 1)$. **13.** a) Funcția g este continuă pe $[1, 2]$, derivabilă pe $(1, 2)$ și $g(1) = g(2) = 0$. b) Aplicând teorema lui Rolle funcției g (de la punctul a)), rezultă că există $c \in (1, 2)$, astfel încât $g'(c) = 0$, adică $(c - 1)f'(c) + f(c) - f(2) = 0$. **14.** a) Funcția g este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) și $g(a) = g(b) = 0$. b) Aplicând teorema lui Rolle funcției g, deducem că există $c \in (a, b)$, astfel încât $g'(c) = 0$, adică $(c - b)f(c) + (c - a)f(c) + (c - a)(c - b)f'(c) = 0$. Dacă împărțim prin $(c - a)(c - b)f(c)$, obținem $\frac{1}{c - a} + \frac{1}{c - b} + \frac{f'(c)}{f(c)} = 0$ sau $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{1}{a - c} + \frac{1}{b - c}$. **15.** Presupunem că nu există niciun punct $c \in [0, 1]$ astfel încât $g(c) = 0$. Atunci, funcția $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, îndeplinește condițiile teoremei lui Rolle, ceea ce înseamnă că există $d \in (0, 1)$ astfel încât $h(d) = 0$, deci $f'(d) \cdot g(d) - f(d) \cdot g'(d) = 0$. Contradicția la care am ajuns dovedește că presupunerea făcută este falsă. **16.** Da, $c = \frac{3}{2}$. b) Nu, deoarece funcția nu este derivabilă în $x = 1$. c) Da, $c = e - 1$. d) Da, $c = \frac{1}{6}$. **17.** Funcția f trebuie să fie continuă pe $[-1, 1]$ și derivabilă pe $(-1, 1)$. Soluția este $a = 1$, $b = 1$. **18.** a) Deoarece f este continuă pe $[k, k + 1]$ și derivabilă pe $(k, k + 1)$, rezultă că există $c_k \in (k, k + 1)$, astfel încât $f(k + 1) - f(k) = f'(c_k)(k + 1 - k) = f'(c_k) = \frac{1}{c_k \ln c_k}$. b) Având în vedere rezultatul de la punctul a) și faptul că $\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < \frac{1}{c_k \ln c_k} < \frac{1}{k \ln k}$, deducem că relația din enunț este adevărată. **19.** a) Deoarece f este continuă pe $[k, k + 1]$ și derivabilă pe $(k, k + 1)$, rezultă că există $c_k \in (k, k + 1)$, astfel încât $f(k + 1) - f(k) = f'(c_k)(k + 1 - k) = f'(c_k) = \frac{1}{c_k^2 + 1}$. b) Concluzia problemei rezultă din punctul a) și faptul că $\frac{1}{(k+1)^2 + 1} < \frac{1}{c_k^2 + 1} < \frac{1}{k^2 + 1}$. **20.** a) Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Funcția f este continuă pe $[k, k + 1]$ și derivabilă pe $(k, k + 1)$. Conform teoremei lui Lagrange, există $c_k \in (k, k + 1)$, astfel încât $f(k + 1) - f(k) = f'(c_k)(k + 1 - k) = f'(c_k) = -\frac{1}{2c_k\sqrt{c_k}}$. Cum $\frac{-1}{2k\sqrt{k}} < \frac{-1}{2c_k\sqrt{c_k}} <$

Scanned with OKEN Scanner

$< \frac{-1}{2(k+1)\sqrt{k+1}}$, rezultă că $\frac{-1}{2k\sqrt{k}} < f(k+1) - f(k) < \frac{-1}{2(k+1)\sqrt{k+1}}$ sau $\frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}} < f(x) - f(k+1) < \frac{1}{2k\sqrt{k}}$. b) Mai întâi, observăm că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, pentru că $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2(n+1)\sqrt{n+1}} > 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Având în vedere relația de la punctul b), deducem că $\frac{1}{2\sqrt{2}} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\frac{1}{3\sqrt{3}} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \ldots, \frac{1}{n\sqrt{n}} < 2\left(\frac{1}{(n-1)\sqrt{n-1}} - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$, de unde obținem $a_n - 1 < 2\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) < 2$, deci $a_n < 3$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Prin urmare, șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent (fiind strict crescător și mărginit superior). **21.** a) Funcția f este continuă pe intervalul $[k, k+1]$ și derivabilă pe $(k, k+1)$, deci, conform teoremei lui Lagrange, există $c_k \in (k, k+1)$, astfel încât $f(k+1) - f(k) = f'(c_k)(k+1-k) = f'(c_k) = \frac{1}{\sqrt[3]{c_k}}$. b) Avem $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} - (f(n+1) - f(n))$. Ținând seama de rezultatul de la punctul a), deducem că există $c_n \in (n, n+1)$, astfel încât $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{c_n}}$, ceea ce implică $a_{n+1} - a_n < 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Așadar, șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. **22.** a) Considerăm funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \ln t$. Fie $x > 0$. Deoarece funcția f este continuă pe $[x, x+1]$ și derivabilă pe $(x, x+1)$, rezultă, conform teoremei lui Lagrange, că există $c_x \in (x, x+1)$, astfel încât $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)(x+1-x) = f'(c_x) = \frac{1}{c_x}$. Având în vedere că $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c_x} < \frac{1}{x}$, deducem de aici relația $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$. b) Avem $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) < 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ (punctul a)), deci $(c_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. Folosind din nou relația de la punctul a), obținem: $1 > \ln 2 - \ln 1$; $\frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2$; $\frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3$; ...; $\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$, de unde rezultă că $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$, deci $a_n > \ln(n+1) - \ln n > 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce înseamnă că șirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este convergent pentru că este descrescător și mărginit inferior (teorema lui Weierstrass). c) Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+n} - \ln 2n\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) + \ln 2n - \ln n\right] = \lim\limits_{n\to\infty}(c_{2n} - c_n + \ln 2) = \ln 2$, pentru că $\lim\limits_{n\to\infty}(c_{2n} - c_n) = 0$. **23.** Cum f este continuă pe $[x, x+1]$ și derivabilă pe $(x, x+1)$, rezultă, conform teoremei lui Lagrange, că există $c_x \in (x, x+1)$, astfel încât $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)(x+1-x) = f'(c_x) = \frac{1}{\sqrt{1+c_x^2}}$. De aici deducem că $f(x+1) - f(x) \leq 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. **24.** Pentru $x = y$, inegalitatea este, evident, adevărată. Dacă $x \neq y$, putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $x < y$. Deoarece funcția f este continuă pe intervalul $[x, y]$ și derivabilă pe (x, y), rezultă, conform

Scanned with OKEN Scanner

teoremei lui Lagrange, că există $c \in (x, y)$, astfel încât $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) = \frac{-3c^4+3}{(e^4+3)^2}$. Avem $\frac{-3c^4+3}{(e^4+3)^2} \le 1$ și $\frac{-3c^4+3}{(e^4+3)^2} \ge -1$, deci $|f'(c)| \le 1$, de unde rezultă că $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le 1$ sau $|f(x)-f(y)| \le |x-y|$. **25.** a) $f'(t) = at^{a-1}$. b) Funcția f este continuă pe intervalul $[3, 4]$ și derivabilă pe $(3, 4)$, deci există $c_a \in (3, 4)$ astfel încât $f(4) - f(3) = f'(c_a)$, adică $4^a - 3^a = a(c_a)^{a-1}$. c) Conform punctului precedent, există $c_x \in (3, 4)$ și $d_x \in (5, 6)$, astfel încât $4^x - 3^x = x(c_x)^{x-1}$ și $6^x - 5^x = x(d_x)^{x-1}$. Așadar, ecuația considerată este echivalentă cu $x(c_x)^{x-1} = x(d_x)^{x-1}$ sau $x\left[\left(\frac{c_x}{d_x}\right)^{x-1} - 1\right] = 0$, de unde rezultă că $x = 0$ sau $\left(\frac{c_x}{d_x}\right)^{x-1} = 1$. Cum $\frac{c_x}{d_x} \in (0, 1)$, singura soluție a ecuației $\left(\frac{c_x}{d_x}\right)^{x-1} = 1$ este $x = 1$. Deci, $x \in \{0, 1\}$. **26.** Fie $x > 1$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $[x, x+1]$, deducem că există $c_x \in (x, x+1)$, astfel încât $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)(x+1-x) = f'(c_x) = \frac{1}{c_x \ln c_x}$. Astfel, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{f'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x \ln x}{c_x \ln c_x}$. Cum $\frac{x\ln x}{(x+1)\ln(x+1)} < \frac{x\ln x}{c_x \ln c_x} < 1$ și $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{(x+1)\ln(x+1)} = 1$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{c_x \ln c_x} = 1$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{f'(x)} = 1$. **27.** *Metoda I.* Fie $n > 0$. Deoarece funcția f este continuă pe $[n, n+1]$ și derivabilă pe $(n, n+1)$, rezultă, conform teoremei lui Lagrange, că există $c_n \in (n, n+1)$, astfel încât $f(n+1) - f(n) = f'(c_n)(n+1-n) = f'(c_n) = \frac{e^{c_n}(c_n - 1)}{c_n^2}$. Așadar, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(f(n) - f(n+1)) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^2 e^{c_n}(c_n-1)}{c_n^2}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{c_n^2} = 1$ (căci $\frac{n^2}{n^2} < \frac{c_n^2}{n^2} < \frac{(n+1)^2}{n^2}$) și $\lim\limits_{n\to\infty} e^{c_n}(c_n - 1) = \infty$, deducem că limita cerută este $-\infty$. *Metoda a II-a.*

$$\lim_{x\to\infty} x^2(f(x) - f(x+1)) = \lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^{x+1}}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1}((x+1)e^x - xe^{x+1}) = \lim_{x\to\infty} e^x(x+1-ex) = \lim_{x\to\infty} e^x((1-e)x + 1) = -\infty.$$

28. Fie $x > 1$. Aplicând teorema lui Lagrange pe intervalul $[x, x+1]$, deducem că există $c_x \in (x, x+1)$, astfel încât $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)(x+1-x) = f'(c_x) = -\frac{1}{c_x^2} e^{\frac{1}{c_x}}$. Prin urmare, $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(f(x+1) - f(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x^2}{c_x^2} e^{\frac{1}{c_x}} = -e^0 = -1$ (pentru că $\frac{x^2}{x^2} < \frac{c_x^2}{x^2} < \frac{(x+1)^2}{x^2}$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{c_x^2}{x^2} = 1$ și $\lim\limits_{x\to\infty} c_x = \infty$). **29.** *Metoda I.* Aplicând teorema lui Lagrange funcției $f: [x, x+1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \operatorname{arctg} t$, deducem că există $c_x \in (x, x+1)$, astfel încât $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)(x+1-x) = \frac{1}{1+c_x^2}$. Prin urmare, $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+c_x^2} = 1$ (căci $\frac{x^2}{1+(1+x)^2} < \frac{x^2}{1+c_x^2} < \frac{x^2}{1+x^2}$). *Metoda a II-a.* Avem $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x^2}} \overset{(5)}{=}$ *l'Hospital*

Scanned with OKEN Scanner

$$\overset{(5)}{\underset{l'Hospital}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+x^3}{2(x^2+1)(x^2+2x+2)} = 1.$$

3.15. Regulile lui l'Hospital

1. a) $-\frac{4}{3}$. b) 0. c) $-\frac{1}{2}$. d) ∞. e) $\frac{1}{2}$. f) 1. g) -3. h) $\frac{1}{3}$. i) 8. j) -2. k) $-\frac{1}{3}$. l) 0. **2.** a) 0. b) 0. c) 0. d) -1. e) 1. f) 1. **3.** a) ∞. b) $-\infty$. c) ∞. d) 0. e) $\frac{1}{2}$. f) $\frac{1}{2}$. **4.** a) $\sqrt[3]{e}$. b) e. c) $\frac{1}{\sqrt{e}}$. d) $\sqrt{2}$. **5.** a) 1. b) ∞. c) 1. d) $\frac{1}{e}$. **6.** a) 1. b) e. c) e. d) 1. **7.** a) Nu, deoarece nu există $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sin x)'$. b) Avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}} = 1$, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$. **8.** a) Funcția f este strict crescătoare $\left(f'(x) = 1+\frac{1}{x} > 0, \text{ dacă } x > 0\right)$, deci ecuația $f(x) = 0$ are cel mult o soluție. Cum f este funcție continuă și $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$, rezultă că există $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, astfel încât $f(x_0) = 0$. b) Deoarece x_0 este soluție a ecuației $f(x) = 0$, înseamnă că $x_0 + \ln x_0 = 0$ sau $\ln(e^{x_0}x_0) = 0$, adică $e^{x_0}x_0 = 1$. Avem $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{xe^x-1}{x-x_0} \overset{l'H}{\underset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to x_0}\frac{(x+1)e^x}{1} = x_0e^{x_0}+e^{x_0} = 1+e^{x_0} = 1+\frac{1}{x_0} = f'(x_0)$.

3.16. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor

1. Avem: $f(x) \geq 0 = f(0)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $f_s'(0) = -1 \neq 1 = f_d(0)$. **2.** Funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0, 1]$, deci $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$, iar $f'(x) = e^x \neq 0$, $x \in [0, 1]$. **3.** Vom folosi șirul lui Rolle. a) Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$. Rădăcinile derivatei, $f'(x) = 6(x^2 - 2x)$, sunt 0 și 2. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, f(0) = 3, f(2) = -5$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, avem:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$		$-$		$+$		$-$	$+$

Deci ecuația considerată are trei rădăcini reale: $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0, 2)$, $x_3 \in (2, \infty)$. b) $x_1 \in (\ln 2, \infty)$. c) $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (1, \infty)$. d) $x_1 \in (-\infty, -\sqrt{3})$, $x_2 \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $x_3 \in (\sqrt{3}, \infty)$. **4.** Avem: I. $m \in (-\infty, -2)$: o rădăcină, $x_1 \in (1, \infty)$; II. $m = -2$: trei rădăcini, $x_1 = x_2 = -1$ și $x_3 \in (1, \infty)$; III. $m \in (-2, 2)$: trei rădăcini, $x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_2 \in (-1, 1)$, $x_3 \in (1, \infty)$; IV. $m = 2$: trei rădăcini, $x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_2 = x_3 = 1$; V. $m \in (2, \infty)$: o rădăcină, $x_1 \in (-\infty, -1)$.

Scanned with OKEN Scanner

5. Vom folosi șirul lui Rolle. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=18x^2-\ln x-m$. Evident, f este derivabilă și $f'(x)=36x-\frac{1}{x}$. Derivata f' are o singură rădăcină $x=\frac{1}{6}\in(0,\infty)$ și $\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=\infty$, $f\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\ln 6-m$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. Răspunsul la cerința enunțului îl desprindem din tabelul:

x	0	$\frac{1}{6}$	$+\infty$	Concluzii
$f'(x)$		0		
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{2}+\ln 6-m$	$+\infty$	
$m\in\left(-\infty,\frac{1}{2}+\ln 6\right)$	$+$	$+$	$+$	Ecuația nu are nicio rădăcină reală.
$m=\frac{1}{2}+\ln 6$	$+$	0	$+$	Ecuația are o singură rădăcină reală: $x_1=\frac{1}{6}$.
$m\in\left(\frac{1}{2}+\ln 6,\infty\right)$	$+$	$-$	$+$	Ecuația are două rădăcini reale: $x_1\in\left(0,\frac{1}{6}\right)$, $x_2\in\left(\frac{1}{6},\infty\right)$.

6. Vom folosi șirul lui Rolle. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^{-x}-m$. Derivata funcției f, $f'(x)=1-e^{-x}$, are o singură rădăcină reală, $x=0$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, $f(0)=1-m$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$. Avem:

x	$-\infty$	0	$+\infty$	Concluzii
$f'(x)$		0		
$f(x)$	$+\infty$	$1-m$	$+\infty$	
$m\in(-\infty,1)$	$+$	$+$	$+$	Ecuația nu are nicio soluție.
$m=1$	$+$	0	$+$	Ecuația are o singură soluție: $x=0$.
$m\in(1,\infty)$	$+$	$-$	$+$	Ecuația are două soluții: $x_1<0$ și $x_2>0$.

7. Vom folosi șirul lui Rolle. Fie funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-m$. Derivata $g'(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{e^x}, x<1\\ \frac{2-x}{e^x}, x>1\end{cases}$ are o singură rădăcină reală: $x=2$. Avem:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$-$	$\|$	$+$ $+$	0	$-$	$-$
$g(x)$	∞		$-m$		$\frac{1}{e^2}-m$		$-m$

Din tabel deducem că: pentru $m<0$, ecuația nu are nicio soluție reală; dacă $m=0$, avem o soluție, $x_1=1$; dacă $m\in\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$, ecuația are trei soluții, $x_1\in(-\infty,1)$, $x_2\in(1,2)$, $x_3\in(2,\infty)$; pentru $m=\frac{1}{e^2}$, ecuația are două

Scanned with OKEN Scanner

soluții, $x_1 \in (-\infty, 1)$ și $x_2 = 2$; pentru $m > \frac{1}{e^3}$, ecuația are o soluție $x_1 \in (-\infty, 1)$. **8.** Folosim șirul lui Rolle. Fie funcția $g : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - m$. Derivata $g'(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}(x+3)}{(x+2)^2}, x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \\ \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}, x \in (0, \infty) \end{cases}$ are o singură rădăcină reală, $x = -3$. Avem:

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	$\|$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$-m-e^3$	$\nearrow$	$-\infty$	$\searrow$	∞	$\nearrow$	∞
							$\frac{1}{2}-m$		

Pentru $m \in (-\infty, -e^3)$, ecuația are două rădăcini, $x_1 \in (-\infty, -3)$, $x_2 \in (-3, -2)$; pentru $m = -e^3$, ecuația are o rădăcină, $x_1 = -3$; pentru $m \in \left(-e^3, \frac{1}{2}\right)$, ecuația nu are nicio rădăcină; pentru $m = \frac{1}{2}$, avem o singură rădăcină, $x = 0$; dacă $m \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, atunci sunt două rădăcini, $x_1 \in (-2, 0)$, $x_2 \in (0, \infty)$. **9.** $m \in (-\infty, 0) \cup [e, \infty)$. **10.** a) Fie $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, $x \in (-1, 1)$. Deoarece $f'(x) = 0$, oricare ar fi $x \in (-1, 1)$ și $f(0) = \frac{\pi}{2}$, rezultă, conform primei consecințe a teoremei lui Lagrange, că $f(x) = \frac{\pi}{2}$, oricare ar fi $x \in (-1, 1)$. **11.** $f(x) = g(x) + \frac{3\pi}{4}$, $x \in (1, \infty)$. **12.** a) Evident, $f'(x) = g'(x) = (1 + x)^n$. b) Conform primei consecințe a teoremei lui Lagrange, din relația $f'(x) = g'(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ (f, g sunt derivabile pe $\mathbb{R}$), rezultă că $f(x) = g(x) + c$, $x \in \mathbb{R}$. Cum $c = f(0) - g(0) = -\frac{1}{n+1}$, deducem că $f(x) = g(x) - \frac{1}{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$. c) Luând $x = 1$ în relația de la punctul b), obținem $\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{(1+1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$. **13.** a) crescătoare. b) crescătoare. c) crescătoare. d) descrescătoare. e) descrescătoare. f) descrescătoare. **14.** a) f este crescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, -1]$ și $[1, \infty)$, iar f este descrescătoare pe $[-1, 1]$; $x = -1$ este punct de maxim, $x = 1$ este punct de minim. b) g este descrescătoare pe $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ și crescătoare pe $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$; $x = \frac{1}{e}$ este punct de minim. c) h este descrescătoare pe $(-\infty, 1]$ și crescătoare pe $[1, \infty)$; $x = 1$ este punct de minim. d) p este descrescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, -1]$ și $[1, \infty)$, iar pe $[-1, 1]$ este crescătoare; $x = -1$ este punct de minim, iar $x = 1$ este punct de maxim. **15.** Funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, \ln a]$ și crescătoare pe $[\ln a, \infty)$. **16.** Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = m - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{mx^2 - 2x + m}{x^2+1}$. Ea este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $f'(x) \le 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, adică $m < 0$ și $\Delta = 4 - 4m^2 \le 0$. Deci, $m \in (-\infty, -1]$. **17.** Funcția f are exact un punct de minim, $x = 0$. **18.** Funcția f are un punct de maxim, $x = 0$. **19.** $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ este punct de maxim și $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ este punct de minim. **20.** Funcția f are două puncte de extrem local: $x = -3$ și $x = 0$. **21.** Cum funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$,

Scanned with OKEN Scanner

rezultă că, dacă $x = 3$ este punct de extrem, atunci $f'(3) = 0$. Astfel, obținem $a = -\frac{8}{3}$. Pentru $a = -\frac{8}{3}$, din semnul lui f' deducem că $x = 3$ este într-adevăr punct de extrem. **22.** Deoarece funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, rezultă că punctele ei de extrem se găsesc printre punctele critice (zerourile derivatei). Avem $f'(x) = \frac{x^3 - 3x + a}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$. Pentru ca f să aibă trei puncte de extrem local trebuie ca funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - 3x + a$ să aibă trei rădăcini reale. Evident, $g'(x) = 3x^2 - 3$ și atunci:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$a+2$	$\searrow$	$a-2$	$\nearrow$	$+\infty$

Condiția din enunț revine la $a + 2 > 0$ și $a - 2 < 0$, adică $a \in (-2, 2)$, valori care satisfac cerința problemei.
23. a) Tabelul de variație a funcției f este:

x	0		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2} + \ln 6$	$\nearrow$	$+\infty$

b) Condiția din enunț este îndeplinită dacă și numai dacă $\frac{1}{2} + \ln 6 \geq a$, adică $a \in \left(-\infty, \frac{1}{2} + \ln 6\right]$.

24. a) Considerăm funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 2x - 1$. Cum $g'(x) = e^x - 1$, avem:

x		0	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Din tabelul de variație rezultă că $g(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, adică $f(x) \geq 2x + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. b) Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - mx - 1$. Condiția din enunț este echivalentă cu $h(x) \geq h(0)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă că $x = 0$ este punct de minim pentru h. Deoarece h este derivabilă în 0 și 0 este punct interior lui $\mathbb{R}$, rezultă, conform teoremei lui Fermat, că $h'(0) = 0$, deci $m = 2$. Faptul că $m = 2$ este într-adevăr soluție a fost demonstrat la punctul a). **25.** Fie funcția $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - a - 2 \ln x = x^2 + 1 - a - 2 \ln x$. Cum $g'(x) = 2\left(x - \frac{1}{x}\right)$, rezultă că $x = 1$ este punct de minim pentru g, deci $g(x) \geq g(1) = 2 - a$, oricare ar fi $x > 0$. Prin urmare, $g(x) \geq 0$, oricare ar fi $x > 0$, dacă și numai dacă $2 - a \geq 0$. Cel mai mare număr real cu această proprietate este $a = 2$.
26. Ecuația $f'(x) = 0$ are o singură soluție, $x = -1$. Avem:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

Scanned with OKEN Scanner

Din tabel deducem că $0 < f(x) \le \frac{\pi}{2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. **27.** $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. **28.** $\operatorname{Im} f = [-1, 1]$. **29.** Deoarece $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \ge 0$, oricare ar fi $x \in [1, \infty)$, și f' nu se anulează pe un interval (propriu) inclus în $[1, \infty)$, rezultă că f este strict crescătoare, deci injectivă. Funcția f este surjectivă pentru că este continuă și $f(1) = 1$, iar $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

30. Deoarece $f'(x) = \frac{3x^4}{1+x^2} \ge 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, și f' nu se anulează decât pentru $x = 0$, rezultă că f este strict crescătoare, deci injectivă. Funcția f este și surjectivă, căci este continuă și $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

31. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$. Deoarece $f'(x) = e^x - 1$, avem:

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Din tabel rezultă că $f(x) \ge 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, deci $e^x \ge x + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

32. Inegalitatea $\ln(1 + x) \le x$ este echivalentă cu $1 + x \le e^x$ ($x \in [0, 1]$), care a fost demonstrată la problema anterioară. Pentru a dovedi cealaltă inegalitate, considerăm funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}$. Derivata ei este $f'(x) = \frac{x^2}{1+x} \ge 0$, $x \in [0, 1]$. Deci funcția f este crescătoare și, cum $f(0) = 0$, rezultă că $f(x) \ge 0$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$. **33.** Considerăm funcția $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Avem $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$, unde $g(x) = x\cos x - \sin x$. Cum $g'(x) = -x\sin x < 0$, $(\forall) x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă că g este strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, deci $g(x) < \lim\limits_{x \searrow 0} g(x) = 0$. Prin urmare, $f'(x) < 0$, $(\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, ceea ce înseamnă că f este descrescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Cum $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 1$ și $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$, rezultă cerința problemei.

34. Considerăm funcția $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$. Derivata ei, $f'(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$, ia numai valori pozitive, deci f este crescătoare. Cum $f(1) = 0$, rezultă că $f(x) \ge 0$, oricare ar fi $x \in [1, \infty)$. **35.** Fie funcția $f: (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)^\alpha - 1 - \alpha x$, unde $\alpha > 1$. Derivata lui f este $f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1} - \alpha$, iar ecuația $f'(x) = 0$ are o singură soluție $x = 0$. Așadar, avem:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Scanned with OKEN Scanner

Din tabelul de variație a funcției f rezultă că $f(x) > 0$, oricare ar fi $x \in (-1, \infty) - \{0\}$, adică $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$, oricare ar fi $x \in (-1, \infty) - \{0\}$. **36.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$. Observăm că $f'(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}$ și $f''(x) \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$. Cum $f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $f'(0) = f(0) = 0$, avem:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		0	$\nearrow$	

Așadar, $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. **37.** Considerăm funcția $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$. Constatăm că $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$, $f''(x) = x - \sin x$ și $f''(x) \geq 0$, pentru $x \geq 0$. Cum $f'(0) = 0$, rezultă că $f'(x) \geq 0$, pentru $x \geq 0$. Dar și $f(0) = 0$, deci $f(x) \geq 0$, pentru $x \geq 0$. **38.** a) Funcția f este derivabilă pe $(0, \infty)$ și $f'(x) = 1 - \frac{e}{x}$. Intervalele pe care f este monotonă se pot observa din tabelul de variație a funcției f:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

b) Din tabelul de la punctul a) rezultă că $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x > 0$. c) Dacă $f(x) \geq 0$, atunci $x \geq e \ln x$ sau $\frac{x}{e} \geq \ln x$, de unde obținem $e^{\frac{x}{e}} \geq x$ sau, ridicând la puterea e, $e^x \geq x^e$ $(x > 0)$. d) Considerăm funcția $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x - \frac{x^{e+1}}{e+1} - 1$. Avem $g'(x) = e^x - x^e \geq 0$, oricare ar fi $x > 0$, deci g este strict crescătoare. Cum $\lim\limits_{x \searrow 0} g(x) = 0$, deducem de aici că $g(x) > 0$, oricare ar fi $x > 0$. **39.** a) Punctele de extrem sunt $x_1 = -1$ și $x_2 = 1$. b) Funcția g are 4 puncte de inflexiune. **40.** a) $f'(x) = \frac{x(a-2b)+2a+b}{2(x^2+x+1)^{3/2}}$. b) Cum f este derivabilă, rezultă că f este crescătoare dacă și numai dacă $f'(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, adică $x(a-2b) + 2a - b \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, ceea ce revine la $a - 2b = 0$ și $2a - b \geq 0$ sau $a = 2b$, $b \geq 0$. c) Pentru $a = 2$ și $b = 1$, funcția f este strict crescătoare. Deoarece f este continuă și $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$, rezultă că $\operatorname{Im} f = (-2, 2)$. **41.** a) $y = 0$. c) **4.** **42.** b) $x = 0$. c) $A(4, f(4))$ este punctul de minim și $f(4) < 0$. **43.** c) Inegalitatea este echivalentă cu $f(\sqrt{a}) \geq 0$, $a \geq 0$. **44.** Funcția f este continuă pe $[-1, 1]$ și derivabilă pe $(-1, 1)$, iar $f'(x) = \arcsin x + \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}$, oricare ar fi $x \in (-1, 1)$. Cum $\lim\limits_{x \searrow -1} f'(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{-2}{0_+} = -\infty$, rezultă că f nu este derivabilă în $x = -1$. (Am folosit a treia consecință a teoremei lui Lagrange: dacă $f : I \to \mathbb{R}$ (I – interval) are proprietățile: f e continuă pe I, f e derivabilă pe $I - \{x_0\}$ și există $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$, atunci $f'(x_0) = l$.) Pe de altă parte, $\lim\limits_{x \nearrow 1} \left(\arcsin x - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = \frac{\pi}{2}$, deci $f'(1) = \frac{\pi}{2}$, adică f este derivabilă în $x = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

45. Având în vedere că $\{x\} = x - [x]$, putem scrie: $f(x) = \begin{cases} x(1-x), x \in [0,1) \\ (x-1)(2-x), x \in [1,2) \\ (x-2)(3-x), x \in [2,3) \\ 0, x = 3 \end{cases}$. Se arată cu uşurinţă că f este continuă pe $[0, 3]$ şi derivabilă pe $[0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3)$. Conform celei de-a treia consecinţe a teoremei lui Lagrange, avem: $f_s'(1) = \lim\limits_{x \nearrow 1} f'(x) = \lim\limits_{x \nearrow 1}(1-2x) = -1$, $f_d'(1) = \lim\limits_{x \searrow 1} f'(x) = \lim\limits_{x \searrow 1}(-2x+3) = 1$, $f_s'(2) = \lim\limits_{x \nearrow 2} f'(x) = \lim\limits_{x \nearrow 2}(-2x+3) = -1$, $f_d'(x) = \lim\limits_{x \searrow 2} f'(x) = \lim\limits_{x \searrow 2}(-2x+5) = 1$, $f'(3) = f_s'(3) = \lim\limits_{x \nearrow 3} f'(x) = \lim\limits_{x \nearrow 3}(-2x+5) = -1$, deci funcţia f nu este derivabilă în $x = 1$ şi $x = 2$. **46.** Observăm că $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1]$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, deci f este bine definită. Evident, f este continuă pe $\mathbb{R}$ (fiind compunerea a două funcţii continue). Ţinând seama de regulile de derivare ale funcţiilor elementare, deducem că f este derivabilă pe $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ şi $f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{1+x^2}, x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \frac{2}{1+x^2}, x \in (-1, 1) \end{cases}$. Conform celei de-a treia consecinţe a teoremei lui Lagrange, avem: $f_s'(-1) = \lim\limits_{x \nearrow -1} f'(x) = -1$ şi $f_d'(-1) = \lim\limits_{x \searrow -1} f'(x) = 1$, deci f nu este derivabilă în $x = -1$. Analog, arătăm că f nu este derivabilă în $x = 1$. **47.** Dacă f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, atunci, în mod necesar, f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci şi în $x = 1$. Astfel, $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = f(1)$, de unde obţinem $a + b = e$. Evident, $f'(x) = \begin{cases} xe^x + e^x, x < 1 \\ a, x > 1 \end{cases}$. Pentru $a + b = e \in \mathbb{R}$, conform celei de-a treia consecinţe a teoremei lui Lagrange, avem: $f_s'(1) = \lim\limits_{x \nearrow 1} f'(x) = 2e$ şi $f_d'(1) = \lim\limits_{x \searrow 1} f'(x) = a$. Prin urmare, f este derivabilă în $x = 1$ dacă şi numai dacă $a = 2e$ şi $b = -e$, valori care satisfac cerinţa problemei. **48.** a) $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. b) Întrucât $x_1 > x_2$ (căci $x_1 = 0$, $x_2 = -\pi$) şi f este strict crescătoare, rezultă că $f(x_1) > f(x_2)$, deci $x_2 > x_3$, apoi $f(x_2) > f(x_3)$, deci $x_3 > x_4$ etc. Astfel, demonstrăm prin inducţie că $x_n > x_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), adică şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător. Cum $x_n > -\frac{\pi}{2} - \pi$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit inferior. Prin urmare, şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent. **49.** a) $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2(2x+3)(2x+1)} > 0$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$. b) Cum f este strict crescătoare şi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, rezultă că $f(x) < 0$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$. c) Observăm că $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(n + \frac{3}{2}\right) + \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) = f(n) < 0 \, (n \in \mathbb{N}^*)$, deci şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător. **50.** a) Deoarece $f'(x) = \ln x + 1$, $x > 0$, avem:

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	

Scanned with OKEN Scanner

b) Observăm că $x_{n+1} = (x_n)^{x_n}$ și arătăm, prin inducție, că $x_n \in (0, 1)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Cum $\frac{x_{n+1}}{x_n} = (x_n)^{x_n - 1} = \left(\frac{1}{x_n}\right)^{1-x_n} > 1$ (căci $\frac{1}{x_n} > 1$ și $1 - x_n > 0$), rezultă că $x_{n+1} > x_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, adică șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător. Așadar, șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent. **51.** a) Funcția f_n este derivabilă și $f_n'(x) = n(x^{n-1} - 1)$. Din tabelul următor reiese concluzia.

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	1	$\searrow$	$2-n$	$\nearrow$	

b) Având în vedere că f_n este strict descrescătoare și continuă pe $[0, 1]$, iar $f_n(0) \cdot f_n(1) < 0$, rezultă că există un unic număr $a_n \in (0, 1)$, astfel încât $f_n(a_n) = 0$. Analog demonstrăm că există un singur număr $b_n \in (1, \infty)$ cu proprietatea $f_n(b_n) = 0$. c) Cum $f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1 < 0$, rezultă, din tabelul de la punctul a), că $0 < a_n < \frac{2}{n}$, deci $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. **52.** a) Deoarece $f_n''(x) = n \sin^{n-2} x (n - 1 - n \sin^2 x)$ și $\sin x \neq 0$, oricare ar fi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $f_n''(x) = 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ dacă și numai dacă $n - 1 - n \sin^2 x = 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Această ecuație are o soluție unică $x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\sin x_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$. Avem:

x	0		x_n		$\pi/2$
$f_n''(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$\cup$		$f_n(x_n)$		$\cap$

Din tabel reiese că x_n este într-adevăr punct de inflexiune. b) Deoarece $\lim\limits_{n \to \infty} \sin x_n = 1$, deducem că $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} (\sin x_n)^n = \lim\limits_{n \to \infty} \left[(1 + \sin x_n - 1)^{\frac{1}{\sin x_n - 1}}\right]^{n(\sin x_n - 1)} = e^{\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{\frac{n-1}{n}} - 1\right) n} = e^{-\frac{1}{2}}$. **53.** a) Deoarece $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, și f' nu este identic nulă pe niciun interval (propriu) din $\mathbb{R}$, rezultă că f este strict crescătoare.

b) Fie funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - n$. Funcția g este strict crescătoare, deci g are cel mult o rădăcină. Cum $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$ și g este continuă, rezultă că g are cel puțin o rădăcină reală. Prin urmare, ecuația $f(x) = n$ are exact o rădăcină reală x_n. c) Din relația $x_n - \sin x_n = n$ deducem că $x_n = n + \sin x_n \geq n - 1$, de unde obținem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \geq \lim\limits_{n \to \infty} (n - 1) = \infty$, adică șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este nemărginit. Din egalitatea $x_n = n + \sin x_n$ deducem că $n - 1 \leq x_n \leq n + 1$, deci $\frac{n-1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$, ceea ce conduce la concluzia că $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{n} = 1$. **54.** a) Deoarece $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, rezultă că f este crescătoare. b) Demonstrăm prin inducție. Evident, $x_0 = 0 \in$

Scanned with OKEN Scanner

$\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Presupunem că, pentru un $k \in \mathbb{N}$, avem $x_k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Deoarece:

x	0		$\pi/2$
$f'(x)$		$+ \quad + \quad +$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\pi/2$

înseamnă că $f(x) \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, oricare ar fi $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Deci, cum $x_k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă că $x_{k+1} = f(x_k) \in$ $\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; c) Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent, pentru că este crescător și mărginit. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, $l \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Trecând la limită în relația de recurență, obținem $l = l + \cos l$, de unde rezultă că $l = \frac{\pi}{2}$. **55.** a) Funcția f_n este convexă, pentru că $f_n''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$, oricare ar fi $x > 0$. b) Avem $f_n'(x) = nx^{n-1} - n$ și:

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	-1	$\searrow$	$-n$	$\nearrow$	∞

Deci, există un singur număr $x_n \in (1, \infty)$, astfel încât $f_n(x_n) = 0$. c) Cum $f_n(n) = n^n - n^2 - 1 > 0$, pentru $n \geq 3$, rezultă că $1 < x_n < n$. Astfel, avem $1 < x_n < \sqrt[n]{1 + nx_n} < \sqrt[n]{1 + n^2}$, de unde obținem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

56. a) Ecuația $f_n'(x) = 0$ are o singură soluție $x_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$ și avem:

x	0		x_n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$\searrow$		$f_n(x_n)$		$\nearrow$

Deci f_n are un punct de extrem local. b) Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e$. **57.** a) Funcția f este strict crescătoare, pentru că $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. b) Observăm că $x_2 = f(x_1) = \ln(1 + \sqrt{2}) < x_1$. De aici, având în vedere că f este strict crescătoare, rezultă $f(x_2) < f(x_1)$, adică $x_3 < x_2$. Apoi demonstrăm, prin inducție, că $0 < x_{n+1} < x_n$. Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent, deoarece este descrescător și mărginit. **58.** Deoarece $f''(x) = \left(\frac{1}{x} + (1 + \ln x)^2\right) e^{x \ln x} > 0$, oricare ar fi $x > 0$, rezultă că f este convexă. **59.** Funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$, pentru că $f''(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. **60.** Deoarece $f''(x) = \frac{4(x+1)}{(x^2+2x)^2} < 0$, oricare ar fi $x \in$ $\in (-\infty, -2)$, rezultă că f este concavă pe $(-\infty, -2)$. **61.** Funcția f este de două ori derivabilă și $f''(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $x > 0$. Din tabelul următor rezultă concluzia.

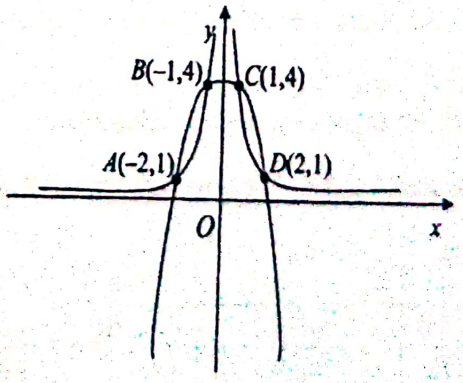
Scanned with OKEN Scanner

x	0		e		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\cup$		$\frac{1}{2}$	$\cap$	

62. Funcția f este de două ori derivabilă și $f''(x)=\frac{8x}{(4-x^2)^2}$. Punctul de inflexiune este $O(0, 0)$. **63.** a) Funcția f este convexă pentru că $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} > 0$, oricare ar fi $x > -1$. b) Dacă f este convexă, atunci $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{f(a)+f(b)}{2}$, oricare ar fi $a, b > -1$. Luând $a = 2x$, $b = 2y$, $x, y \ge 0$, obținem $f(x+y) \le \le\frac{f(2x)+f(2y)}{2}$. **64.** Cum $f''(x)=\frac{x(2a-1)+a}{x^2(x+1)^2}$, rezultă că f este convexă dacă și numai dacă $x(2a-1)+a\ge 0$, oricare ar fi $x > 0$, adică $2a-1\ge 0$ și $a\ge 0$. Deci, $a\in\left[\frac{1}{2},\infty\right)$.

3.17. Reprezentarea grafică a funcțiilor

1. a) Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$ și derivabilă pe $\mathbb{R}^*$. Cum $f'_s(0) = -2$, iar $f'_d(0) = 2$, rezultă că graficul funcției f are un singur punct unghiular, și anume $A(0, 1)$. b) Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$ și derivabilă pe $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $f'=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\cdot|1-x^2|}$, $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$. Cum $f'_s(-1) = \lim\limits_{x\nearrow -1} f'(x) = -1$, $f'_d(-1) = \lim\limits_{x\searrow -1} f'(x) = 1$, $f'_s(1) = \lim\limits_{x\nearrow 1} f'(x) = 1$ și $f'_d(1) = \lim\limits_{x\searrow 1} f'(x) = -1$, rezultă că graficul lui f are două puncte unghiulare $A_1\left(-1,-\frac{\pi}{2}\right)$ și $A_2\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$. **2.** a) $A(1, 1)$. b) $A(-2, 0)$. **3.** Abscisele punctelor de intersecție dintre cele două grafice sunt soluțiile ecuației $f(x) = g(x)$ sau $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, deci $x\in\{-2,-1,1,2\}$. Punctele de intersecție sunt: $A(-2, 1)$, $B(-1, 4)$, $C(1, 4)$, $D(2, 1)$. Reprezentând graficele celor două funcții, obținem figura alăturată.



Observăm că $g(x) \le f(x)$ dacă și numai dacă $x\in(-2,-1)\cup(1,2)$.

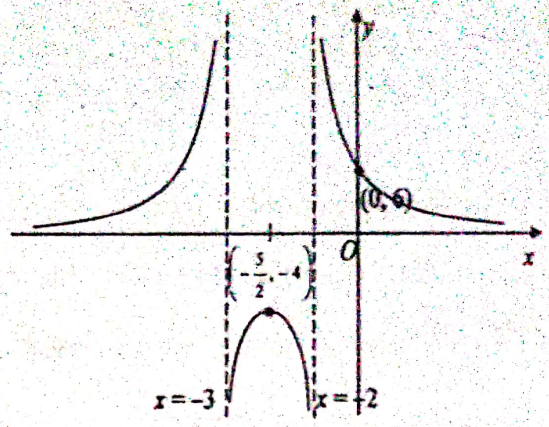
Observație. Inecuația $g(x) \le f(x)$ se poate rezolva algebric (în $\mathbb{R}^*$) astfel: $g(x)\le f(x)\Leftrightarrow\frac{4}{x^2}\le -x^2+5\Leftrightarrow x^4-5x^2+4\le 0\Leftrightarrow(x^2-1)(x^2-4)\le 0; x\in(-2,-1)\cup(1,2)$.

x	$-\infty$		-2		-1		1		2	$+\infty$
x^2-1	$+$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-4	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x^2-1)(x^2-4)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Scanned with OKEN Scanner

4. Avem:

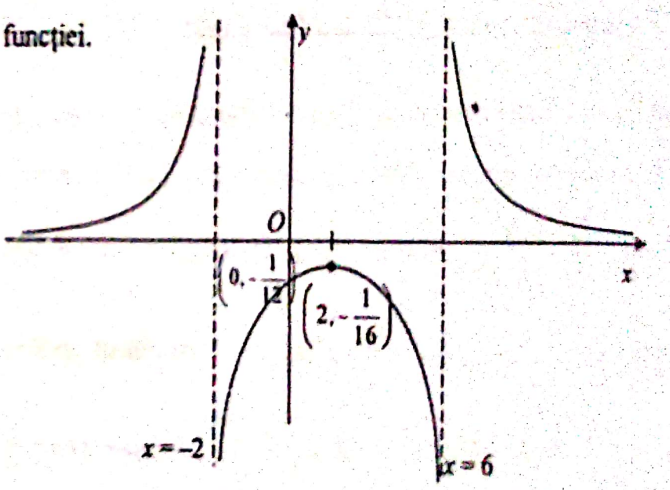
x	$-\infty$		-3		$-\frac{5}{2}$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow +\infty$	$-\infty$	$\nearrow -4$		$\searrow -\infty$	$+\infty$	$\searrow 0$	



5. a) Pentru ca dreapta cu ecuația $x = -2$ să fie asimptotă verticală este necesar și suficient ca $(-2)^2 + a \cdot (-2) + b = 0$, deci $2a - b = 4$. A doua condiție revine la $f'(2) = 0$, adică $a = -4$. Așadar, $a = -4$, $b = -12$. b) Pentru $a = -4$, $b = -12$, avem $f: \mathbb{R} \setminus \{-2, 6\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x - 12} = \dfrac{1}{(x-6)(x+2)}$.

Prezentăm în continuare tabelul de variație și graficul funcției.

x	$-\infty$		-2		2		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow +\infty$	$-\infty$	$\nearrow -\frac{1}{16}$		$\searrow -\infty$	$+\infty$	$\searrow 0$	

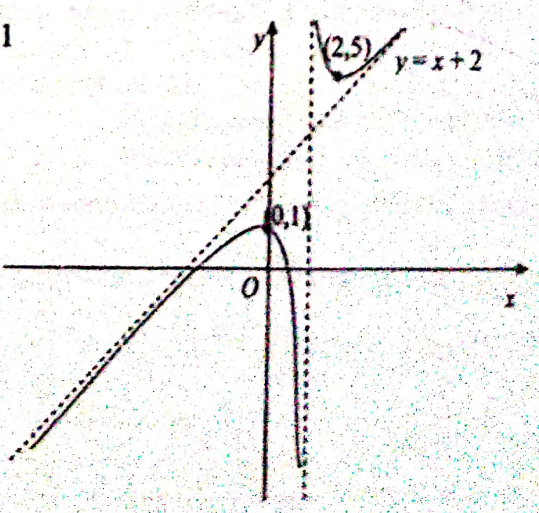


6. a) Condițiile din enunț sunt echivalente cu $f'(0) = 0$ și $f(0) = 1$ sau $a + b = 0$ și $b = -1$, de unde obținem $a = 1$, $b = -1$;

b) Pentru $a = 1$, $b = -1$, funcția f are formula $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$.

Avem:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow -\infty$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

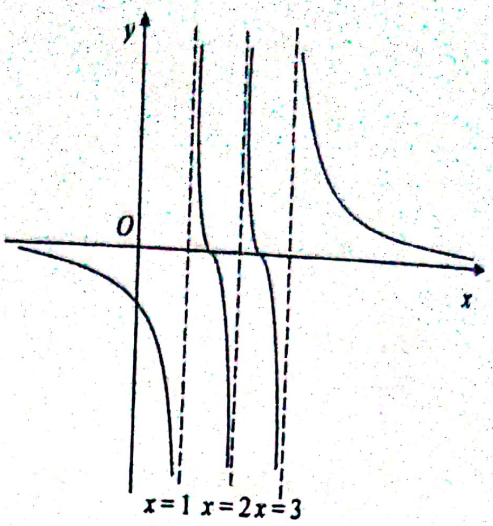


Dreapta $y = x + 2$ este asimptotă oblică pentru graficul funcției.

Scanned with OKEN Scanner

7. a) Tabelul de variație a funcției f este:

x	$-\infty$		1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\searrow 0$



b) Având în vedere reprezentarea grafică a funcției f, deducem că:

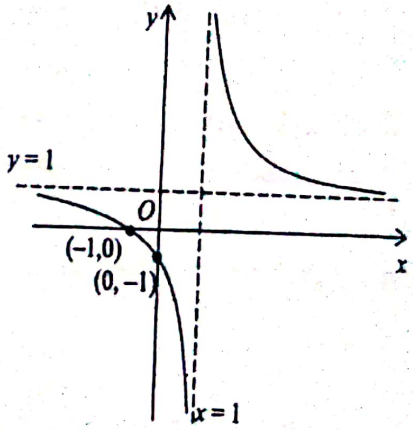
1) pentru $a < 0$, ecuația are trei rădăcini:
$x_1 \in (-\infty, 1), x_2 \in (1, 2), x_3 \in (2, 3)$;

2) dacă $a = 0$, ecuația are două rădăcini:
$x_1 \in (1, 2), x_2 \in (2, 3)$;

3) pentru $a > 0$, ecuația are trei rădăcini:
$x_1 \in (1, 2), x_2 \in (2, 3), x_3 \in (3, \infty)$.

8. a) Funcția f_1 are formula $f_1(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Avem:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			$-$		
$f(x)$	1	$\searrow$	0 $-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	1

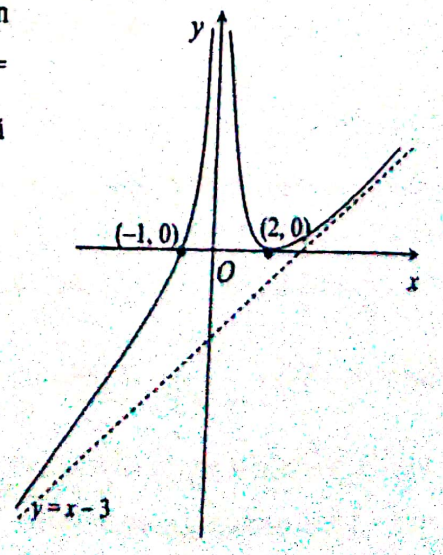


b) Dacă $A(\alpha, \beta)$ este punctul fix, atunci $f_m(\alpha) = \beta$, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}^*$, adică $m(2\alpha + 1 - \beta) - \alpha - \alpha\beta = 0$, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}^*$, deci: $\begin{cases} 2\alpha + 1 + \beta = 0 \\ \alpha(1 + \beta) = 0 \end{cases}$. Rezolvând sistemul, obținem $\alpha = 0, \beta = -1$.

Așadar, punctul fix este $A(0, -1)$.

9. a) Cum funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$, ea admite un extrem local în $x = 2$, dacă $f'(2) = 0$, deci $m = 4$. b) Pentru $m = 4$, avem $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = x - 3 + \dfrac{4}{x^2}$. Graficul funcției are o asimptotă oblică $y = x - 3$. Parcurgând etapele reprezentării grafice a funcției f, obținem:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow \infty$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞



c) Observăm că $x = 0$ nu este soluție. Pentru $x \in \mathbb{R}^*$, ecuația este echivalentă cu $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = \lambda$, adică $f(x) = \lambda$ (cu $m = 4$). Deci numărul de

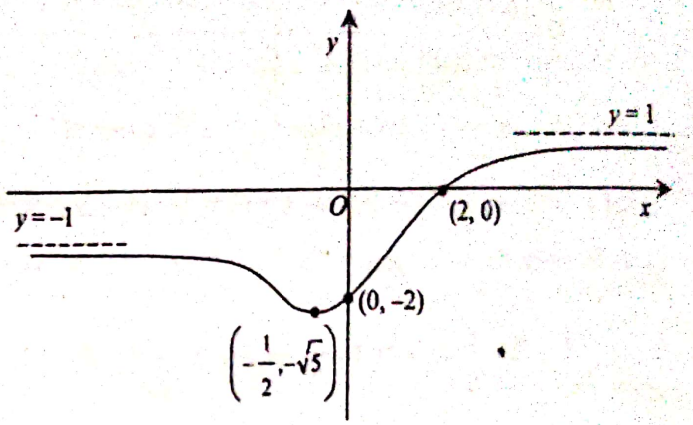
Scanned with OKEN Scanner

rădăcini ale ecuației considerate este egal cu numărul punctelor de intersecție dintre graficul lui f (cu $m = 4$) și dreapta $y = \lambda$: 1) dacă $\lambda < 0$, atunci ecuația are o rădăcină $x_1 \in (-\infty, -1)$; 2) dacă $\lambda = 0$, rădăcinile ecuației sunt $x_1 = -1$ și $x_2 = x_3 = 2$; 3) dacă $\lambda > 0$, atunci ecuația are 3 rădăcini: $x_1 \in (-1, 0)$, $x_2 \in (0, 2)$ și $x_3 \in (2, \infty)$.

10. a) Avem:

x	$-\infty$		x_1		$-1/2$		x_2		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		0		$+$		
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$f(x_1)$	↘	$-\sqrt{5}$	↗	$f(x_2)$	↘	1

b) Ecuația considerată este echivalentă cu $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} = m$, adică $f(x) = m$.



Dacă $m \in (-\infty, -\sqrt{5})$, ecuația nu are soluție.

Dacă $m = -\sqrt{5}$, ecuația are o soluție, $x = -\frac{1}{2}$.

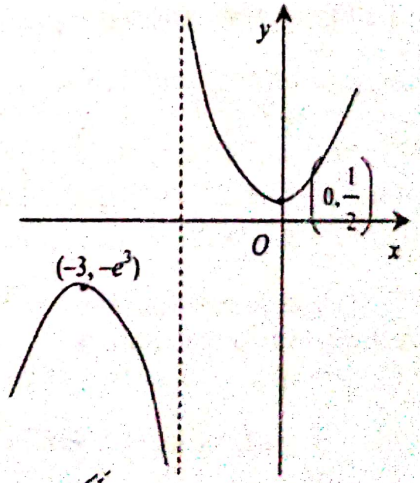
Dacă $m \in (-\sqrt{5}, -1)$, ecuația are două soluții:

$x_1 \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $x_2 \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

Dacă $m \in [-1, 1)$, ecuația are o soluție, $x_1 \in (0, \infty)$.
Dacă $m \in [1, \infty)$, ecuația nu are soluție.

11. Avem următorul tabel de variație:

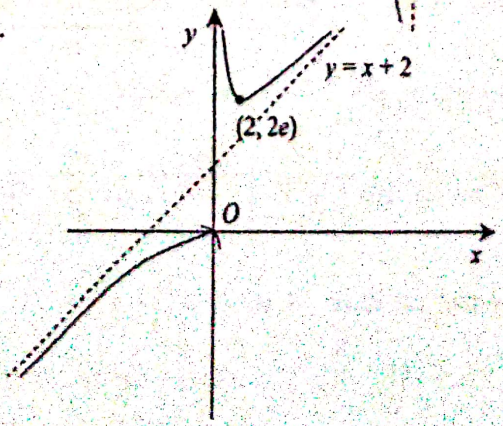
x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$\|$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-e^3$	↘	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	∞



Graficul funcției f este schițat în figura alăturată.

12. Avem:

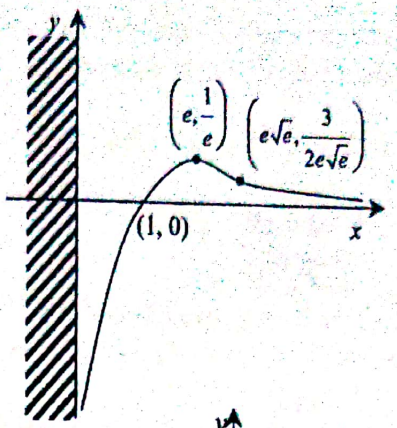
x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	$+\infty$ ↘	$2e$	↗	∞



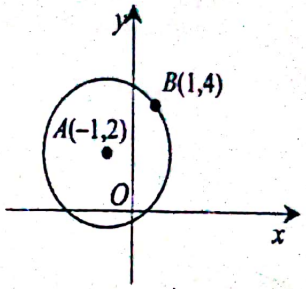
Scanned with OKEN Scanner

13. Avem:

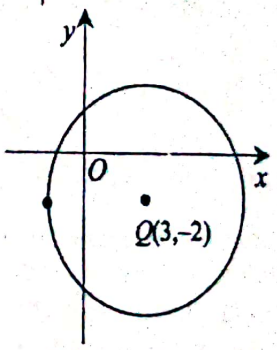
x	$-\infty$		1		e		$e\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		0		$-$		
$f''(x)$			$-$			$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	$\searrow$	0



14. Raza cercului este $AB = 2\sqrt{2}$, iar ecuația sa este $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 8$.

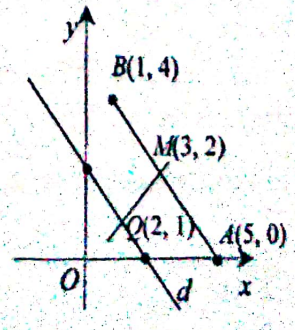


15. Ecuația cercului se poate scrie astfel: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$, de unde rezultă că centrul cercului este $Q(3, -2)$ și raza este 5.



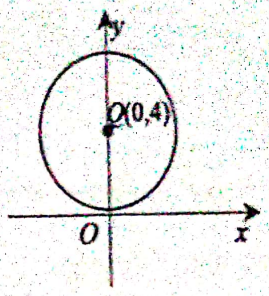
16. Deoarece triunghiul AOB este dreptunghic în O, rezultă că centrul cercului circumscris este mijlocul lui AB, adică $O'\left(-3, \frac{3}{2}\right)$, iar ortocentrul este $O(0, 0)$. Cum punctul G aparține medianei OO', rezultă că O, G, O' sunt coliniare. Ecuația cercului circumscris lui AOB este $(x+3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$. **17.** a) Mediatoarea lui $[AB]$ are ecuația $y - 2 = -\frac{1}{2}(x+1)$, iar mediatoarea lui $[BC]$ are ecuația $x = \frac{1}{2}$. b) Rezolvând sistemul format din ecuațiile mediatoarelor de la punctul a), obținem coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC, $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$. Raza cercului este $r = QA = \frac{5\sqrt{5}}{4}$.

18. a) Arătăm, prin calcul, că $AB^2 + BC^2 = CA^2$. Deci triunghiul ABC este dreptunghic în B. b) Centrul este mijlocul ipotenuzei AC, $Q\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, iar raza este egală cu $\frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

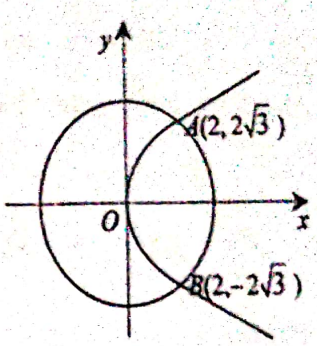


19. a) Ecuația mediatoarei segmentului AB este: $y = x - 1$, iar punctul de intersecție dintre aceasta și d are coordonatele (2, 1). b) Ecuația cercului este: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$.

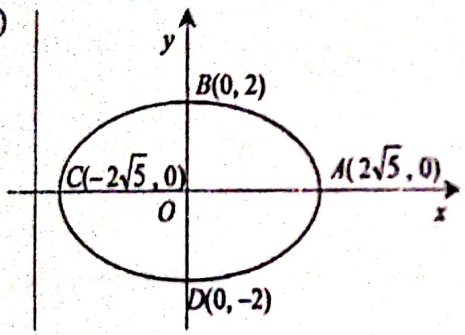
20. a) Centrul cercului are coordonatele (0, 4), iar raza este egală cu 4.
b) Punctul A nu aparține cercului $\mathcal{C}$, deoarece $0^2 + (-2-4)^2 \neq 16$.



21. 5.
22. Înlocuind pe y^2 cu $6x$ în ecuația cercului, obținem $x^2 + 6x - 16 = 0$. Soluțiile acestei ecuații sunt $x_1 = -8$ și $x_2 = 2$, iar punctele căutate sunt $A(2, 2\sqrt{3})$ și $B(2, -2\sqrt{3})$.



23. a)



b) Fie $P(-5, y_P) \in d$. Condiția $PB = PC$ este echivalentă cu: $5^2 + (y_P - 2)^2 = (5 - 2\sqrt{5})^2 + y_P^2$, deci $y_P = 5\sqrt{5} - 4$.

24. Asimptotele hiperbolei H au ecuațiile $y = \frac{3}{2}x$ și $y = -\frac{3}{2}x$. Triunghiul format de cele trei drepte are vârfurile $A(2, 3)$, $B(4, -6)$ și $O(0, 0)$, deci aria lui este 12. 25. $F'(-\sqrt{13}, 0)$, $F(\sqrt{13}, 0)$.

3.18. Probleme de sinteză – analiză matematică

1. a) Se efectuează calculele în membrul din dreapta egalității. b) Graficul funcției are o asimptotă verticală, $x = 1$, și o asimptotă oblică, $y = x + 2$ (la $\pm\infty$). c) Avem $f^{(n)}(x) = 3 \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n \cdot (n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$. 2. a) Deoarece $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $f'(x) \leq 0$, pentru $x \in [0, \infty)$ ($f'(x) \neq 0$, $x \neq 0$), deci $f'(x)$ este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$. b) Funcția f este continuă pe $[k, k+1]$ și derivabilă pe $(k, k+1)$, deci, conform teoremei lui Lagrange, există $c_k \in (k, k+1)$, astfel încât $f(k+1) - f(k) = f'(c_k)(k+1-k) = f'(c_k)$. Având în vedere că f' este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$, rezultă de aici că $f'(k+1) < f'(c_k) = f(k+1) - f(k) < f'(k)$ sau $\frac{1}{1+(k+1)^2} <$

Scanned with OKEN Scanner

$< \operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg} k < \frac{1}{1+k^2}$. c) Avem $a_n < (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) + (\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1) + \ldots + (\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg}(n)) = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg}(n+1) < \frac{\pi}{2}$. 3. a) Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\cos x > 0$, deci $g'(x) = x \cos x > 0$. b) Din tabelul de variație pentru funcția g reiese că $g(x) > 1$, oricare ar fi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

x	0				$\frac{\pi}{2}$
g'		$+$	$+$	$+$	
g	1	↗	↗	↗	$\frac{\pi}{2}$

c) Deoarece funcția f este continuă pe intervalul $[x, x+1]$ și derivabilă pe $(x, x+1)$, rezultă că există $c_x \in (x, x+1)$, astfel încât $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)(x+1-x) = f'(c_x)$. Dar $f'(c_x) = \cos\frac{\pi}{c_x} + \frac{\pi}{c_x}\sin\frac{\pi}{c_x} = g\left(\frac{\pi}{c_x}\right) > 1$, pentru că $\frac{\pi}{c_x} > 0$, $\frac{\pi}{c_x} < \frac{\pi}{x} < \frac{\pi}{2}$ $(x > 2)$. Drept urmare, $f(x+1) - f(x) > 1$, oricare ar fi $x > 2$. 4. a) Evident, $f'(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0$. b) Aplicând regula lui l'Hospital, obținem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{5x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f^{(2)}(x)}{20x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f^{(3)}(x)}{60x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f^{(4)}(x)}{120x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{120}\cdot\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{120}$. c) Avem:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f^{(4)}$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f^{(3)}$	↘	↘	0	↗	↗

De aici deducem că $f^{(3)}(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ și

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f^{(3)}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f^{(2)}$	↗	↗	0	↗	↗

de unde rezultă semnul funcției $f^{(2)}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f^{(2)}$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
f'	↘	↘	0	↗	↗

Deci $f'(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

5. a) Avem $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ și $g'(x)=\frac{-x^2}{1+x^2}$. Cum $f'(x)>0$ și $g'(x)\le 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ ($g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$), rezultă că f este strict crescătoare, iar g este strict descrescătoare. b) Deoarece $g(0)=0$ și g este strict descrescătoare, rezultă că ecuația $g(x)=0$ are o singură soluție, $x=0$. c) Cum f este strict crescătoare și $a_{n+1}-a_n=f(a_n)-f(a_{n-1})$, rezultă că diferențele $a_{n+1}-a_n$ și a_n-a_{n-1} au același semn, de unde obținem că $a_{n+1}-a_n$ are același semn cu $a_1-a_0=\operatorname{arctg}1-1=\frac{\pi}{4}-1<0$. Așadar, șirul $(a_n)_{n\ge 0}$ este strict descrescător. Prin inducție, arătăm că $a_n>0$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$. Având în vedere cele arătate mai înainte, deducem că șirul $(a_n)_{n\ge 1}$ este mărginit. Notând $l=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\in\mathbb{R}$, obținem $l=f(l)$ sau $g(l)=0$, de unde rezultă că $l=0$. **6.** a) Avem $f'(x)=2^x\ln 2+m^x\ln m-4^x\ln 4-5^x\ln 5$. b) Din egalitatea $a+d=b+c$ rezultă că $d-c=b-a$. Astfel, inegalitatea cerută este echivalentă cu $\frac{d^n-c^n}{d-c}>\frac{b^n-a^n}{b-a}$. Această formă ne sugerează folosirea teoremei lui Lagrange. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n$. Aplicând teorema lui Lagrange pe intervalele $[a,b]$ și $[c,d]$, deducem că există $x_1\in(a,b)$ și $x_2\in(c,d)$ astfel încât $f'(x_1)=\frac{b^n-a^n}{b-a}$ și $f'(x_2)=\frac{d^n-c^n}{d-c}$ cum $f'(x_1)=nx_1^{n-1}<nx_2^{n-1}=f'(x_2)$, rezultă că $\frac{b^n-a^n}{b-a}<\frac{d^n-c^n}{d-c}$. c) Se arată ușor că $f^{(n)}(0)=(\ln 2)^n+(\ln 10)^n-(\ln 4)^n-(\ln 5)^n=a^n+d^n-b^n-c^n$, unde $a=\ln 2$, $b=\ln 4$, $c=\ln 5$, $d=\ln 10$. Deoarece $0<a<b<c<d$ și $a+d=b+c$, rezultă, conform punctului b), că $f^{(n)}(0)>0$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. **7.** a) Avem $f'(x)=\ln a-\frac{a}{x}$. b) Deoarece $f(x)\ge 0=f(a)$, înseamnă că $x=a$ este punct de minim al funcției f. Cum f este derivabilă în $x=a$ și acesta este punct de minim interior lui $(0,\infty)$, rezultă, din teorema lui Fermat, că $f'(a)=0$, deci $a=e$, care verifică cerința din enunț. c) Conform punctului b), pentru $a=e$, $f(x)=x\ln e-e\ln x=x-l\ln x\ge 0$, oricare ar fi $x>0$. De aici, rezultă că $e^x\ge x^e$, $x>0$.

8. a) Evident, $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$ și $g'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}$. b) Cum f este strict descrescătoare pe $[0,\infty)$ (căci $f'(x)<0$, $x>0$), rezultă că $f(x)<f(0)=0$, oricare ar fi $x>0$. Funcția g este strict crescătoare pe $[0,\infty)$ ($g'(x)>0$, $x>0$), deci $g(x)>0$, oricare ar fi $x>0$. c) Din relația de la punctul b) deducem că $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$, pentru $x>0$. Luând $x=\frac{2k-1}{n^2}$, $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, obținem $\frac{2k-1}{n^2}-\frac{(2k-1)^2}{2n^4}<\ln\left(1+\frac{2k-1}{n^2}\right)<\frac{2k-1}{n^2}$, de unde rezultă că $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)-\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2<\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2k-1}{n^2}\right)<\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ sau $1-\frac{n(4n^2-1)}{6n^4}<\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2k-1}{n^2}\right)<1$. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2k-1}{n^2}\right)=1$. **9.** a) Se arată prin inducție. b) Ecuația asimptotei spre $-\infty$ a graficului funcției f_0 este $y=0$. c) Conform punctului a), $f_0(0)+f_1(0)+\ldots+f_n(0)=3^0+3^1+$

Scanned with OKEN Scanner

$+ \ldots + 3^n = \frac{3^{n+1}-1}{3-1} = \frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_1(0)+f_2(0)+\ldots+f_n(0)}{f_{n+1}(0)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3\frac{3^n-1}{2}}{3^{n+1}} = \frac{1}{2}$. **10.** a) Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = 2004(x+1)^{2003} - 2004$. b) Deoarece $f''(x) = 2004 \cdot 2003 \cdot (x+1)^{2002} \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, rezultă că f este convexă pe $\mathbb{R}$. c) Remarcăm că $f'(x) = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$. Așadar, avem:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$		0		$\nearrow$

de unde rezultă că $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. **11.** a) Dreapta cu ecuația $y = 0$ este asimptota spre ∞ a graficului funcției f. b) Avem $a_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$.

c) Observăm că $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1$. **12.** a) Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$. b) Deoarece $f'(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} < 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, rezultă că f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ (dacă $x < 0$, atunci este clar că $x - \sqrt{x^2+1} < 0$, iar dacă $x \geq 0$, atunci $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ este echivalentă cu $x < \sqrt{x^2+1}$ sau $x^2 < x^2 + 1$, care este adevărată). c) Întrucât $f''(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, rezultă că f este convexă pe $\mathbb{R}$. **13.** a) Evident, $f'(x) = \frac{-2}{x^3} + \frac{2}{(x+1)^3}$. b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$. c) Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, rezultă că ecuația asimptotei spre ∞ la graficul funcției f este $y = 0$, iar ecuația asimptotei verticale este $x = 0$ (asimptotă verticală numai la dreaptă, căci f este definită pe $(0, \infty)$).

14. a) Evident, $f'(x) = 0$ dacă și numai dacă $3^x = 3^{-x}$, adică $x = 0$ și:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$		0		$\nearrow$

b) Funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$, deoarece $f''(x) = (3^x - 3^{-x})\ln^2 3 > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. c) Dacă $x \in (0, 1)$, atunci $x^5 < x$ și $x^{1986} < x^{27}$ și, cum f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$, rezultă că $f(x^5) + f(x^{1986}) < f(x) + f(x^{27})$, ceea ce înseamnă că ecuația nu are soluție în $(0, 1)$. Dacă $x \in (1, \infty)$, atunci $x^5 > x$ și $x^{1986} > x^{27}$, deci $f(x^5) + f(x^{1986}) > f(x) + f(x^{27})$ (f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$), adică ecuația nu are soluție în $(1, \infty)$. Așadar, singura soluție este $x = 1$ (verificare imediată). **15.** a) Avem $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+2)}} \leq 0$, oricare ar fi $x > 0$ (cu egalitate numai pentru $x = 0$), rezultă că f este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$. b) Limita cerută este egală

Scanned with OKEN Scanner

cu $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2-x^2-1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}=0$. c) Întrucât $f(\sqrt{1})+f(\sqrt{2})+\ldots+f(\sqrt{n})=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\ldots+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})=\sqrt{n+2}-\sqrt{2}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\sqrt{1})+f(\sqrt{2})+\ldots+f(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{n}}=1$.

16. a) Evident, $u'(x)=-\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{(x-3)^2}\right]<0$, $x\in A$. b) Cum $f(x)\neq 0$, oricare ar fi $x\in A$, deducem că $u(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$, deci $u'(x)=\dfrac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{g^2(x)}=\dfrac{f(x)\cdot h(x)-g^2(x)}{g^2(x)}$. c) Din relațiile demonstrate la punctele a) și b) obținem $\dfrac{f(x)\cdot h(x)-g^2(x)}{g^2(x)}<0$, $x\in A$, deci $g^2(x)>h(x)f(x)$, $x\in A$. Se arată cu ușurință că ultima inegalitate este valabilă și pentru $x\in\{1,2,3\}$. **17.** a) Avem $f(x)=\dfrac{(x+1)-x}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$. Evident, $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$. b) Avem $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$. c) Organizăm numărul e: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{\frac{-2n}{n+1}}=e^{-2}$.

18. a) Evident, $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. Dacă $x\in[e,\infty)$, atunci $f'(x)\le 0$ (egalitatea are loc numai pentru $x=e$), deci f este strict descrescătoare. b) Din tabelul de mai jos deducem că $f(x)\le\dfrac{1}{e}$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	

c) Dacă $x\in(0,\infty)$, $x\neq e$, atunci $\dfrac{x^2}{e}\neq e$, deci $f(x)<\dfrac{1}{e}$ și $f\left(\dfrac{x^2}{e}\right)<\dfrac{1}{e}$. Rezultă că $f(x)+f\left(\dfrac{x^2}{e}\right)<\dfrac{2}{e}$ pentru $x\in(0,\infty)\setminus\{e\}$, deci ecuația nu are soluții pe $(0,\infty)\setminus\{e\}$. Se verifică faptul că $x=e$ este soluție. **19.** b) $f''(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^{3/2}}>0$, $x\in\mathbb{R}$. c) $y=2x$ este ecuația asimptotei spre $+\infty$ și $y=0$ este ecuația asimptotei spre $-\infty$.

20. a) 0. b) $x_1=-1$ este de minim, iar $x_2=3$ este punct de maxim. c) $m\in\left(0,\dfrac{6}{e^3}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Clasa a XII-a

4.1. Legi de compoziție

1. a) 1. b) Ecuația este $2^{x+x^2} = 2^6$, adică $x^2 + x - 6 = 0$ și de aici $x = 2$ sau $x = -3$. c) Avem că $(x \circ y) \circ z = 2^{2^{x+y}+z}$; din $2^{2^{x+y}+z} = 2^{z+1}$, rezultă că $2^{x+y} = 1$, deci $x + y = 0$. **2.** b) Trebuie să avem $a + b \in \mathbb{Z}$ și $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. De exemplu, putem lua $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$. c) Prin inducție, $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + (n-1) \cdot 11$, $\forall x_1, x_2 \ldots$ $\ldots x_n \in \mathbb{R}$ și $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $1 \circ 2 \circ \ldots \circ n = \frac{n(n+1)}{2} + 11(n-1) < 2001$. Cum n este maxim, atunci $n = 53$. d) Avem că $2 + 2^2 \ldots 2^n + 11(n-1) > 2001$, deci $2(2^n - 1) + 11(n-1) > 2001$. Valoarea minimă a lui n este $n = 10$. **3.** a) $-(x-1) \cdot (y-1) + 1 = -xy + x + y = x \circ y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. b) Demonstrăm inductiv. Presupunem că relația se verifică pentru $n = k$. Atunci $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_k \circ x_{k+1} = (x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_k) \circ x_{k+1} = -(x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_k - 1) \cdot (x_{k+1} - 1) +$ $+ 1 = -(-1)^{k-1} \cdot (x_1 - 1)(x_2 - 1)\ldots(x_k - 1)(x_{k+1} - 1) + 1 = (-1)^k (x_1 - 1)(x_2 - 1)\ldots(x_{k+1} - 1) + 1$, deci relația se verifică și pentru $n = k + 1$. Rezultă că este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. **4.** a) $(x+4)(y+4) - 4 = xy + 4x + 4y +$ $+ 12 = x \circ y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. b) $x \circ (-4) = (x+4)(-4+4) - 4 = -4$, $\forall x \in \mathbb{R}$. c) Folosind punctul a), avem că $x \circ (y \circ$ $\circ z) = (x \circ y) \circ z = (x+4)(y+4)(z+4) - 4$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. d) $(-2009) \circ (-2008) \circ \ldots \circ 2009 = (-2009) \circ \ldots \circ (-5) \circ$ $\circ (-4) \circ (-3) \circ \ldots \circ 2009 = x \circ (-4) \circ y = -4 \circ y = -4$, conform c). e) Ecuația se scrie sub forma $(x+4)^4 - 4 = 12$. Cum $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $(x+4)^2 = 4$, cu soluțiile $x_1 = -2$ sau $x_2 = -6$. **5.** a) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. b) Deoarece $x_n = \sqrt[3]{x_0^3 + x_{n-1}^3}$, găsim că $x_1 = x_0\sqrt[3]{2}$, $x_2 = x_0\sqrt[3]{3}$ și $x_3 = x_0\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. c) Inductiv se arată că $x_n = x_0\sqrt[3]{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $x_n \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $n + 1$ este cub perfect. Cel mai mic astfel de n este $n = 7$. **6.** b) $e = \frac{7}{2}$. c) Demonstrăm prin inducție matematică. **7.** Condiția de comutativitate conduce la $a = b$, iar cea de asociativitate conduce la $a^2 = a$. Deducem că $(a, b) \in \{(0, 0). (1, 1)\}$. **8.** Fiecare dintre cele trei operații este, evident, comutativă. a) Legea nu este asociativă; de exemplu, $(1 \top 1) \top 2 = 1 \top 2 = \frac{3}{2}$, însă $1 \top (1 \top 2) =$ $= 1 \top \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$. Legea nu are element neutru: din $x \top e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, ar rezulta că $e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, absurd. b) Operația nu este asociativă; de exemplu, $(1 \perp 2) \perp 3 = \sqrt{2} \perp 3 = \sqrt{3\sqrt{2}}$, în timp ce $1 \perp (2 \perp 3) = 1 \perp \sqrt{6} =$ $= \sqrt[4]{6}$. Operația nu are element neutru, din $x \perp e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ar rezulta că $x = e$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, absurd. c) Operația nu este asociativă; de exemplu, dacă $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $(A * B) * C =$ $= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, însă $A * (B * C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se constată că $\frac{1}{2} I_2$ este element neutru al legii de compoziție. **9.** a) Pentru

Scanned with OKEN Scanner

orice $x, y \in (-\infty, 0)$, avem că $x * y \in (-\infty, 0)$, deci $*$ este lege de compoziție pe G. c) Fie $e \in G$ un eventual element neutru; atunci $\frac{xe}{x+e} = x$, $\forall x \in G$, sau încă $xe = x^2 + xe$, $\forall x \in G$, fals. Rezultă că legea nu are element neutru. **10.** a) Observăm că $x \circ y = e^{3\ln x \ln y} > 0$, $\forall x, y > 0$. Apoi, $x \circ y = 1$ dacă și numai dacă $e^{3\ln x \ln y} = 1$, adică $3\ln x \ln y = 0$ sau încă $x = 1$ sau $y = 1$. Rezultă că $x \circ y \neq 1$, $\forall x, y \in G$. b) Evident că $x \circ y = e^{3\ln x \ln y} = y \circ x$, $\forall x, y \in G$. c) Ecuația este echivalentă cu $e^{3\ln x \ln x} = e^3$, deci $(\ln x)^2 = 1$, de unde $\ln x = \pm 1$ și atunci $x = e$ sau $x = \frac{1}{e}$. **11.** a) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. b) Fie $x, y \in H$. cum $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3 \geq 3$, rezultă că $x * y \in H$. c) Este suficient să alegem $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $2(a-3)(b-3) \in \mathbb{Z}$. De exemplu, putem considera $a - 3 = \frac{2}{3}$ și $b - 3 = \frac{3}{2}$, deci $a = \frac{11}{3}$, $b = \frac{9}{2}$ și atunci $a * b = 5 \in \mathbb{Z}$. **12.** a) $(x+i)(y+i) - i = xy + ix + iy - 1 - i = x \circ y$. b) $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z = (x+i)(y+i)(z+i) - i$, $\forall x, y, z, \in \mathbb{C}$. c) Alegem, de exemplu, $x, y \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $(x+i)(y+i) = i + 1$; putem lua $x + i = -1$ și $y + i = -i - 1$. d) Demonstrăm inductiv, folosind a). e) Ecuația este $(x+i)^4 - i = 1 - i$, deci $(x+i)^4 = 1$, de unde $x + i \in \{-1, 1, i, -i\}$, adică $x \in \{-1-i, 1-i, 0, -2i\}$. **13.** a) Deoarece $a, b \in [0, \infty)$, rezultă că $e^a + e^b - 1 \geq 1$, deci $a * b \geq 0$, adică $a * b \in M$. b) Folosind relația $e^{\ln x} = x$, $\forall x > 0$, avem că $a * (b * c) = a * (\ln(e^b + e^c - 1)) = \ln(e^a + e^{\ln(e^b + e^c - 1)} - 1) = \ln(e^a + e^b + e^c - 2)$. Similar, $(a * b) * c = \ln(e^a + e^b + e^c - 2)$, deci $*$ este asociativă. c) Prin inducție, $\underbrace{a * a * \ldots * a}_{de\ n\ ori\ a} = \ln(n \cdot e^a - n + 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Ecuația este echivalentă cu $n \cdot e^a - n + 1 = e^{2a}$, de unde $e^a = 1$ sau $e^a = n - 1$. Rezultă că $a = 0$ sau $a = \ln(n-1)$. **14.** a) Din $x \circ e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, obținem $xe + a(x+e) + a^2 - a = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. deci $e(x+a) = (x+a)(1-a)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, prin urmare $e = 1 - a$ este element neutru. b) Fie $x \in \mathbb{R}$ element simetrizabil; atunci există $x' \in \mathbb{R}$ astfel încât $xx' + a(x+x') + a^2 - a = 1 - a$, adică $x'(x+a) = 1 - ax - a^2$. Rezultă că orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}$ este simetrizabil, cu simetricul $x' = \frac{1-ax-a^2}{x+a} \in \mathbb{R}$. **15.** a) Pentru orice $x, y \in [3, \infty)$, vom avea că $\sqrt{x^2 + y^2 - 9} \geq 3$, deci $x * y \in G$. Rezultă că $*$ este lege de compoziție internă pe G. b) Legea $*$ este asociativă, deoarece $(x * y) * z = x * (y * z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 18}$. Apoi, este comutativă, deoarece $x * y = y * x$, $\forall x, y \in G$ și are element neutru, anume pe $e = 3$. c) Fie x inversabil, cu inversul x', deci $x * x' = x' * x = e$. Rezultă că $x^2 + x^2 - 9 = 9$, de unde $x^2 + x^2 = 18$ și cum $x, x' \in [3, \infty)$, rezultă $x = x' = 3$. Așadar, singurul element inversabil este $x = 3$. **16.** Observăm că $x * y = 5\left(x + \frac{6}{5}\right)\left(y + \frac{6}{5}\right) - \frac{6}{5}$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$. a) $x * (y * z) = (x * y) * z = 5^2\left(x + \frac{6}{5}\right) \cdot \left(y + \frac{6}{5}\right)\left(z + \frac{6}{5}\right) - \frac{6}{5}$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$. b) Determinăm mai întâi elementul neutru al legii $*$. Din $x * e = e * x = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, găsim că $5e + 6 = 1$, deci $e = -1$. Fie $x \in \mathbb{Z}$ simetrizabil și $x' \in \mathbb{Z}$ simetricul său. Avem că $x * x' = x' * x = -1$. Rezultă că $x' = \frac{-6x-7}{5x+6}$ și $x' \in \mathbb{Z}$. Din $5x + 6 \mid -6x - 7$, rezultă că $5x + 6 \mid 5(-6x-7) + 6(5x+6)$, deci $5x + 6 \mid 1$. Atunci $5x + 6 = 1$ sau $5x + 6 = -1$,

Scanned with OKEN Scanner

deci $x=-1$. c) Prin inducție, $x_1 * x_2 * \ldots * x_n = 5^{n-1}\cdot\left(x_1+\frac{6}{5}\right)\left(x_2+\frac{6}{5}\right)\ldots\left(x_n+\frac{6}{5}\right)-\frac{6}{5}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și x_1, $x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$. Ecuația dată devine $5^{2008}\cdot\left(x+\frac{6}{5}\right)^{2009}-\frac{6}{5}=-1$, $x\in\mathbb{Z}$, deci $(5x+6)^{2009}=1$, $x\in\mathbb{Z}$. Rezultă că $x=-1$. *Soluție alternativă:* Observăm că $x=-1$ este soluție (deoarece -1 este element neutru) și că, dacă $a*b=-1$, $a, b\in\mathbb{Z}$, atunci $a=-1$ și $b=-1$. Dacă $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{de 2009 ori } x}=-1$, atunci $x=-1$ (și $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{de 2008 ori } x}=-1$), deci ecuația are soluția unică $x=-1$. **17.** a) Dacă presupunem, prin absurd, că $b\neq d$, atunci $\sqrt{2}=\frac{c-a}{b-d}\in\mathbb{Q}$, fals. Rămâne că $b=d$, apoi rezultă imediat că $a=c$. b) Fie $x, y\in G$; atunci $x=a+b\sqrt{2}$, $y=c+d\sqrt{2}$, $a, b, c, d\in\mathbb{Z}$ și $a^2-2b^2=1$, $c^2-2d^2=1$. Avem $xy=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}=m+n\sqrt{2}$, $m, n\in\mathbb{Z}$ și $m^2-2n^2=(a^2-2b^2)(c^2-2d^2)=1$, deci $xy\in G$. c) Dacă $x=a+b\sqrt{2}=0$, atunci, conform a), rezultă că $a=0$, $b=0$, deci $a^2-2b^2=0\neq 1$. Contradicția obținută arată că $x\neq 0$. Totodată, $\frac{1}{x}=a-b\sqrt{2}$ și $a^2-2(-b)^2=1$, deci $\frac{1}{x}\in G$. d) $x=3+2\sqrt{2}$. e) Fie $x=3+2\sqrt{2}\in G$; folosind b), rezultă că $x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots \in G$. Să mai observăm că $x<x^2<x^3<\ldots$, deci G are o infinitate de elemente. f) Fie $z=3-2\sqrt{2}\in M(3^2-2\cdot 2^2=1)$. Conform c), $z^2, z^3, \ldots \in M$. Avem: $0<3-2\sqrt{2}<\frac{1}{2}\Rightarrow 0<17-12\sqrt{2}<\frac{1}{4}\Rightarrow 0<(17-12\sqrt{2})^2<\frac{1}{16}<\frac{1}{10}$, deci $0<577-238\sqrt{2}<\frac{1}{10}$. **18.** a) Ambii membri sunt egali cu $(a_1a_2a_3, a_1a_2x_3+a_1x_2+x_1)$. d) $(2, 1)\circ(1, 2)=(2, 5)$ și $(1, 2)\circ(2, 1)=(2, 3)$. e) Prin inducție, deducem că $(u, v)\circ(u, v)\circ\ldots\circ(u, v)=(u^n, v(u^{n-1}+u^{n-2}+\ldots+u+1))$. Pentru $a>0$ și $x\in\mathbb{R}$, avem $u^n=a$ și $v(u^{n-1}+u^{n-2}++\ldots+u+1)=x$, deci $u=\sqrt[n]{a}$ și $v=\frac{x}{\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{a}+1}$. **19.** b) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)\cdot(I_2+bA)=I_2+aA+bA+abA^2=I_2+(a+b+ab)A=X(a+b+ab)$. c) Fie $X=I_2+aA$, $Y=I_2+bA$, $a, b>-1$; atunci $XY=X(a+b+ab)$ și, cum $a+b+ab=(a+1)(b+1)-1>-1$, rezultă că $XY\in G$. d) Folosim inducția matematică și relația de la punctul b). **20.** b) $f(x*y)=f(xy+x+y)=xy+x+y+1=(x+1)(y+1)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall\, x, y\in\mathbb{R}$. c) Fie $a=1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\ldots*\frac{1}{2009}$; rezultă că $f(a)=f\left(1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\ldots*\frac{1}{2009}\right)=f(1)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(\frac{1}{2009}\right)=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2010}{2009}=2010$, deci $a+1=2010$, de unde $a=2009$. **21.** a) Pentru $x, y\in(1, \infty)$, avem că $x\circ y=(x-1)(y-1)+1>1$, deci $x\circ y\in(1, \infty)$. b) $f(x\circ y)=x\circ y-1=(x-1)(y-1)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall\, x, y\in\mathbb{R}$. c) Fie $a=\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de 10 ori } x}$; atunci $f(a)=f(x\circ x\circ\ldots\circ x)$, deci $f(a)=\underbrace{f(x)\cdot f(x)\cdot\ldots\cdot f(x)}_{\text{de 10 ori } f(x)}$. Rezultă că $a-1=(x-1)^{10}$ și deci $a=(x-1)^{10}+1$. Ecuația dată devine $(x-1)^{10}=1024$ și cum $x\in\mathbb{R}$, rezultă că $x=-1$ sau $x=3$.

Scanned with OKEN Scanner

4.2. Grupuri

1. a) Se verifică prin calcul. b) Fie B_1 și $B_2 \in G$; atunci $B_1B_2 = (a_1A + b_1I_2)(a_2A + b_2I_2) = a_1a_2A^2 + a_1b_2A + b_1a_2A + b_1b_2I_2 = a_1a_2(2A - I_2) + a_1b_2A + b_1a_2A + b_1b_2I_2 = (2a_1a_2 + a_1b_2 + b_1a_2)A + (b_1b_2 - a_1a_2)I_2$, deci $B_1B_2 \in G$. Se verifică ușor că operația este asociativă, comutativă și admite pe I_2 ca element neutru, deci $(G, \cdot)$ este monoid comutativ. **2.** a) Observăm că $x * y = (x-2)(y-2) + 2 \geq 2$, $\forall x, y \in G$, deci $x * y \in G$; rezultă că $*$ este lege de compoziție pe G. b) Prin calcul se arată că, pentru orice $x, y, z \in G$, avem $x * (y * z) = (x * y) * z = (x-2)(y-2)(z-2) + 2$, deci $*$ este asociativă. Elementul neutru este $e = 3 \in G$ și orice $x \in (2, \infty)$ este inversabil, cu inversul $x' = 2 + \frac{1}{x-2} \in G$. Astfel, $U(G) = (2, \infty)$. c) $(G, \cdot)$ nu este grup, deoarece 2 nu este inversabil. **3.** a) Fie $z_1 = z_2$; atunci $a_1 + b_1w = a_2 + b_2w$. Dacă $a_2 \neq b_2$, rezultă că $w = \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2} \in \mathbb{Q}$, fals, deci $a_2 = b_2$ și atunci $a_1 = a_2$. Reciproc este evident. b) $w^2 + w + 1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + 1 = 0$ și $w^3 - 1 = (w-1)(w^2 + w + 1) = 0$. c) Fie $z_1 = a_1 + b_1w$, $z_2 = a_2 + b_2w$, cu $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$. Rezultă că $z_1z_2 = a_1a_2 + w(a_1b_2 + a_2b_1) + b_1b_2w^2 = a_1a_2 + w(a_1b_2 + a_2b_1) + b_1b_2(-w-1) = a_1a_2 - b_1b_2 + w(a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2) \in \mathbb{Q}(w)$, ceea ce arată că $\mathbb{Q}(w)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ față de înmulțirea numerelor complexe. Înmulțirea numerelor complexe pe $\mathbb{Q}(w)$ este comutativă, asociativă și are elementul neutru $e = 1 = 1 + 0 \cdot w \in \mathbb{Q}(w)$, deci $\mathbb{Q}(w)$ este monoid comutativ. **4.** Evident că $x \circ y \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = x + y + z + 20$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. $x \circ y = y \circ x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. $x \circ (-10) = (-10) \circ x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $e = -10$ este element neutru. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, există $x' = -x - 20 \in \mathbb{R}$ pentru care $x \circ x' = e$. **5.** a) $e = 6$. b) Dacă $x, y \in (5, \infty)$, atunci $x * y = (x-5)(y-5) + 5 \in (5, \infty)$, deci $*$ este lege de compoziție pe G. Se verifică ușor că $*$ este comutativă și asociativă. Elementul neutru este $e = 6$ și orice $x \in G$ are simetricul $x' = 5 + \frac{1}{x-5} \in G$. Prin urmare, $(G, *)$ este grup comutativ. c) Sistemul este echivalent cu $(x-5)(y-5) = z - 5$, $(y-5)(z-5) = x - 5$, $(x-5)(z-5) = y - 5$, unde $x, y, z \in (5, \infty)$. Înmulțind egalitățile membru cu membru, rezultă că $(x-5)^2(y-5)^2(z-5)^2 = (x-5)(y-5)(z-5)$ și, cum $x, y, z \in (5, \infty)$, toți factorii sunt nenuli, deci $(x-5)(y-5)(z-5) = 1$. Această ecuație, împreună cu ecuațiile sistemului, conduc la $(x-5)^2 = 1$. $(y-5)^2 = 1$, $(z-5)^2 = 1$, $x, y, z \in G$. Deducem că $x = y = z = 6$. **6.** a) Trebuie să avem $a^2 - 3 \cdot 15^2 = 1$. Rezultă că $a = \pm 26$. b) Avem că $(a, b) * (c, d) = (ac + 3bd, ad + bc) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Mai trebuie să arătăm că $(ac + 3bd)^2 - 3(ad + bc)^2 = 1$. După calcule, $(ac + 3bd)^2 - 3(ad + bc)^2 = (a^2 - 3b^2)(c^2 - 3d^2) = 1$, deci $(a, b) * (c, d) \in G$. c) Din b), operația $*$ este lege de compoziție pe G. Se verifică faptul că legea $*$ este asociativă, admite elementul neutru $(1, 0)$ și orice $(a, b) \in G$ este simetrizabil, simetricul fiind $(a, b)' = (a, -b) \in G$. Astfel, $(G, *)$ este grup. **7.** a) Pentru orice $x, y \in (2, \infty)$, avem că $x * y = e^{\frac{1}{3}\ln(x-2)\ln(y-2)} + 2$, deci $x * y \in (2, \infty)$. Cum $x * y = 3$ dacă și numai dacă $\ln(x-2)\ln(y-2) = 0$, adică $x = 3$ sau $y = 3$, rezultă că $x * y \neq 3$, $\forall x, y \in G$. Prin urmare, $x * y \in G$ și astfel $*$ este lege de compoziție. b) Se verifică ușor că $*$ este asociativă, comutativă, are element neutru $E = 2 + e^3 \in G$ și că orice $x \in G$ este inversabil, cu inversul $x' = 2 + e^{\frac{9}{\ln(x-2)}} \in G$. Astfel, $(G, *)$ este grup comutativ. **8.** a) Observăm că $f_a \circ f_b, f_{ab} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, iar $(f_a \circ f_b)(x) = f_a(bx) = \begin{cases} abx, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} = f_{ab}(x)$. Prin urmare, $f_a \circ f_b = f_{ab}$. b) Din a),

Scanned with OKEN Scanner

compunerea funcțiilor este lege de compoziție pe G. Compunerea funcțiilor este asociativă și are elementul neutru f_1. Orice funcție $f_a \in G$ este simetrizabilă, având simetricul $f_{\frac{1}{a}} \in G$. Rezultă că $(G, \circ)$ este grup.

9. a) Calcul direct. b) (i) $A(x) \cdot A(y) = A(x+y) = A(y+x) = A(y) \cdot A(x)$, $x, y \in \mathbb{R}$. ii) $A(x) \cdot A(0) = A(x+0) = A(x)$. iii) $A(x) \cdot A(-x) = A(x + (-x)) = A(0)$. c) Din a), rezultă că înmulțirea este lege de compoziție pe G. Înmulțirea matricelor este asociativă, iar din b) rezultă că este comutativă, are element neutru pe $A(0)$ și orice matrice $A(x)$ este inversabilă și $(A(x))^{-1} = A(-x) \in G$. Rezultă că $(G, \cdot)$ este grup comutativ. c) $A^n(2) = A(2n)$, $n \in \mathbb{N}^*$; demonstrația se face prin inducție matematică. **10.** a) $I_3 = A_0 \in G$. b) Se verifică prin calcul direct. c) Din b), înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G; asociativitatea este proprietate generală a înmulțirii matricelor; elementul neutru este I_3 și orice A_x din G admite inversa $(A_x)^{-1} = A_{-x}$. În concluzie, $(G, \cdot)$ este grup. **11.** Fie $M(a)$ și $M(b) \in G$. Prin calcul, $M(a) \cdot M(b) = M(a+b) \in G$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$. Rezultă că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G. Legea indusă este asociativă, deoarece înmulțirea matricelor este asociativă. Elementul neutru este $I_3 = M(0) \in G$. Orice element $M(a)$ din G este inversabil și are inversul $M(-a)$. Rezultă că $(G, \cdot)$ este grup și, cum $M(a) \cdot M(b) = M(b) \cdot M(a)$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, rezultă că grupul este comutativ. **12.** Să observăm că $A_x \cdot A_y = A_{x+y-2xy}$ și că $x + y - 2xy = \frac{1}{2}$ dacă și numai dacă $x = \frac{1}{2}$ sau $y = \frac{1}{2}$. Astfel, dacă $A_x, A_y \in M$, atunci $A_x \cdot A_y \in M$. Rezultă că înmulțirea este lege de compoziție pe M. Legea indusă este asociativă, este comutativă, deoarece $A_x \cdot A_y = A_y \cdot A_x = A_{x+y-2xy}$ și admite ca element neutru pe A_0. Fiecare element $A_x \in M$ este simetrizabil și are simetricul $A_{\frac{x}{2x-1}} \in M$. Prin urmare, $(M, \cdot)$ este grup abelian. **13.** a) Se verifică prin calcul direct. b) Din a), G este parte stabilă față de operația de înmulțire a matricelor. Operația indusă pe G este asociativă și are elementul neutru $I_3 = A(0) \in G$. Orice element $A(x)$ din G este inversabil și $A^{-1}(x) = A(-x) \in G$. Cum $A(x) \cdot A(y) = A(x+y) = A(y) \cdot A(x)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ operația indusă este și comutativă. În concluzie, $(G, \cdot)$ este grup comutativ. **14.** a) Elementul $O_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ nu este inversabil, deci $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \cdot)$ nu este grup. b) Fie $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ și $\det(AB) = \det A \cdot \det B \in \{-1, 1\}$. În concluzie, G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulțirea matricelor. c) Operația indusă de înmulțire pe G este asociativă, are elementul neutru $I_2 \in G$ și orice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ are inversa $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in G$, deci $(G, \cdot)$ este grup. **15.** a) Considerând $a = 1$, $b = 0$, $a^2 - 2b^2 = 1$, rezultă că $I_2 \in G$. b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & 2d \\ d & c \end{pmatrix}$ din G (deci $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ și $a^2 - 2b^2 = 1$, $c^2 - 2d^2 = 1$). Atunci $A \cdot B = \begin{pmatrix} ac+2bd & 2(ad+bc) \\ bc+ad & ac+2bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 2n \\ n & m \end{pmatrix}$. Cum $m, n \in \mathbb{Z}$ și $m^2 - 2n^2 = 1$, rezultă că $A \cdot B \in G$. c) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$, atunci $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G$. d) Înmulțirea este lege de compoziție pe G (din b)). Înmulțirea matricelor este asociativă, are element neutru I_2 și orice $A \in G$ este inversabilă, cu $A^{-1} \in G$, deci $(G, \cdot)$ este grup. e) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in G$. f) Cum $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in G$, conform b) rezultă că $A^2, A^3, \ldots \in G$. Rămâne să arătăm că toate puterile lui A sunt distincte. Într-adevăr, dacă există $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p \neq q$, astfel încât $A^p = A^q$,

Scanned with OKEN Scanner

atunci $A^{p-q} = I_2$, fals (A^n are toate elementele strict pozitive). Astfel, $\{A, A^2, \dots A^n, \dots\} \subset G$, deci G este infinită. **17.** a) Calcul direct. b) Verificare. c) Se observă că în tabla operației apar doar elementele lui S_3; asociativitatea este proprietate generală a compunerii permutărilor; elementul neutru este e; fiecare permutare din S_3 are simetrica tot în S_3. **18.** Făcând tabla operației pe H, observăm că H este parte stabilă a lui $\mathbb{C}^*$ în raport cu înmulțirea. În plus, simetricul fiecărui element din H se află în $H((-1)^{-1} = -1, (-i)^{-1} = i, 1^{-1} = 1, i^{-1} = -i)$, deci H este subgrup al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. **19.** a) $\sigma\pi = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&5&4\end{pmatrix}$ și $\pi\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&5&4\end{pmatrix}$, deci $\sigma\pi \neq \pi\sigma$. b) Avem că $\pi^2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&4&5\end{pmatrix}$, $\pi^3 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix} = e$, deci $H = \{e, \pi, \pi^2\}$. c) $(H, \cdot)$ este subgrup al lui $(S_5, \cdot)$, deoarece H este stabilă în raport cu operația din $(S_5, \cdot)$, conține elementul neutru și $e^{-1} = e$, $\pi^{-1} = \pi^2$, $(\pi^2)^{-1} = \pi$ (deci orice element din H are inversul în H). **20.** a) Calcul direct. b) $I_2 \in G$, deci $G \neq \emptyset$. Arătăm că G este parte stabilă: dacă $A, B \in G$, atunci $\det A = 1$, $\det B = 1$. Rezultă că $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 1$ și de aici $AB \in G$. Arătăm că pentru orice $A \in G$, $A^{-1} \in G$. Într-adevăr, dacă $A \in G$, Atunci $\det A = 1$, deci există A^{-1} și $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A} = 1$, deci $A^{-1} \in G$. Rezultă că $(G, \cdot)$ este subgrup. c) Se verifică, prin inducție, că $C^n = (-1)^n \cdot \begin{pmatrix}1&-n\\0&1\end{pmatrix}$, deci $C^n \neq I_2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. **21.** Cum $G \subset GL_3(\mathbb{R})$ și G este grup, rezultă că G este subgrup al lui $GL_3(\mathbb{R})$. Deoarece $I_3 \notin M$, înseamnă că M nu este submulțime a lui $GL_3(\mathbb{R})$, deci nu poate fi subgrup al lui $GL_3(\mathbb{R})$. **22.** Propoziția este falsă: $\hat{0} \in \mathbb{Z}_4$ diferă de clasa $\bar{0} \in \mathbb{Z}_5$, întrucât $\hat{0} = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, în timp ce $\bar{0} = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. **23.** Subgrupurile sunt $\{\hat{0}\}; \{\hat{0}, \hat{2}\}; \mathbb{Z}_4$. **24.** 4 elemente: $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$. **25.** a) $x = a^{-1}b = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}$. b) $(ab)^5 = e$ și $(ab)^k \neq e$, $\forall\, k \in \{1, 2, 3, 4\}$, deci ordinul lui ab este 5. c) Prin calcul, $\operatorname{ord}(b) = 6$. Din teorema împărțirii cu rest, $k = 6p + r$, unde $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, prin urmare $e = b^k = (b^6)^p \cdot b^r$, deci $b^r = e$. Rezultă că $r = 0$; atunci $k = 6p$, adică 6 divide k. **26.** a) Fie $X, Y \in M$; atunci $AX = XA$ și $AY = YA$. Rezultă că $A(XY) = (AX)Y = (XA)Y = X(AY) = X(YA) = (XY)A$, deci $XY \in M$. b) Fie $X, Y \in G$; din a) și relația $\det(XY) = \det X \cdot \det Y$, deducem că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G. Legea indusă este asociativă și admite elementul neutru $I_2 \in G$. Dacă $X \in M$, atunci $\det X \neq 0$, deci X este inversabilă și, cum din $AX = XA$, rezultă că $AX^{-1} = X^{-1}A$, deducem că $X^{-1} \in G$. Prin urmare, $(G, \cdot)$ este grup. c) Fie $X = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in G$; atunci $b = 0$ și $a = d$, deci $X = \begin{pmatrix}a&0\\c&a\end{pmatrix}$, $a \neq 0$. O astfel de matrice este de ordin doi dacă $X^2 = I_2$ și $X \neq I_2$. Obținem că $a = -1$, $c = 0$, prin urmare $X = \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. **27.** a) $f_{-1,2}(x) = -x + 2$ și $(f_{-1,2} \circ f_{-1,2})(x) = f_{-1,2}(f_{-1,2}(x)) = f_{-1,2}(-x + 2) = x$. b) Compunerea este lege de compoziție pe G, deoarece $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac,\, ad+b} \in G$, $\forall\, f_{a,b}, f_{c,d} \in G$. Asociativitatea compunerii pe G rezultă din asociativitatea compunerii funcțiilor. Elementul neutru este $f_{1,0}$, iar simetricul elementului $f_{a,b}$ este $(f_{a,b})' = f_{\frac{1}{a},\, \frac{b}{a}} \in G$. c) $f_{a,b}$ este de ordin doi dacă $f_{a,b} \neq f_{1,0}$ și $f_{a,b} \circ f_{a,b} = f_{1,0}$, deci $f_{a^2,\, ab+b} = f_{1,0}$, de unde $a = 1$, $b = 0$ sau $a = -1$, $b \in \mathbb{Z}$. Deci $f_{-1,b}$, $b \in \mathbb{Z}$, sunt elemente de ordin 2. **28.** a) $((a, b), (c, d))(e, f) = (a + c + e, b + d + f) = (a, b)((c, d)(e, f))$, deci legea este asociativă. Elementul neutru este $(\hat{0}, \hat{0})$, iar simetricul elementului (a, b) este (a, b). Cum $(a, b)^2 = (a, b)(a, b) = (0, 0)$, grupul $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \cdot)$

Scanned with OKEN Scanner

are proprietatea (p). b) Fie x, y şi $xy \in G$; atunci $x^2 = e$, $y^2 = e$, $(xy)^2 = e$, deci $(xy)^2 = x^2y^2 = e$, $\forall\, x, y \in G$. c) Dacă $(xy)^2 = x^2y^2$, $\forall\, x, y \in G$, atunci $xyxy = xxyy$, de unde, prin simplificare la stânga cu x şi la dreapta cu y, găsim $yx = xy$, $\forall\, x, y \in G$. Rezultă că grupul este comutativ. **29.** a) Deoarece $e^3 = e$, $a^3 = a$, $b^3 = b$, $c^3 = c$, rezultă că $x = e$ este singura soluţie a ecuaţiei. b) Evident, $ab \in K$. Dacă $ab = e$, atunci $ab = a^2$, de unde $b = a$, fals. $ab = a$ implică $b = e$, iar $ab = b$ implică $b = e$, fals. Rămâne că $ab = c$. c) Dacă presupunem că există un izomorfism $f: K \to \mathbb{Z}_4$ şi $f(a) = \hat{1}$, atunci $\hat{0} = f(e) = f(a^2) = f(a) + f(a) = \hat{2}$. Contradicţia obţinută arată că grupurile nu sunt izomorfe. **30.** a) Pentru $\alpha = 2$, $x * y = 3xy - 6(x + y) + 14 = 3(x - 2)(y - 2) + 2$. Rezultă că $x \cdot y > 2$, $\forall\, x, y \in G_2$, deci $*$ este lege de compoziţie pe G_2. Se verifică uşor că $*$ este asociativă, are elementul neutru $e = \frac{7}{3}$ şi orice $x \in G_2$ are simetricul $x' = \frac{18x - 35}{9(x-2)} \in G_2$. Evident, $*$ este comutativă. Prin urmare, $(G_2, *)$ este grup abelian. b) Funcţia $f: (2, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = 3x - 6$ este bijectivă şi $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall\, x, y \in G_2$. Rezultă că $(G_2, *)$ şi $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sunt izomorfe. c) Fie $x, y \in G_\alpha$, deci $x, y > \alpha \geq 2$. Atunci $x * y = 3(x - 2)(y - 2) + 6(\alpha - 2) + \alpha > \alpha$, prin urmare $x * y \in G_\alpha$ şi concluzia se impune. **31.** Pentru orice $x, y \in G$, $x * y = (x - 2)(y - 2) + 2 > 2$, deci $x * y \in G$. Rezultă că $*$ este lege de compoziţie pe G. Se verifică uşor că $*$ este asociativă, comutativă, are element neutru $e = 3$ şi orice $x \in G$ este simetrizabil, cu simetricul $x' = 2 + \frac{1}{x-2} \in G$. Rezultă că $(G, \cdot)$ este grup comutativ. Funcţia $f: \mathbb{R} \to (2, \infty)$, $f(x) = e^x + 2$, este bijectivă şi satisface condiţia de morfism $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, deci f este un izomorfism între $(\mathbb{R}, +)$ şi $(G, \cdot)$. **32.** a) Fie $x, y \in (-1, 1)$, deci $|x| < 1$ şi $|y| < 1$, atunci $|xy| = |x| \cdot |y| < 1$, deci $-1 < xy < 1$, prin urmare $1 + xy > 0$. Pentru a arăta că $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$, este destul să dovedim că $-1 - xy < x + y < 1 + xy$. Prima inegalitate revine la $(x + 1)(y + 1) > 0$, iar a doua la $(x - 1)(y - 1) > 0$ şi ambele sunt adevărate pentru $x, y \in (-1, 1)$. b) Operaţia este asociativă, întrucât $(x * y) * z = x * (y * z) = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz}$, $\forall\, x, y, z \in G$. Legea $*$ este evident comutativă, admite elementul neutru $e = 0$ şi orice element $x \in G$ are simetricul $x' = -x \in G$. c) Cum $f(xy) = \frac{xy-1}{xy+1}$ şi $f(x) * f(y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)} = \frac{xy-1}{xy+1}$, rezultă că f este morfism de grupuri. Avem: $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$, $\forall\, x \in (-1, 1)$, deci f este strict crescătoare, prin urmare f este injectivă. Cum f este continuă, $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = -1$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$, rezultă că imaginea lui f este chiar G, adică f este şi surjectivă. În concluzie, funcţia f este izomorfism de grupuri. **33.** a) Se verifică prin calcul. b) Conform a), înmulţirea matricelor este lege de compoziţie pe G. Legea indusă este asociativă, are element neutru $I_2 = A_0 \in G$ şi orice matrice $A_x \in G$ este inversabilă şi are inversa $A_{-x} \in G$. În concluzie, $(G, \cdot)$ este grup. c) Funcţia f este injectivă (deoarece $f(x_1) = f(x_2)$ implică $A_{x_1} = A_{x_2}$, deci $x_1 = x_2$); este surjectivă (deoarece pentru orice $A_x \in G$, există $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(x) = A_x$) şi îndeplineşte condiţia de morfism $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$ $(f(x + y) = A_{x+y} = A_x \cdot A_y = f(x) \cdot f(y))$. Rezultă că f este izomorfism între grupurile $(\mathbb{Z}, +)$ şi $(G, \cdot)$. **34.** Dacă $A, B \in G$, $A = \begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix}$, iar $B = \begin{pmatrix} z & it \\ it & z \end{pmatrix}$, cu $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, atunci $A \cdot B = \begin{pmatrix} xz - ty & i(zy + tx) \\ i(tx + zy) & xz - ty \end{pmatrix}$ şi cum $(xz - ty)^2 +$

Scanned with OKEN Scanner

$+(tx+zy)^2=(x^2+y^2)(z^2+t^2)\neq 0$, rezultă că $A\cdot B\in G$. b) Deoarece G este parte stabilă a grupului multiplicativ $(M,\cdot)$ al matricelor nesingulare de ordin 2, iar dacă $A=\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix}$, atunci $A^{-1}=\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & -iy \\ -iy & x \end{pmatrix}\in G$, rezultă că $(G,\cdot)$ este subgrup al grupului $(M,\cdot)$. c) Avem $f((x+iy)(z+ti))=f((xz-yt)+i(xt+yz))=\begin{pmatrix} xz-yt & i(xt+yz) \\ i(xt+yz) & xz-yt \end{pmatrix}$ și $f(x+iy)f(z+it)=\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & it \\ it & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xz-yt & i(xt+yz) \\ i(xt+yz) & xz-yt \end{pmatrix}$. Rezultă că $f((x+iy)(z+ti))=f(x+iy)\cdot f(z+ti)$, $\forall\, x+iy,\ z+ti\in\mathbb{C}^*$, deci f este morfism. Se arată ușor că f este bijectivă. În concluzie, f este izomorfism.

35. Cum imaginea funcției arctg este $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, operația este corect definită. Avem că $(x*y)*z=x*(y*z)=$ $=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z)$, $\forall\, x,y,z\in G$, prin urmare $*$ este asociativă. Evident că $x*y=y*x$, $\forall\, x,y\in G$, deci $*$ este comutativă. Cum $x*0=0*x=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)=x$, $\forall\, x\in G$, elementul neutru este $e=0$. În sfârșit, observăm că $x*(-x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}(-x))=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}x)=\operatorname{arctg}0=0$, deci orice element $x\in G$ este simetrizabil, cu simetricul $x'=-x$. În concluzie, $(G,*)$ este grup abelian. b) Funcția $f:G\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}x$, este bijectivă și are proprietatea că $f(x*y)=f(x)+f(y)$, prin urmare f este un izomorfism de grupuri. **36.** a) Pentru $x,y>0$, $x^{\ln y}=e^{\ln x\ln y}>0$; cum $x^{\ln y}=1$ dacă și numai dacă $x=1$ sau $y=1$, rezultă că pentru $x,y\in G$, avem $x*y\in G$, deci $*$ este corect definită. Se verifică ușor că $*$ este asociativă și comutativă. Elementul neutru este e. Orice element $x\in G$ are simetricul $x'=e^{1/\ln x}\in G$. În concluzie, $(G,*)$ este grup abelian. b) Trebuie să arătăm că: 1. $x,y\in H\Rightarrow x*y\in H$. 2. $x\in H\Rightarrow x'\in H$. Într-adevăr: 1. $x,y\in H\Rightarrow x=e^a$, $y=e^b$, $a,b\in\mathbb{Q}^*$ și $x*y=$ $=e^{\ln x\ln y}=e^{ab}$. Cum $ab\in\mathbb{Q}^*$, rezultă că $x*y\in H$. Apoi, 2. $x\in H\Rightarrow x=e^a$, $a\in\mathbb{Q}^*$ și $x'=e^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\frac{1}{a}}\in H$. c) Se arată ușor că f este bijectivă și, cum $f(x\cdot y)=f(e^{\ln x\ln y})=\ln x\ln y=f(x)f(y)$, $\forall\, x,y\in G$, rezultă că f este și morfism. Prin urmare, f este izomorfism. **37.** Observăm că $(f_n\circ f_m)(x)=f_n(f_m(x))=2+(f_m(x)-2)^{2^n}=2+(x-$ $-2)^{2^m\cdot 2^n}=2+(x-2)^{2^{m+n}}=f_{n+m}(x)$, $\forall\, x\in(2,\infty)$, $\forall\, n,m\in\mathbb{Z}$. Mai observăm că $f_n=f_m\Leftrightarrow n=m$, unde $n,m\in\mathbb{Z}$. Conform celor de mai sus, G este stabilă în raport cu compunerea funcțiilor. Compunerea funcțiilor este asociativă, f_0 este element neutru, orice funcție $f_n\in G$ este simetrizabilă, cu simetrica $f_n'=f_{-n}$, iar operația este comutativă, deoarece $f_n\circ f_m=f_m\circ f_n=f_{n+m}$, $\forall\, n,m\in\mathbb{Z}$. Rezultă astfel că $(G,\circ)$ este grup abelian. Funcția $\varphi:G\to$ $\to\mathbb{Z}$, $\varphi(f_n)=n$, $\forall\, f_n\in G$, realizează un izomorfism între $(G,\circ)$ și $(\mathbb{Z},+)$.

4.3. Inele și corpuri

1. a) $(\mathbb{Z},*)$ este grup abelian, cu elementul neutru $e=-3$ și simetricul unui element x, $x'=-6-x$. Apoi $(\mathbb{Z},\circ)$ este monoid, cu elementul neutru $u=-2$. Cum $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$ și $(y*z)\circ x=(y\circ x)*(z\circ x)$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{Z}$, rezultă că $(\mathbb{Z},*,\circ)$ este inel. Deoarece legea $\circ$ este comutativă, inelul este comutativ. b) Să presupunem că inelul are divizori ai lui zero. Fie $x\neq -3$ un divizor, deci există $y\neq -3$ astfel încât $x*y=-3$. Dar $x*y=-3$ implică $(x+3)(y+3)=0$, fals. Contradicția obținută arată că inelul nu are divizori ai lui zero.

Scanned with OKEN Scanner

c) Determinăm elementele inversabile. Fie $x \in \mathbb{Z}$ inversabil, cu inversul $x' \in \mathbb{Z}$; rezultă că $x * x' = x' * x = u$, deci $xx' + 3x + 3x' + 6 = -2$, prin urmare $x' = \frac{-8-3x}{x+3} = -3 + \frac{1}{x+3}$, $x \neq -3$. Din $x' \in \mathbb{Z}$, rezultă că $x = -2$ sau $x = -4$. Elementele inversabile sunt -2 și -4. **2.** a) Se verifică ușor că pentru orice $X, Y \in B$, avem $X + Y$ și $XY \in B$. b) Operația indusă de „+" pe B este asociativă, comutativă și are element neutru; în plus, dacă $A \in B$, atunci $-A \in B$, deci $(B, +)$ este grup abelian. Operația indusă de „·" pe B este asociativă, comutativă și are element neutru, deci $(B, \cdot)$ este monoid comutativ. Cum înmulțirea este distributivă față de adunare, rezultă că $(B, +, \cdot)$ este inel comutativ. c) Deoarece, considerând $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_3$ și $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq O_3$, avem $X \cdot Y = O_3$, inelul are divizori ai lui zero. **3.** a) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} c & d \\ -3d & c \end{pmatrix}$ sunt matrice din A, atunci $X + Y = \begin{pmatrix} m & n \\ -3n & m \end{pmatrix} \in A$, unde $m = a + c$, $n = b + d$ sunt din $\mathbb{Z}$. b) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} c & d \\ -3d & c \end{pmatrix}$ din A. Din $XY = O_2$ rezultă că $\det(XY) = 0$, de unde $\det X \cdot \det Y = 0$, deci $(a^2 + 3b^2)(c^2 + 3d^2) = 0$. Rezultă că $a^2 + 3b^2 = 0$, prin urmare $a = b = 0$ și atunci $X = O_2$ sau $c^2 + 3d^2 = 0$, de unde $c = d = 0$ și atunci $Y = O_2$. c) Unitatea inelului este I_2. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix}$ inversabilă, cu inversa $Y = \begin{pmatrix} c & d \\ -3d & c \end{pmatrix}$, $X, Y \in A$. Deoarece $XY = I_2$, rezultă că $\det X \cdot \det Y = 1$, de unde $(a^2 + 3b^2)(c^2 + 3d^2) = 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Deducem că $a = \pm 1$, $b = 0$ și $c = \pm 1$, $d = 0$. Prin urmare, matricele inversabile din inelul A sunt I_2 și $-I_2$. **4.** a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ 5d & c \end{pmatrix}$ din G. Cum $A + B = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 5(b+d) & a+c \end{pmatrix} \in G$ și $A \cdot B = \begin{pmatrix} ac+5bd & ad+bc \\ 5(bc+ad) & ac+5db \end{pmatrix} \in G$, rezultă că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor. b) Folosind proprietățile adunării și înmulțirii matricelor, rezultă ușor că $(G, +, \cdot)$ este inel. Prin calcul se verifică faptul că $A \cdot B = B \cdot A$, $\forall A, B \in G$. Astfel, inelul $(G, +, \cdot)$ este comutativ. Presupunem că inelul are divizori ai lui zero. Fie A un divizor al lui zero; atunci $A \neq O_2$ și există $B \neq O_2$ astfel încât $A \cdot B = O_2$. Obținem că $ac + 5bd = 0$ și $bc + ad = 0$, relații care formează un sistem cu necunoscutele c, d. Cum $\Delta = \begin{vmatrix} a & 5b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - 5b^2 \neq 0$ pentru a sau $b \neq 0$ (altfel $\frac{a}{b} = \pm\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$), rezultă că $c = 0$, $d = 0$ și $B = O_2$, fals. În concluzie inelul $(G, +, \cdot)$ nu are divizori ai lui zero. **5.** Considerăm $f, g : \{0, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ 1, x = 1 \end{cases}$ și $g(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ 0, x = 1 \end{cases}$. Avem că $f, g \neq 0$ (unde funcția 0 este elementul neutru din A, $0(0) = 0$ și $0(1) = 0$) și $f \cdot g = 0$. Rezultă că inelul A are divizori ai lui zero. **6.** a) De exemplu, $z = i\sqrt{2}$. b) Fie $z = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ inversabil, cu inversul $z' = a' + b'i \in \mathbb{Z}[i]$. Din $z \cdot z' = 1$ rezultă că $|z| \cdot |z'| = 1$, deci $(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = 1$ și de aici $a^2 + b^2 = 1$, de unde $a = \pm 1$, $b = 0$ sau $a = 0$, $b = \pm 1$. Elementele inversabile sunt -1, 1, $-i$ și i. c) Fie $x, y \in H$; atunci $x = (a + b) + (a - b)i$, $y = (c + d) + (c - d)i$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Rezultă că $xy = (2ad + 2bc) + i(2ac - 2bd) = (m + n) + i(m - n)$, unde $m = ad + bc + ac - bd \in \mathbb{Z}$, $n = ad + bc - ac + bd \in \mathbb{Z}$, deci $xy \in H$.

Scanned with OKEN Scanner

7. a) Deoarece $x \circ 4 = 4 \circ x = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, 4 este element neutru al legii „$\circ$". b) Zerourile celor două inele sunt 3, respectiv 0, iar unitățile lor sunt 4, respectiv 1. Dacă f este morfism de inele, atunci $f(3) = 0$ și $f(4) = 1$. Obținem că $3a + b = 0$, $4a + b = 1$, de unde $a = 1$, $b = -3$. Rezultă că $f(x) = x - 3$ și se arată ușor că această funcție este bijectivă și are proprietățile că $f(x * y) = f(x) + f(y)$, $f(x * y) = f(x) f(y)$, prin urmare f este izomorfism de inele. c) Observăm că $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$ și, prin inducție matematică, rezultă că $x \circ x \circ \ldots \circ x = (x - 3)^n + 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\forall x \in \mathbb{Z}$. Ecuația dată devine $(x - 3)^{2009} + 3 = 2^{2009} + 3$, cu soluția $x = 5$. **8.** a) $x^2 = (1 + \sqrt{2})^2$ implică $x = \pm(1 + \sqrt{2})$, deci $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. b) Fie $x \in \mathbb{Z}$; atunci $x = x + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ și $x = x + 0\sqrt{3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, deci $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Reciproc, fie $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, deci $x = a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{3}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$; rezultă că $b\sqrt{2} - d\sqrt{3} = c - a$, de unde, prin ridicare la pătrat, $bd\sqrt{6} \in \mathbb{Z}$, deci $b = 0$ sau $d = 0$, de unde $x \in \mathbb{Z}$. Astfel, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \subset \mathbb{Z}$. Concluzia se impune. c) Presupunem că există $f : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ morfism de inele. Cum $f(1) = 1$, rezultă că $f(2) = f(1) + f(1) = 2$; atunci $2 = f((\sqrt{2})^2) = f^2(\sqrt{2})$, deci $f(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Contradicția obținută rezolvă problema. **9.** a) Din comutativitatea operației $\perp$ obținem că $a = b$. Apoi, din asociativitatea lui $\perp$, rezultă că $a \in \{0, 1\}$ și convine doar valoarea $a = 1$. Impunând condiția de asociativitate pentru operația $\top$, găsim că $c = 6$. Înlocuind apoi $a = b = 1$, $c = 6$, se verifică pentru $(\mathbb{R}, \perp, \top)$ toate axiomele corpului. Zeroul este 2, iar unitatea este 3. b) Dacă f este morfism, atunci transportă elementele neutre ale celor două operații de pe domeniu în elementele neutre corespunzătoare. Din $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, obținem că $\alpha = 1$, $\beta = 2$, deci $f(x) = x + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se verifică acum că f este bijectivă, iar $f(x + y) = f(x) \perp f(y)$ și $f(xy) = f(x) \top f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. **10.** a) $(f_{1,1} - f_{1,0})(x) = x + 1 - x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, iar $(f_{1,1} \circ f_{0,1})(x) = f_{1,1}(1) = 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. b) $f_{a,b} + f_{c,d} = f_{a+c,\, b+d} \in A$, iar $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac,\, ad+b} \in A$, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$. De exemplu, funcția $f_{0,1}$ nu este inversabilă (i.e. simetrizabilă în raport cu operația de compunere). Fiind diferită de zeroul inelului (care este funcția constant nulă), rezultă că A nu este corp. **11.** Două elemente: $\hat{1}$ și $\hat{5}$; sunt acele elemente $\hat{k}$ pentru care numerele k și 6 sunt relativ prime. **12.** Elementele inversabile din $\mathbb{Z}_{10}$ sunt $\hat{1}, \hat{3}, \hat{7}, \hat{9}$. Probabilitatea căutată este egală cu $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. **13.** Inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ este finit (conține 16 matrice, întrucât fiecare element dintre cele patru ale unei matrice poate să fie ales în câte două moduri, ($\hat{0}$ sau $\hat{1}$) și este și necomutativ (de exemplu, $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, însă $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$). **14.** $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2), +, \cdot)$ este inel și cum $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \neq O_2$, $B = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \neq O_2$ și $A \cdot B = O_2$, acest inel are divizori ai lui zero. Un alt exemplu este furnizat de inelele $\mathbb{Z}_n$, unde n este număr compus. Într-un astfel de inel elementul $\hat{k}$, unde $(k, n) \geq 2$, este divizor al lui $\hat{0}$. **15.** a) $\hat{3}$; b) $\hat{6}$. **16.** a) $\hat{0}^3 = \hat{0}$; $\hat{1}^3 = \hat{1}$; $\hat{2}^3 = \hat{8} = \hat{2}$; $\hat{3}^3 = 27 = \hat{3}$; $\hat{4}^3 = 64 = \hat{4}$. $\hat{5}^3 = 125 = \hat{5}$. b) Evident relația este adevărată pentru $n = 1$. Dacă o presupunem adevărată pentru n, deci $\hat{a}^{2n} = \hat{a}^2$, atunci $\hat{a}^{2n+2} = \hat{a}^{2n} \cdot \hat{a}^2 = \hat{a}^2 \cdot \hat{a}^2 = \hat{a}^4 = \hat{a}^3 \cdot \hat{a} = \hat{a} \cdot \hat{a} = \hat{a}^2$, deci este adevărată și pentru $n + 1$. Rezultă că $\hat{a}^{2n} = \hat{a}^2$, $\forall a \in \mathbb{Z}_6$ și $\forall n \in \mathbb{N}^*$. De asemenea, $\hat{a}^{2n+1} = \hat{a}^{2n} \cdot \hat{a} = \hat{a}^2 \cdot \hat{a} = \hat{a}^3 = \hat{a}$. c) Conform b), suma dată este egală cu $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} = \hat{3}$. **17.** a) $x = \hat{1}$ sau $x = \hat{4}$. b) $\hat{0}$. c) $(x, y) \in$

Scanned with OKEN Scanner

$\in \{(\hat{1},\hat{2});(\hat{3},\hat{4});(\hat{5},\hat{0})\}$. **18.** Ecuația este echivalentă cu $\hat{x}(\hat{x}-\hat{1})=\hat{0}$ în $\mathbb{Z}_8$, deci $x(x-1)\vdots 8$. Rezultă $\hat{x}\in\{\hat{0},\hat{1}\}$. **19.** a) Verificând fiecare dintre valorile $\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}$, obținem unica soluție $x=\hat{3}$. Altfel: ecuația $x^2-x-\hat{1}=\hat{0}$ se poate scrie sub formula $x^2-\hat{4}x+\hat{4}=\hat{0}$, adică $(x+\hat{2})^2=\hat{0}$. Cum $\mathbb{Z}_5$ este corp, deci nu are divizori ai lui $\hat{0}$, rezultă că $x+\hat{2}=\hat{0}$, de unde $x=\hat{3}$. b) Vom arăta că ecuația nu are soluții. Presupunem, prin absurd, că există $a\in\mathbb{Z}_{100}$ pentru care $a^2-a-\hat{1}=\hat{0}$; atunci $a(a-\hat{1})=\hat{1}$. Rezultă că $a(a-1)=M_{100}+1$, ceea ce este imposibil: membrul stâng este par, în timp ce membrul drept este impar. **20.** a) $I_2^2=I_2$. b) $A^2=B^2=I_2$. c) $AB=\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{2}\\ \hat{2}&\hat{1}\end{pmatrix}$ și $(AB)^2=\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{2}\end{pmatrix}$, deci $AB\notin G$. d) $n=4$. **21.** c) 9 elemente. d) $n=8$. **22.** a) $A^2=\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{1}\\ \hat{1}&\hat{2}\end{pmatrix}$; $A^3=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{2}\\ \hat{2}&\hat{1}\end{pmatrix}=A$. b) $A^{2002}=A^{2001}\cdot A=(A^3)^{667}\cdot A=A^{668}=A^{666}\cdot A^2=(A^3)^{222}\cdot A^2=A^{224}=(A^3)^{74}\cdot A^2=A^{75}\cdot A=(A^3)^{25}\cdot A=A^{24}\cdot A^2=$ $=(A^3)^8\cdot A^2=A^9\cdot A=(A^3)^3\cdot A=A^3\cdot A=A^2$ și $A^{2003}=A^3=A$. c) Presupunem că există $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n=I_2$. Rezultă că $(\det A)^n=\det I_2$, de unde $\hat{0}=\hat{1}$, fals, deci $A^n\neq I_2$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$. **23.** a) Fie $A=\begin{pmatrix}a&b\\ -b&a\end{pmatrix}$, cu $\det A=$ $=a^2+b^2=\hat{0}$. Putem considera $a=\hat{2}$, $b=\hat{1}$ și $A=\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{1}\\ -\hat{1}&\hat{2}\end{pmatrix}$. b) Fie $M=\begin{pmatrix}a&b\\ -b&a\end{pmatrix}$; atunci $\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{1}\\ -\hat{1}&\hat{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\ -b&a\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}\hat{2}a-b&\hat{2}b+a\\ -\hat{2}b-a&\hat{2}a-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{0}\end{pmatrix}$ pentru $b=\hat{2}a$. Putem considera $M=\begin{pmatrix}\hat{1}&\hat{2}\\ -\hat{2}&\hat{1}\end{pmatrix}$. c) Fie $A=\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{1}\\ -\hat{1}&\hat{2}\end{pmatrix}$; ecuația devine $X^2=A$, de unde $X^3=XA=AX$. Considerăm $X=\begin{pmatrix}m&n\\ p&q\end{pmatrix}$. Din $AX=XA$, rezultă că $p=-n$ și $q=m$, deci $X=\begin{pmatrix}m&n\\ -n&m\end{pmatrix}$ și astfel $X^2=\begin{pmatrix}m^2-n^2&\hat{2}mn\\ -\hat{2}mn&m^2-n^2\end{pmatrix}$. Cum $X^2=\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{1}\\ -\hat{1}&\hat{2}\end{pmatrix}$, rezultă că $m^2-n^2=\hat{2}$ și $\hat{2}mn=\hat{1}$, $m,n\in\mathbb{Z}_5$. Obținem soluțiile $n=\hat{2}$, $m=\hat{4}$ sau $n=3$, $m=\hat{1}$ și corespunzător matricele X. **24.** a) a,b,c pot lua fiecare câte două valori; rezultă că A are 8 elemente. b) Fie $X=\begin{pmatrix}a&\hat{0}&\hat{0}\\ \hat{0}&a&\hat{0}\\ b&c&a\end{pmatrix}\in A$, atunci $X^2=\begin{pmatrix}a^2&\hat{0}&\hat{0}\\ \hat{0}&a^2&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{0}&a^2\end{pmatrix}$. Cum $a\in\mathbb{Z}_2$, avem că $a^2=\hat{0}$ sau $a^2=\hat{1}$, astfel încât $X^2=I_3$ sau $X^2=O_3$. c) $X^2=O_3$ pentru $a^2=\hat{0}$, adică $a=$ $=\hat{0}$. Atunci $X=\begin{pmatrix}\hat{0}&\hat{0}&\hat{0}\\ \hat{0}&\hat{0}&\hat{0}\\ b&c&\hat{0}\end{pmatrix}$ și există 4 asemenea matrice. **25.** a) Pentru $\hat{x}=\hat{1}$, $\hat{y}=\hat{0}$ obținem $I_2\in G$, iar pentru $\hat{x}=\hat{0}$ și $\hat{y}=\hat{0}$, obținem $O_2=G$. b) Avem: $\hat{0}^2=\hat{0}$, $\hat{1}^2=\hat{1}$, $\hat{2}^2=\hat{4}$, $\hat{3}^2=\hat{4}$, $\hat{4}^2=\hat{1}$. Dacă $\hat{y}=\hat{0}$, atunci $\hat{x}^2=\hat{0}$, deci $\hat{x}=\hat{0}$; dacă $\hat{y}=\hat{1}$, atunci $\hat{x}^2=\hat{2}$, fals; dacă $\hat{y}=\hat{2}$, atunci $\hat{x}^2=\hat{3}$, fals; dacă $\hat{y}=\hat{3}$, atunci $\hat{x}^2=\hat{3}$, fals, iar

Scanned with OKEN Scanner

dacă $\hat{y}=\hat{4}$; atunci $\hat{x}^2=\hat{2}$, fals. În concluzie, $\hat{x}^2-\hat{2}\hat{y}^2=\hat{0}$ dacă și numai dacă $\hat{x}=\hat{y}=\hat{0}$. c) Dacă $A=\begin{pmatrix}\hat{x} & \hat{y}\\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\hat{u} & \hat{v}\\ \hat{2}\hat{v} & \hat{u}\end{pmatrix}$, $A, B\in G$, atunci $A+B=\begin{pmatrix}\widehat{x+u} & \widehat{y+v}\\ \hat{2}\widehat{(y+v)} & \widehat{x+u}\end{pmatrix}\in G$ și $A\cdot B=\begin{pmatrix}\widehat{xu+2yv} & \widehat{xv+yu}\\ \hat{2}\widehat{(xv+yu)} & \widehat{xu+2yv}\end{pmatrix}\in$ $\in G$. d) G are $5\cdot 5=25$ elemente. e) Fie $A=\begin{pmatrix}\hat{x} & \hat{y}\\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x}\end{pmatrix}$, $A\neq 0$; din b) rezultă $\det A\neq\hat{0}$, deci A este inversabilă și atunci $B=A^{-1}=(\hat{x}^2-\hat{2}\hat{y}^2)^{-1}\begin{pmatrix}\hat{x} & -\hat{y}\\ -\hat{2}\hat{y} & \hat{x}\end{pmatrix}\in G$. f) $(G,+,\cdot)$ este corp cu 25 de elemente. **26.** a) Avem $\hat{0}^2=\hat{0}$, $\hat{1}^2=\hat{1}$, $\hat{2}^2=\hat{4}$, $\hat{3}^2=\hat{2}$, $\hat{4}^2=\hat{2}$, $\hat{5}^2=\hat{4}$, $\hat{6}^2=\hat{1}$, deci $H=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{4}\}$. b) Folosim a) dacă $x=\hat{0}$, atunci $y=\hat{0}$; dacă $x=\hat{1}$, atunci $y=\hat{6}\notin H$; dacă $x=\hat{2}$, $y=\hat{5}\notin H$, iar dacă $x=\hat{4}$, $y=\hat{3}\in H$. c) Fie $A, B\in G$, $A=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$, $a\neq\hat{0}$ sau $b\neq\hat{0}$ și $B=\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}$, $c\neq\hat{0}$ sau $d\neq\hat{0}$. Avem $A\cdot B=\begin{pmatrix}ac-bd & -ad-bc\\ bc+ad & ac-bd\end{pmatrix}$. Cum $(ac-bd)^2+$ $+(bc+ad)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)\neq\hat{0}$, deoarece $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ este corp, rezultă că $ac-bd$ sau $bc+ad$ sunt nenule, deci G este parte stabilă față de înmulțirea matricelor. Comutativitatea se verifică prin calcul, iar asociativitatea se perpetuează de la înmulțirea matricelor. Elementul neutru este $\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\in G$. Dacă $A=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\in G$, cum $\det A=a^2+b^2\neq\hat{0}$, $\det A$ este element inversabil în $\mathbb{Z}_7$ și atunci A este inversabilă în G, iar $A^{-1}=(a^2+b^2)^{-1}\cdot$ $\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\in G$. Prin urmare, $(G,\cdot)$ este grup abelian.

4.4. Polinoame

1. Fie $f=aX^3+bX^2+cX+d$, cu $a, b, c, d\in\mathbb{R}$. Atunci $f(1+i)=(-2a+c+d)+(2a+2b+c)i$, iar $f(i)=(-b+d)+$ $+(-a+c)i$. Obținem sistemul $-2a+c+d=-1$, $2a+2b+c=2$, $-b+d=1$, $-a+c=-1$, cu soluția $a=d=1$, $b=$ $=c=0$. În concluzie, $f=X^3+1$. **2.** a) $f_n(0)=1$. $f_n(-1)=0$. b) Folosim metoda inducției matematice. Prin calcul, $f_1=\frac{1}{1!}(X+1)$. Dacă presupunem că $f_k=\frac{1}{k!}(X+1)\ldots(X+k)$, atunci: $f_{k+1}=f_k+\frac{X(X+1)\ldots(X+k)}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}(X+$ $+1)(X+2)\ldots(X+k)\cdot\left(1+\frac{X}{k+1}\right)=\frac{1}{(k+1)!}(X+1)(X+2)\ldots(X+k+1)$, deci relația este adevărată pentru $k+1$ și rezultă că este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. **3.** a) $a_0+a_1+\ldots+a_{10}=f(1)=2^{10}$. b) $f(i)=0$. c) Adunăm relațiile $f(1)=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{10}$ și $f(-1)=a_0-a_1+a_2-\ldots+a_{10}$. d) Avem: $f(i)=a_0+a_1i+a_2i^2+\ldots+a_{10}i^{10}=a_0-$ $-a_2+a_4\ldots+a_{10}+i(a_1-a_3+a_5-a_7+a_9)$ și $f(-i)=a_0-a_2+a_4\ldots+a_{10}-i(a_1-a_3+a_5-a_7+a_9)$. Rezultă că: $f(i)-f(-i)=2i(a_1-a_3+a_5-a_7+a_9)$. Cum $f(i)-f(-i)=0$, deducem că $a_1-a_3+a_5-a_7+a_9=0$. **4.** a) Produsul coeficienților dominanți ai polinoamelor f și g este 1 și cei doi coeficienți sunt numere întregi, deci sunt ambii egali cu 1 sau ambii egali cu -1. În primul caz, fie $f=X+a$, $g=X^2+bX+c$, $a, b, c\in\mathbb{Z}$. Atunci $f\cdot g=X^3+$ $+(a+b)X^2+(c+ab)X+ac$; obținem că $a+b=-1$, $ab+c=-5$ și $ac=2$. Din ultima relație, $(a,c)\in\{(1,2);$

Scanned with OKEN Scanner

$(2, 1); (-1, -2); (-2, -1)\}$. Folosind prima relație îl aflăm pe b, apoi verificăm în relația a doua. Convine doar varianta $a = 2, b = -3, c = 1$, deci $f = X + 2, g = X^2 - 3X + 1$. Analog obținem a doua soluție: $f = -X - 2, g = -X^2 + 3X - 1$. b) Procedăm analog: cele două polinoame au coeficienții dominanți 1; obținem că $g(f(x)) = X^2 + (b + 2a)X + a^2 + ab + c$, de unde $b = -2a, c = a^2$; orice polinoame de tipul $f = X + a, g = X^2 - 2aX + a^2$ verifică ipoteza. **5.** Presupunem că există $g \in \mathbb{C}[X]$ pentru care $f \cdot g = 1$; atunci $\text{gr}(f \cdot g) = \text{gr}\, 1$, deci $\text{gr}\, f + \text{gr}\, g = 0$. Rezultă că $\text{gr}\, f = 0$, de unde $f \in \mathbb{C}^*$. Reciproca este imediată. **6.** a) $q = X^3 - X^2 + 2X - 1, r = -4X + 3$. b) $q = X^3 - iX^2 - (3 + i)X + 3i, r = 3 - i$. c) $q = X^2 + \hat{1}, r = \hat{1}$. **7.** Impunem condițiile $f(1) = 2$ și $f(-1) = -4$; obținem că $a + b = 1$, respectiv $-a + b = -3$, de unde $a = 2, b = -1$. **8.** Avem că $f(1) = 2$ și $f(-1) = -4$. Restul împărțirii lui f prin $X^2 - 1$; are gradul mai mic de 2, deci este de forma $aX + b$. În relația $f(X) = (X^2 - 1) \cdot C(X) + aX + b$ facem $X = 1$, apoi $X = -1$; obținem că $a + b = 2$, respectiv $-a + b = -4$, de unde $a = 3, b = -1$. Restul cerut este $3X - 1$. **9.** a) $f(-1) = 1$. b) $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2008} = f(1) = 3^{1004}$. c) Din teorema împărțirii cu rest, $f = (X^2 - 1) \cdot q + r$, grad $r < 2$, deci $r = aX + b, a, b \in \mathbb{R}$. Din $f(1) = 3^{1004}$ și $f(-1) = 1$, obținem $a + b = 3^{1004}$ și $-a + b = 1$, de unde $a = \frac{1}{2}(3^{1004} - 1)$, $b = \frac{1}{2}(3^{1004} + 1)$. **10.** Din $f = (X^2 - 3X + 1)g + 2X + 1 = (X^2 - 1)h - 2X + 2$, rezultă că $g = X^2 + mX + n, m, n \in \mathbb{C}$. Pentru $x = 1$ și $x = -1$, obținem $-g(1) + 3 = 0$ și $5g(-1) - 1 = 4$ și rezultă că $m = n = 1$, deci $f = (X^2 - 3X + 1)(X^2 + X + 1) + 2X + 1 = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2$. **11.** Gradul restului este mai mic de 3, deci $r = aX^2 + bX + c$. În egalitatea $f(X) = X(X^2 - 1) \cdot q(X) + aX^2 + bX + c$ facem, pe rând, $X = 0$, $X = 1$ și $X = -1$; obținem că $c = 1, a + b + c = 4$, respectiv $a - b + c = 0$. Restul cerut va fi $X^2 + 2X + 1$. **12.** Avem că $f(X) = (X + 1)^2 \cdot q(X) + 2X + 1$, de unde $f(-1) = -1$, iar $f'(-1) = 2$. Restul cerut are gradul mai mic de 3, deci este de forma $aX^2 + bX + c$. Avem că $f(X) = (X - 1)(X + 1)^2 \cdot q_1(X) + aX^2 + bX + c$, de unde $0 = f(1) = a + b + c$ și $-1 = f(-1) = a - b + c$. Derivând relația precedentă și făcând $X = -1$, obținem că $2 = f'(-1) = -2a + b$. Deducem că $a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, deci restul căutat este $\frac{1}{4}(-3X^2 + 2X + 1)$. **13.** a) $r = f(-1) = b - 5$. b) Din teorema împărțirii cu rest, $f = (X^2 - X)q + X$, deci $f(0) = 0$ și $f(1) = 1$. Rezultă că $a = b = 0$. c) $(X - 1)^2$ divide f dacă și numai dacă $x = 1$ este rădăcină dublă pentru f, deci $f(1) = 0, f'(1) = 0$. Rezultă $a = \frac{15}{11}$, $b = -\frac{41}{11}$. **14.** Impunem condițiile $f(1) = f'(1) = 0$ și obținem că $a + b - 3 = 0, 4a + 3b = 0$. Rezolvând sistemul, găsim că $a = -9, b = 12$. Altfel: împărțim, cu ajutorul schemei lui Horner, de două ori prin $X - 1$ și egalăm de fiecare dată restul cu 0. **15.** a) $f(-2) = 0$. b) din a) rezultă că $f \vdots x + 2$; găsim că $f(x) = (x + 2)(x^2 + 2x - 24)$. Ecuația $f(x) = 0$ are soluțiile $x \in \{-6, -2, 4\}$. c) Notând $2^x = t$, rezultă că $t^3 + 4t^2 - 20t - 48 = 0$, de unde $t \in \{-6, -2, 4\}$. Cum $t > 0$, rezultă că $t = 4$, deci $2^x = 4$ și $x = 2$. **16.** a) $f = (X - 1)(2X^2 - 5X + 2)$, deci câtul împărțirii polinomului f la $X - 1$ este $2X^2 - 5X + 2$, iar restul este 0. b) $f = (x - 1)(x - 2)(2x - 1)$ și are rădăcinile $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{2}$. c) Cu substituția $2^x = t$, obținem $2t^3 - 7t^2 + 7t - 2 = 0$, deci $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = \frac{1}{2}$ și apoi $x \in \{0, 1, -1\}$. d) Cu substituția $\log_4 x = y$, găsim $y \in \left\{1, 2, \frac{1}{2}\right\}$ și apoi $x \in \{4, 16, 2\}$. **17.** a) $h = X^4 + 2X^3 - 28X^2 - 8X + 96$. b) $a = 2, b = -8$. c) Cu substituția $2^x = t$, avem $t^4 + 2t^3 - 28t^2 - 8t + 96 = 0$, deci $(t^2 + 2t - 24)(t^2 - 4) = 0$. Obținem $t_1 = -6, t_2 = 4, t_3 = -2, t_4 = 2$ și apoi $x = 1$ sau $x = 2$. **18.** a) $f = (X^2 - 2X + 5)(X^2 - 4X + 5)$. b) $f(x) = 0$ implică $x^2 - 2x + 5 = 0$ și $x^2 - 4x + 5 = 0$, ecuații care nu au soluții reale. c) $x_{1,2} = 1 \pm 2i$ și $x_{3,4} = 2 \pm i$. Toate rădăcinile au modulul egal cu $\sqrt{5}$. **19.** a) $f(1) = -4$. b) Câtul este X^2 (iar restul -4). c) Observăm că $f = X^2(X - 1)^2 - 4 = (X^2 - X + 2)(X^2 - X - 2)$. Rădăcinile lui f se obțin

Scanned with OKEN Scanner

rezolvând ecuațiile $x^2 - x + 2 = 0$ și $x^2 - x - 2 = 0$ și sunt $x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, respectiv $x_3 = -1 \in \mathbb{R}$, $x_4 = 2 \in \mathbb{R}$.

20. a) $f_m(X) = X(X+3)(X+1)(X+2) + 1 - m = (X^2 + 3X)(X^2 + 3X + 2) + 1 - m = (X^2 + 3X)^2 + 2(X^2 + 3X) + 1 - m = (X^2 + 3X + 1)^2 - m$ și atunci $f_m(X) - (X^2 + 3X + 1)^2 = -m$. b) Ecuația dată este echivalentă cu $x(x+1)(x+2)(x+3) = 0$, cu soluțiile -3, -2, -1 și 0. c) Ecuația este echivalentă cu $(x^2 + 3x + 1)^2 = m$, deci în mod necesar $m \geq 0$. Pentru $m \geq 0$, rezultă $x^2 + 3x + 1 - \sqrt{m} = 0$ sau $x^2 + 3x + 1 + \sqrt{m} = 0$. Toate soluțiile ecuației date sunt reale dacă cele două ecuații de gradul doi au soluțiile reale, deci $m \geq 0$, $\Delta_1 \geq 0$ și $\Delta_2 \geq 0$ și rezultă că $m \in \left[0, \frac{25}{16}\right]$.

21. Cum f are două rădăcini duble, $f = (X - x_1)^2(X - x_2)^2 = (X^2 - sX + p)^2 = X^4 - 2sX^3 + (s^2 + 2p)X^2 - 2spX + p^2$, de unde, prin identificare, $s = 3$, $p = 2$ și apoi $a = -12$, $b = 4$. **22.** Polinomul g are rădăcini simple, iar o rădăcină oarecare x_0 a sa are proprietățile: $x_0^2 + x_0 + 1 = 0$, $x_0^3 = 1$. Ar fi suficient să demonstrăm că $f(x_0) = 0$. Însă $f(x_0) = (x_0^3)^{333} + (x_0^3)^{111} + (x_0^2 + x_0 + 1) - 3 = 1 + 1 + 1 - 3 = 0$. **23.** a) $f(1) = 1$, $f(-1) = 5$. b) $a = 1$. c) $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) = f(1) = 1$. d) $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4) = f(-1) = 5$. **24.** a) $f = Xg + 1$. b) $y_1 = -1$, $y_2 = i$, $y_3 = -i$. c) $a = -1$. d) Cum $f(x_1) = x_1 g(x_1) + 1 = 0$, rezultă că $g(x_1) = -\frac{1}{x_1}$; la fel obținem că $g(x_2) = -\frac{1}{x_2}$, $g(x_3) = -\frac{1}{x_3}$; $g(x_4) = -\frac{1}{x_4}$, deci $b = \frac{1}{x_1x_2x_3x_4} = 1$. e) $f(y_1) + f(y_2) + f(y_3) = y_1g(y_1) + 1 + y_2g(y_2) + 1 + y_3g(y_3) + 1 = 3$. **25.** Fie $f = g - 2$; deducem că $f(-2) = f(-1) = f(1) = f(2) = 0$, deci $f = g - 2 = (X + 2)(X + 1)(X - 1)(X - 2)\,C(X)$, unde $C \in \mathbb{Z}[X]$. Fie $a \in \mathbb{Z}$ rădăcină pentru g; atunci $g(a) = 0$ și ar rezulta că $-2 = (a + 2)(a + 1)(a - 1)(a - 2) \cdot C(a)$, egalitate imposibilă, deoarece -2 nu poate fi scris ca produs a cel puțin patru factori întregi distincți. Concluzia se impune. **26.** Fie $a + b + c = -p$, $ab + ac + bc = q$, $abc = -r$, $p, q, r \in (0, \infty)$. Rezultă că a, b, c sunt soluțiile reale ale ecuației $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Cum $x^3 + px^2 + qx + r > 0$, $\forall\, x > 0$, ecuația are soluțiile strict negative, deci $a, b, c \in (-\infty, 0)$. **27.** a) $x_1x_2x_3 = -4$. b) Din relațiile lui Viète, $a = -2$, $b = -2$, $c = 4$. c) x_1, x_2, x_3 sunt soluțiile ecuației $x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$, deci sunt egale cu 2, $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$. **28.** a) $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -8$, $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 64$. Deoarece $x_1^3 + 8x_1^2 - 8 = 0$, $x_2^3 + 8x_2^2 - 8 = 0$, $x_3^3 + 8x_3^2 - 8 = 0$, înmulțind prima relație cu x_1^n, a doua cu x_2^n și pe a treia cu x_3^n, prin adunare obținem că $S_{n+3} + 8S_{n+2} - 8S_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Pentru $n = 0$, rezultă că $S_3 = -8S_2 + 8S_0 = -8 \cdot 64 + 8 \cdot 3 = -488$. b) Din a) $S_n \in \mathbb{Z}$ pentru $n = 1, 2, 3$. Presupunând $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathbb{Z}$, rezultă că $S_{n+1} = -8S_n + 8S_{n-2} \in \mathbb{Z}$. În concluzie, $S_n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. **29.** Fie r rația progresiei, atunci $x_1 = x_2 - r$, iar $x_3 = x_2 + r$. Din relațiile lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ și $x_1x_2x_3 = -(a + 2)$. Deducem că $x_2 = 1$, respectiv $1 - r^2 = -(a + 2)$. Însă $f(x_2) = 0$, prin urmare $a = 0$, apoi $r^2 = 3$. Rădăcinile vor fi $1 - \sqrt{3}$, 1 și $1 + \sqrt{3}$. **30.** $c = 8$. **31.** a) Fie $f = X^3 - X + a$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, deci $f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$. Rezultă că $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) = -f(-1) = -a$. b) Dacă $x_1 = 2$, atunci $a = -6$ și ecuația se scrie $(x - 2)(x^2 + 2x + 3) = 0$, de unde $x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{2}$. c) Din relațiile lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ și $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1$. Rezultă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$ și, cum $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$, deducem că cel puțin o rădăcină este egală cu zero. Găsim $a = 0$ și rădăcinile sunt -1, 0, 1. **32.** a) Avem: $s_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$; $s_2 = x_1x_2 + \ldots + x_3x_4 = 5$; $s_3 = x_1x_2x_3 + \ldots + x_2x_3x_4 = 1$; $x_4 = x_1x_2x_3x_4 = -1$. Atunci $\frac{1}{x_1} +$

Scanned with OKEN Scanner

$+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{s_3}{s_4}=-1$. b) Mai întâi, $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=s_1^2-2s_2=-6$. Evident, nicio rădăcină a lui f nu este 0; împărțind prin x_1 egalitatea $f(x_1)=0$, obținem că $x_1^3-2x_1^2+5x_1-1-\frac{1}{x_1}=0$. Scriem încă trei relații similare și sumăm; rezultă că $\sum x_1^3-2\left(\sum x_1^2\right)+5\cdot\left(\sum x_1\right)-4-\sum\frac{1}{x_1}=0$, de unde $\sum x_1^3=-19$. **33.** Există $u, r\in\mathbb{C}$ pentru care $x_1=u-3r, x_2=u-r, x_3=u+r, x_4=u+3r$ ($2r$ este rația progresiei aritmetice). Notând $x_1+x_4=s_1, x_2+x_3=s_2, x_1x_4=p_1, x_2x_3=p_2$, relațiile lui Viète pentru ecuația $f(x)=0$ se scriu sub forma $s_1+s_2=a-1$, $s_1s_2+p_1+p_2=-10$, $s_1p_2+s_2p_1=-a+1$, $p_1p_2=9$. Însă $s_1=s_2=2u$, prin urmare $u=\frac{a-1}{4}$. Înlocuind în a treia relație Viète, obținem că $\frac{a-1}{2}(p_1+p_2)=-a+1\Leftrightarrow(a-1)(p_1+p_2+2)=0\Leftrightarrow(a-1)(-10-s_1s_2+2)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(a-1)\left(-8-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2\right)=0$. Cum a doua paranteză este strict negativă, rezultă că $a=1$. Ecuația inițială devine $x^4-10x^2+9=0$, cu soluțiile $\{-3,-1,1,3\}$. **34.** Ecuația este reciprocă. Împărțind ecuația prin x^2, obținem $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$. Notăm $x+\frac{1}{x}=y$; rezultă că $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ și obținem ecuația $6y^2+35y+50=0$, cu soluțiile $y_1=-\frac{5}{2}, y_2=-\frac{10}{3}$. Din $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$, rezultă $x_1=-2, x_2=-\frac{1}{2}$, iar din $x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}$, rezultă $x_3=-3, x_4=-\frac{1}{3}$. **35.** a) z_0-i este soluție a ecuației (ii) dacă și numai dacă $(z_0-i)^3+8=0$, deci dacă și numai dacă $z_0^3-3z_0^2i+3z_0+8+i=0$, adică z_0 este soluție a ecuației (i). b) Ecuația $z^3+8=0$ are soluțiile $-2, -1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}$ și, conform a), ecuația (i) are soluțiile $-2+i, -1+i(\sqrt{3}+1), -1+i(1-\sqrt{3})$. **36.** bi este soluție dacă $-b^3i+b^2(2\sqrt{3}+3i)+(i-4\sqrt{3})b-3i-6\sqrt{3}=0$ și cum $b\in\mathbb{R}$, rezultă că $2\sqrt{3}b^2-4\sqrt{3}b-6\sqrt{3}=0$ și $-b^3+3b^2+b-3=0$. Deducem că $b=-1$ sau $b=3$. Obținem soluțiile $-i, 3i, 2\sqrt{3}+i$. **37.** a) $x_1=1, x_2=-2$, $x_{3,4}=\frac{-2\pm4i}{5}$. **38.** a) $x_1=1, x_2=-1$. b) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$. **39.** a) Din $f(0)=f(1)$ obținem că $a+b=-1$. Apoi, $f\in\mathbb{R}[X]$ și $x_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ rădăcină implică faptul că $x_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ este rădăcină. Cum f se divide cu $(X-x_1)(X-x_2)=X^2-X+1$, deducem că $b-1=c-a=0$, de unde $a=c=-2, b=1$. Câtul împărțirii lui f prin X^2-X+1 este X^2-X-2; egalând câtul cu 0, găsim că $x_3=-1, x_4=2$. b) Restul împărțirii lui f prin g este $(t^2+at+1)X^2+(a+b)X+c-at-t^2$. Oricare ar fi $t\in\mathbb{R}^*$, acest rest este nul pentru $a=-\frac{t^2+1}{t}$, $b=\frac{t^2+1}{t}$, $c=-1$. **40.** Cum f are coeficienți raționali și admite rădăcina $x_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$, va admite și rădăcina $x_2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Atunci f se divide cu $(X-x_1)(X-x_2)=X^2-3X+1$. Împărțind f la X^2-3X+1, obținem câtul X^2+X+1 și restul $(a+$

Scanned with OKEN Scanner

$+1)X+(b+2)$. Egalăm restul cu 0 și găsim $a=-1$, $b=-2$, iar ecuația $x^2+x+1=0$ are soluțiile $x_{3,4}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

41. Deoarece $a, b\in\mathbb{R}$ și $x_1=1+2i$, rezultă că $x_2=1-2i$. Prin urmare, $f=X^4-7X^3+21X^2+aX+b$ se divide prin $(X-x_1)(X-x_2)=g$. Împărțind pe f la $g=X^2-2X+5$, obținem restul $r=(a+37)X+b-30$, care este egal cu polinomul 0 dacă $a=-37$ și $b=30$. Ecuația se scrie sub forma $(x^2-2x+5)(x^2-5x+6)=0$ și are rădăcinile $x_{1,2}=1\pm 2i$, $x_3=2$, $x_4=3$. **42.** a) Deoarece $f\in\mathbb{R}[X]$ și $x_1=i$, rezultă că $x_2=-i$. Prin urmare, f se divide prin $(X-i)(X+i)=X^2+1$. Efectuând împărțirea, găsim restul $X(a+4)+b-5$, care este nul pentru $a=-4$ și $b=5$. b) $\Sigma(x_1-1)^2=\Sigma x_1^2-2\Sigma x_1+4=(\Sigma x_1)^2-2\Sigma x_1x_2-2\Sigma x_1+4=4^2-2\cdot 6-2\cdot 4+4=0$. c) Dacă $x_1, x_2, x_3, x_4\in\mathbb{R}$, folosind b) rezultă că $x_1=x_2=x_3=x_4=1$. Atunci $f=(X-1)^4=X^4-4X^3+6X^2-4X+1$, deci $a=-4$ și $b=1$. **43.** a) $S=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(\Sigma x_i)^2-2\Sigma x_ix_j=4-2a$. b) Pentru $a=3$, obținem $S=-2$. Dacă f are toate rădăcinile reale, atunci $S\geq 0$, fals. c) Cum $f\in\mathbb{Q}[X]$ și $x_1=-1+\sqrt{2}$, rezultă că $x_2=-1-\sqrt{2}$. Deci, $f\,\vdots\,(X-x_1)(X-x_2)$. Prin împărțirea lui f la $g=(X-x_1)(X-x_2)=X^2+2X-1$, rezultă că $f=(X^2+a+1)g+(b-2a-2)X+a+c+1$, de unde $b-2a-2=0$, $a+c+1=0$. Dar $f(1)=3$, deci $a+b+c=0$. Rezultă $a=-\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=-\frac{1}{2}$ și $f=(X^2+2X-1)\left(X^2+\frac{1}{2}\right)$, cu rădăcinile $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$ și $x_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$. **44.** a) $a=0$, $b=-3$, $c=2$. b) Dacă $x_1=\sqrt{2}$, cum $f\in\mathbb{Q}[X]$, rezultă că $x_2=-\sqrt{2}$. Din $x_1+x_2+x_3=-a$, obținem că $x_3=-a\in\mathbb{Q}$. c) Dacă $f\in\mathbb{Z}[X]$ și $x, y\in\mathbb{Z}$, atunci $f(x)-f(y)\,\vdots\,x-y$. Fie x_0 o rădăcină întreagă a lui f; atunci $f(1)-f(x_0)=f(1)\,\vdots\,1-x_0$. Dar $f(1)$ este impar, deci x_0 este par. De asemenea, $f(0)-f(x_0)=f(0)\,\vdots\,-x_0$ și, cum $f(0)$ este impar, rezultă că x_0 este impar. Contradicția obținută arată că f nu are rădăcini întregi. **45.** a) $\Sigma\frac{1}{x_1}=\frac{\Sigma x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4}=\frac{a}{1}=\Sigma x_1$. b) Presupunem că P se divide cu X^2-1, deci $P(1)=P(-1)=0$; obținem că $2-2a=2+2a=0$, fals. c) Ecuația $P(x)=0$ este reciprocă. Din $x^2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$, notând $x+\frac{1}{x}=y$, obținem $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ și $2y^2-y-4=0$ cu $y_1=\frac{1-\sqrt{33}}{4}$, $y_2=\frac{1+\sqrt{33}}{4}$. Ecuația $x^2-xy_1+1=0$ are $\Delta_1<0$, deci $x_1, x_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$; fie $x_1=\alpha+\beta i$, $x_2=\alpha-\beta i$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\beta\neq 0$. Din $x_1x_2=1$ rezultă $\alpha^2+\beta^2=1$, deci $|x_1|=|x_2|=1$. Similar, $|x_3|=|x_4|=1$. **46.** a) $a=1$. b) $x_1=1$, $x_2=-1$. c) Trebuie arătat că f, pentru orice $a\in\mathbb{Z}$, nu are rădăcini în $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, ceea ce este evident: termenul liber este egal cu -1, iar coeficientul termenului de grad maxim este 1, deci singurele rădăcini în $\mathbb{Q}$ ar putea fi 1 sau -1. **47.** a) $f=(X-1)\cdot(X^4+3X^2+2X+2)$, deci $x=1$ este rădăcină întreagă pentru f. b) $\Sigma x_1^2=(\Sigma x_1)^2-2\Sigma x_1x_2=1-2\cdot 3=-5$. c) Avem că $f(X)=(X-1)[(X^2+1)^2+(X+1)^2]$. Însă $(x^2+1)^2+(x+1)^2\neq 0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, deci f are o singură rădăcină reală, anume $x=1$. **48.** a) $x_1=-1$, $x_{2,3}=\pm i$. b) $x=1$ este rădăcină dublă dacă $p(1)=0$ și $p'(1)=0$. Rezultă $a=-2$ și $b=0$. c) Pentru $b=1$, singurele rădăcini raționale pot fi 1 sau -1. Dacă $x_1=1$, atunci $a=-3$, iar dacă $x_1=-1$, atunci $a=1$. **49.** a) $(X^2+X\sqrt{2}+1)(X^2-X\sqrt{2}+1)=(X^2+1)^2-(\sqrt{2}X)^2=X^4+1=f$. b) Polinomul f nu are rădăcini raționale și deci, dacă f este reductibil în $\mathbb{Q}[X]$, el este produsul a două polinoame de

Scanned with OKEN Scanner

gradul doi. Deoarece rădăcinile lui f sunt $x_{1,2}=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$ și $x_{3,4}=\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$, rezultă că niciunul dintre polinoamele $(X-x_1)(X-x_2)$; $(X-x_1)(X-x_3)$; $(X-x_1)(X-x_4)$ nu are coeficienți raționali. Rezultă că f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$. **50.** a) $x^4-1=0$ implică $x_1=1, x_2=-1, x_3=i, x_4=-i$. b) $P_3(X)=X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)=(X-1)(X-\varepsilon)(x-\bar{\varepsilon})$, unde $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. c) $P_6=X^6-1=(X^3-1)(X^3+1)=(X-1)(X^2+X+1)(X+1)(X^2-X+1)$. Polinoamele de gradul doi sunt ireductibile peste $\mathbb{R}[X]$, deoarece ambele au discriminantul negativ. **51.** a) Se verifică prin calcul. b) Pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq 1>0$, deci f nu are rădăcini reale. c) Presupunem că f este reductibil în $\mathbb{Z}[X]$, deci există g și $h\in\mathbb{Z}[X]$ de grad cel puțin 1 astfel încât $f=g\cdot h$. Dacă g sau h are gradul 1, atunci f ar avea o rădăcină rațională, fals. În concluzie, g și h au gradul doi. Cum f are coeficientul lui X^4 egal cu 1, putem considera $g=X^2+aX+b$, $h=X^2+cX+d$. Obținem că $f=g\cdot h=X^4+X^3(a+c)+X^2(d+ac+b)+X(ad+bc)+bd$. Prin identificare, obținem: $a+c=-6$, $d+ac+b=13$, $ad+bc=-12$, $bd=5$, $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Din ultima ecuație, $b=1, d=5$ sau $b=5, d=1$ sau $b=-1, d=-5$ sau $b=-5, d=-1$. Analizăm cazul $b=1, d=5$. Din sistemul obținut găsim $a+c=-6$, $ac=7$, care nu are soluții întregi. La fel se procedează în celelalte cazuri. Rezultă că f este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$. **52.** a) Avem $f(0)=0$, apoi $f(1)=f^2(0)+1=1$, $f(2)=f^2(1)+1=2$ și $f(5)=f^2(2)+1=5$. b) Demonstrăm inductiv: pentru $n=0$, $f(a_0)=a_0$ este adevărată. Să presupunem că $f(a_k)=a_k$. Atunci $f(a_{k+1})=f(a_k^2+1)=(f(a_k))^2+1=a_k^2+1=a_{k+1}$, deci afirmația este adevărată și pentru $k+1$. Rezultă că $f(a_n)=a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. c) Considerăm polinomul $g=f-X$. Cum $g(a_k)=0$ și numerele a_k, $k\in\mathbb{N}$, sunt distincte (șirul (a_n) este strict crescător), rezultă că g are o infinitate de rădăcini, deci $g=0$ și apoi $f=X$. **53.** a) $f(a)=0$. b) Una dintre rădăcini este a; să zicem că $x_1=\sqrt{2}+\sqrt{5}$. Cum f are coeficienți raționali, celelalte rădăcini sunt conjugatele primeia, deci $x_2=\sqrt{2}-\sqrt{5}$, $x_3=-\sqrt{2}+\sqrt{5}$, iar $x_4=-\sqrt{2}-\sqrt{5}$. c) Din relațiile lui Viète, $S=0$, iar $P=9$. Bineînțeles, S și P pot fi calculate direct, cunoscând termenii/factorii. d) Evident că $B\subset A$. Vom arăta că $A\subset B$. Pentru aceasta, fie $x=g(a)\in A$, unde $g\in\mathbb{Z}[X]$. Din teorema împărțirii cu rest, există $q, r\in\mathbb{Z}[X]$, grad $r\leq 3$, astfel încât $g=f\cdot q+r$. Rezultă că $g(a)=f(a)\cdot q(a)+r(a)=r(a)$, cu grad $r\leq 3$, prin urmare $g(a)\in B$, adică $A\subset B$. Conchidem că $A=B$, deci $A\setminus B=\emptyset$. **54.** Singura rădăcină rațională a lui f este $x_1=1$, iar această rădăcină este simplă ($f'(1)=5\neq 0$). Înseamnă că g admite rădăcinile $x_1=1$ și $x_2=-p-1$ (pentru că $x_1+x_2=-p$). Evident, $x_2\in\mathbb{Q}$, deci $f(x_2)\neq 0$, întrucât f nu admite alte rădăcini raționale afară de $x_1=1$; chiar dacă $x_2=1$, f admite pe 1 ca rădăcină simplă. În concluzie, $(f,g)=X-1$. **55.** a) $f^2=\hat{1}$, deci grad $f^2=0$. b) Din a), f este inversabil și $f^{-1}=f$. c) $g_1=\hat{2}X+\hat{1}$ și $g_2=\hat{2}X+\hat{3}$. **56.** a) $a=\hat{1}$. c) $x_1=\hat{2}$, $x_2=\hat{3}$, $x_3=\hat{4}$ (se calculează $f(x)$ pentru fiecare $x\in\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$ și se urmărește când se obține rezultatul $\hat{0}$). **57.** a) Se verifică prin calcul. b) $a=\hat{2}$. c) $f=X^3+\hat{5}X=X^3-X$. Conform a), rădăcinile lui f sunt $\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}$. Acesta este un exemplu de polinom care are mai multe rădăcini decât gradul său. **58.** a) Se verifică prin calcul. b) $(X^3-\hat{4})(X^3+\hat{4})=X^6-16=X^6+\hat{5}$. c) Cercetăm dacă f are o rădăcină $b\in\mathbb{Z}_7$, $b\neq 0$: $f(b)=0$ implică $b^6+ab+5=0$ și, cum $b^6=\hat{1}$, rezultă că $ab=\hat{1}$, deci $b=a^{-1}$. Prin urmare, dacă $b\neq 0$, polinomul se divide la $X-a^{-1}$, deci este reductibil. Pentru $a=\hat{0}$, $f=X^6+\hat{5}=(X^3-\hat{4})(X^3+\hat{4})$, deci polinomul f este reductibil și în acest caz. **59.** a) Fie $f(\hat{0})=f(\hat{1})=f(\hat{2})=b$, $b\in\mathbb{Z}_3$.

Scanned with OKEN Scanner

rezolvând ecuațiile $x^2 - x + 2 = 0$ și $x^2 - x - 2 = 0$ și sunt $x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, respectiv $x_3 = -1 \in \mathbb{R}$, $x_4 = 2 \in \mathbb{R}$.

20. a) $f_m(X) = X(X+3)(X+1)(X+2) + 1 - m = (X^2 + 3X)(X^2 + 3X + 2) + 1 - m = (X^2 + 3X)^2 + 2(X^2 + 3X) + 1 - m = (X^2 + 3X + 1)^2 - m$ și atunci $f_m(X) - (X^2 + 3X + 1)^2 = -m$. b) Ecuația dată este echivalentă cu $x(x+1)(x+2)(x+3) = 0$, cu soluțiile -3, -2, -1 și 0. c) Ecuația este echivalentă cu $(x^2 + 3x + 1)^2 = m$, deci în mod necesar $m \geq 0$. Pentru $m \geq 0$, rezultă $x^2 + 3x + 1 - \sqrt{m} = 0$ sau $x^2 + 3x + 1 + \sqrt{m} = 0$. Toate soluțiile ecuației date sunt reale dacă cele două ecuații de gradul doi au soluțiile reale, deci $m \geq 0$, $\Delta_1 \geq 0$ și $\Delta_2 \geq 0$ și rezultă că $m \in \left[0, \frac{25}{16}\right]$.

21. Cum f are două rădăcini duble, $f = (X - x_1)^2(X - x_2)^2 = (X^2 - sX + p)^2 = X^4 - 2sX^3 + (s^2 + 2p)X^2 - 2spX + p^2$, de unde, prin identificare, $s = 3$, $p = 2$ și apoi $a = -12$, $b = 4$. **22.** Polinomul g are rădăcini simple, iar o rădăcină oarecare x_0 a sa are proprietățile: $x_0^2 + x_0 + 1 = 0$, $x_0^3 = 1$. Ar fi suficient să demonstrăm că $f(x_0) = 0$. Însă $f(x_0) = (x_0^3)^{333} + (x_0^3)^{111} + (x_0^2 + x_0 + 1) - 3 = 1 + 1 + 1 - 3 = 0$. **23.** a) $f(1) = 1$, $f(-1) = 5$. b) $a = 1$. c) $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) = f(1) = 1$. d) $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4) = f(-1) = 5$. **24.** a) $f = Xg + 1$. b) $y_1 = -1$, $y_2 = i$, $y_3 = -i$. c) $a = -1$. d) Cum $f(x_1) = x_1 g(x_1) + 1 = 0$, rezultă că $g(x_1) = -\frac{1}{x_1}$; la fel obținem că $g(x_2) = -\frac{1}{x_2}$, $g(x_3) = -\frac{1}{x_3}$; $g(x_4) = -\frac{1}{x_4}$, deci $b = \frac{1}{x_1 x_2 x_3 x_4} = 1$. e) $f(y_1) + f(y_2) + f(y_3) = y_1 g(y_1) + 1 + y_2 g(y_2) + 1 + y_3 g(y_3) + 1 = 3$. **25.** Fie $f = g - 2$; deducem că $f(-2) = f(-1) = f(1) = f(2) = 0$, deci $f = g - 2 = (X + 2)(X + 1)(X - 1)(X - 2)\,C(X)$, unde $C \in \mathbb{Z}[X]$. Fie $a \in \mathbb{Z}$ rădăcină pentru g, atunci $g(a) = 0$ și ar rezulta că $-2 = (a + 2)(a + 1)(a - 1)(a - 2) \cdot C(a)$, egalitate imposibilă, deoarece -2 nu poate fi scris ca produs a cel puțin patru factori întregi distincți. Concluzia se impune. **26.** Fie $a + b + c = -p$, $ab + ac + bc = q$, $abc = -r$, $p, q, r \in (0, \infty)$. Rezultă că a, b, c sunt soluțiile reale ale ecuației $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Cum $x^3 + px^2 + qx + r > 0$, $\forall\, x > 0$, ecuația are soluțiile strict negative, deci $a, b, c \in (-\infty, 0)$. **27.** a) $x_1 x_2 x_3 = -4$. b) Din relațiile lui Viète, $a = -2$, $b = -2$, $c = 4$. c) x_1, x_2, x_3 sunt soluțiile ecuației $x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$, deci sunt egale cu 2, $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$. **28.** a) $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -8$, $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 64$. Deoarece $x_1^3 + 8x_1^2 - 8 = 0$, $x_2^3 + 8x_2^2 - 8 = 0$, $x_3^3 + 8x_3^2 - 8 = 0$, înmulțind prima relație cu x_1^n, a doua cu x_2^n și pe a treia cu x_3^n, prin adunare obținem că $S_{n+3} + 8S_{n+2} - 8S_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Pentru $n = 0$, rezultă că $S_3 = -8S_2 + 8S_0 = -8 \cdot 64 + 8 \cdot 3 = -488$. b) Din a) $S_n \in \mathbb{Z}$ pentru $n = 1, 2, 3$. Presupunând $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathbb{Z}$, rezultă că $S_{n+1} = -8S_n + 8S_{n-2} \in \mathbb{Z}$. În concluzie, $S_n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. **29.** Fie r rația progresiei, atunci $x_1 = x_2 - r$, iar $x_3 = x_2 + r$. Din relațiile lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ și $x_1x_2x_3 = -(a + 2)$. Deducem că $x_2 = 1$, respectiv $1 - r^2 = -(a + 2)$. Însă $f(x_2) = 0$, prin urmare $a = 0$, apoi $r^2 = 3$. Rădăcinile vor fi $1 - \sqrt{3}$, 1 și $1 + \sqrt{3}$. **30.** $c = 8$. **31.** a) Fie $f = X^3 - X + a$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, deci $f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$. Rezultă că $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) = -f(-1) = -a$. b) Dacă $x_1 = 2$, atunci $a = -6$ și ecuația se scrie $(x - 2)(x^2 + 2x + 3) = 0$, de unde $x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{2}$. c) Din relațiile lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ și $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1$. Rezultă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$ și, cum $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$, deducem că cel puțin o rădăcină este egală cu zero. Găsim $a = 0$ și rădăcinile sunt -1, 0, 1. **32.** a) Avem: $s_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$; $s_2 = x_1x_2 + \ldots + x_3x_4 = 5$; $s_3 = x_1x_2x_3 + \ldots + x_2x_3x_4 = 1$; $x_4 = x_1x_2x_3x_4 = -1$. Atunci $\frac{1}{x_1} +$

Scanned with OKEN Scanner

$+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{s_3}{s_4}=-1$. b) Mai întâi, $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=s_1^2-2s_2=-6$. Evident, nicio rădăcină a lui f nu este 0; împărțind prin x_1 egalitatea $f(x_1)=0$, obținem că $x_1^3-2x_1^2+5x_1-1-\frac{1}{x_1}=0$. Scriem încă trei relații similare și sumăm; rezultă că $\sum x_1^3-2\left(\sum x_1^2\right)+5\cdot\left(\sum x_1\right)-4-\sum\frac{1}{x_1}=0$, de unde $\sum x_1^3=-19$. **33.** Există $u, r\in\mathbb{C}$ pentru care $x_1=u-3r$, $x_2=u-r$, $x_3=u+r$, $x_4=u+3r$ ($2r$ este rația progresiei aritmetice). Notând $x_1+x_4=s_1$, $x_2+x_3=s_2$, $x_1x_4=p_1$, $x_2x_3=p_2$, relațiile lui Viète pentru ecuația $f(x)=0$ se scriu sub forma $s_1+s_2=a-1$, $s_1s_2+p_1+p_2=-10$, $s_1p_2+s_2p_1=-a+1$, $p_1p_2=9$. Însă $s_1=s_2=2u$, prin urmare $u=\frac{a-1}{4}$. Înlocuind în a treia relație Viète, obținem că $\frac{a-1}{2}(p_1+p_2)=-a+1\Leftrightarrow(a-1)(p_1+p_2+2)=0\Leftrightarrow(a-1)(-10-s_1s_2+2)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(a-1)\left(-8-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2\right)=0$. Cum a doua paranteză este strict negativă, rezultă că $a=1$. Ecuația inițială devine $x^4-10x^2+9=0$, cu soluțiile $\{-3,-1,1,3\}$. **34.** Ecuația este reciprocă. Împărțind ecuația prin x^2, obținem $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$. Notăm $x+\frac{1}{x}=y$; rezultă că $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ și obținem ecuația $6y^2+35y+50=0$, cu soluțiile $y_1=-\frac{5}{2}$, $y_2=-\frac{10}{3}$. Din $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$, rezultă $x_1=-2$, $x_2=-\frac{1}{2}$, iar din $x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}$, rezultă $x_3=-3$, $x_4=-\frac{1}{3}$. **35.** a) z_0-i este soluție a ecuației (ii) dacă și numai dacă $(z_0-i)^3+8=0$, deci dacă și numai dacă $z_0^3-3z_0^2i+3z_0+8+i=0$, adică z_0 este soluție a ecuației (i). b) Ecuația $z^3+8=0$ are soluțiile -2, $-1+i\sqrt{3}$, $-1-i\sqrt{3}$ și, conform a), ecuația (i) are soluțiile $-2+i$, $-1+i(\sqrt{3}+1)$, $-1+i(1-\sqrt{3})$. **36.** bi este soluție dacă $-b^3i+b^2(2\sqrt{3}+3i)+(i-4\sqrt{3})b-3i-6\sqrt{3}=0$ și cum $b\in\mathbb{R}$, rezultă că $2\sqrt{3}b^2-4\sqrt{3}b-6\sqrt{3}=0$ și $-b^3+3b^2+b-3=0$. Deducem că $b=-1$ sau $b=3$. Obținem soluțiile $-i$, $3i$, $2\sqrt{3}+i$. **37.** a) $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_{3,4}=\frac{-2\pm4i}{5}$. **38.** a) $x_1=1$, $x_2=-1$. b) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$. **39.** a) Din $f(0)=f(1)$ obținem că $a+b=-1$. Apoi, $f\in\mathbb{R}[X]$ și $x_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ rădăcină implică faptul că $x_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ este rădăcină. Cum f se divide cu $(X-x_1)(X-x_2)=X^2-X+1$, deducem că $b-1=c-a=0$, de unde $a=c=-2$, $b=1$. Câtul împărțirii lui f prin X^2-X+1 este X^2-X-2; egalând câtul cu 0, găsim că $x_3=-1$, $x_4=2$. b) Restul împărțirii lui f prin g este $(t^2+at+1)X^2+(a+b)X+c-at-t^2$. Oricare ar fi $t\in\mathbb{R}^*$, acest rest este nul pentru $a=-\frac{t^2+1}{t}$, $b=\frac{t^2+1}{t}$, $c=-1$. **40.** Cum f are coeficienți raționali și admite rădăcina $x_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$, va admite și rădăcina $x_2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Atunci f se divide cu $(X-x_1)(X-x_2)=X^2-3X+1$. Împărțind f la X^2-3X+1, obținem câtul X^2+X+1 și restul $(a+$

Scanned with OKEN Scanner

$+1)X+(b+2)$. Egalăm restul cu 0 și găsim $a=-1$, $b=-2$, iar ecuația $x^2+x+1=0$ are soluțiile $x_{3,4}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

41. Deoarece $a, b\in\mathbb{R}$ și $x_1=1+2i$, rezultă că $x_2=1-2i$. Prin urmare, $f=X^4-7X^3+21X^2+aX+b$ se divide prin $(X-x_1)(X-x_2)=g$. Împărțind pe f la $g=X^2-2X+5$, obținem restul $r=(a+37)X+b-30$, care este egal cu polinomul 0 dacă $a=-37$ și $b=30$. Ecuația se scrie sub forma $(x^2-2x+5)(x^2-5x+6)=0$ și are rădăcinile $x_{1,2}=1\pm 2i$, $x_3=2$, $x_4=3$. **42.** a) Deoarece $f\in\mathbb{R}[X]$ și $x_1=i$, rezultă că $x_2=-i$. Prin urmare, f se divide prin $(X-i)(X+i)=X^2+1$. Efectuând împărțirea, găsim restul $X(a+4)+b-5$, care este nul pentru $a=-4$ și $b=5$. b) $\Sigma(x_1-1)^2=\Sigma x_1^2-2\Sigma x_1+4=(\Sigma x_1)^2-2\Sigma x_1x_2-2\Sigma x_1+4=4^2-2\cdot 6-2\cdot 4+4=0$. c) Dacă $x_1, x_2, x_3, x_4\in\mathbb{R}$, folosind b) rezultă că $x_1=x_2=x_3=x_4=1$. Atunci $f=(X-1)^4=X^4-4X^3+6X^2-4X+1$, deci $a=-4$ și $b=1$. **43.** a) $S=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(\Sigma x_i)^2-2\Sigma x_ix_j=4-2a$. b) Pentru $a=3$, obținem $S=-2$. Dacă f are toate rădăcinile reale, atunci $S\geq 0$, fals. c) Cum $f\in\mathbb{Q}[X]$ și $x_1=-1+\sqrt{2}$, rezultă că $x_2=-1-\sqrt{2}$. Deci, $f\vdots(X-x_1)(X-x_2)$. Prin împărțirea lui f la $g=(X-x_1)(X-x_2)=X^2+2X-1$, rezultă că $f=(X^2+a+1)g+(b-2a-2)X+a+c+1$, de unde $b-2a-2=0$, $a+c+1=0$. Dar $f(1)=3$, deci $a+b+c=0$. Rezultă $a=-\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=-\frac{1}{2}$ și $f=(X^2+2X-1)\left(X^2+\frac{1}{2}\right)$, cu rădăcinile $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$ și $x_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$. **44.** a) $a=0$, $b=-3$, $c=2$. b) Dacă $x_1=\sqrt{2}$, cum $f\in\mathbb{Q}[X]$, rezultă că $x_2=-\sqrt{2}$. Din $x_1+x_2+x_3=-a$, obținem că $x_3=-a\in\mathbb{Q}$. c) Dacă $f\in\mathbb{Z}[X]$ și $x, y\in\mathbb{Z}$, atunci $f(x)-f(y)\vdots x-y$. Fie x_0 o rădăcină întreagă a lui f, atunci $f(1)-f(x_0)=f(1)\vdots 1-x_0$. Dar $f(1)$ este impar, deci x_0 este par. De asemenea, $f(0)-f(x_0)=f(0)\vdots -x_0$ și, cum $f(0)$ este impar, rezultă că x_0 este impar. Contradicția obținută arată că f nu are rădăcini întregi. **45.** a) $\Sigma\frac{1}{x_1}=\frac{\Sigma x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4}=\frac{a}{1}=\Sigma x_1$. b) Presupunem că P se divide cu X^2-1, deci $P(1)=P(-1)=0$; obținem că $2-2a=2+2a=0$, fals. c) Ecuația $P(x)=0$ este reciprocă. Din $x^2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$, notând $x+\frac{1}{x}=y$, obținem $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ și $2y^2-y-4=0$ cu $y_1=\frac{1-\sqrt{33}}{4}$, $y_2=\frac{1+\sqrt{33}}{4}$. Ecuația $x^2-xy_1+1=0$ are $\Delta_1<0$, deci $x_1, x_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$; fie $x_1=\alpha+\beta i$, $x_2=\alpha-\beta i$, $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, $\beta\neq 0$. Din $x_1x_2=1$ rezultă $\alpha^2+\beta^2=1$, deci $|x_1|=|x_2|=1$. Similar, $|x_3|=|x_4|=1$. **46.** a) $a=1$. b) $x_1=1$, $x_2=-1$. c) Trebuie arătat că f, pentru orice $a\in\mathbb{Z}$, nu are rădăcini în $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, ceea ce este evident: termenul liber este egal cu -1, iar coeficientul termenului de grad maxim este 1, deci singurele rădăcini în $\mathbb{Q}$ ar putea fi 1 sau -1. **47.** a) $f=(X-1)\cdot(X^4+3X^2+2X+2)$, deci $x=1$ este rădăcină întreagă pentru f. b) $\Sigma x_1^2=(\Sigma x_1)^2-2\Sigma x_1x_2=1-2\cdot 3=-5$. c) Avem că $f(X)=(X-1)[(X^2+1)^2+(X+1)^2]$. Însă $(x^2+1)^2+(x+1)^2\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci f are o singură rădăcină reală, anume $x=1$. **48.** a) $x_1=-1$, $x_{2,3}=\pm i$. b) $x=1$ este rădăcină dublă dacă $p(1)=0$ și $p'(1)=0$. Rezultă $a=-2$ și $b=0$. c) Pentru $b=1$, singurele rădăcini raționale pot fi 1 sau -1. Dacă $x_1=1$, atunci $a=-3$, iar dacă $x_1=-1$, atunci $a=1$. **49.** a) $(X^2+X\sqrt{2}+1)(X^2-X\sqrt{2}+1)=(X^2+1)^2-(\sqrt{2}X)^2=X^4+1=f$. b) Polinomul f nu are rădăcini raționale și deci, dacă f este reductibil în $\mathbb{Q}[X]$, el este produsul a două polinoame de

Scanned with OKEN Scanner

gradul doi. Deoarece rădăcinile lui f sunt $x_{1,2}=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$ și $x_{3,4}=\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$, rezultă că niciunul dintre polinoamele $(X-x_1)(X-x_2)$; $(X-x_1)(X-x_3)$; $(X-x_1)(X-x_4)$ nu are coeficienți raționali. Rezultă că f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$. **50.** a) $x^4-1=0$ implică $x_1=1, x_2=-1, x_3=i, x_4=-i$. b) $P_3(X)=X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)=(X-1)(X-\varepsilon)(x-\bar{\varepsilon})$, unde $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. c) $P_6=X^6-1=(X^3-1)(X^3+1)=(X-1)(X^2+X+1)(X+1)(X^2-X+1)$. Polinoamele de gradul doi sunt ireductibile peste $\mathbb{R}[X]$, deoarece ambele au discriminantul negativ. **51.** a) Se verifică prin calcul. b) Pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq 1>0$, deci f nu are rădăcini reale. c) Presupunem că f este reductibil în $\mathbb{Z}[X]$, deci există g și $h\in\mathbb{Z}[X]$ de grad cel puțin 1 astfel încât $f=g\cdot h$. Dacă g sau h are gradul 1, atunci f ar avea o rădăcină rațională, fals. În concluzie, g și h au gradul doi. Cum f are coeficientul lui X^4 egal cu 1, putem considera $g=X^2+aX+b$, $h=X^2+cX+d$. Obținem că $f=g\cdot h=X^4+X^3(a+c)+X^2(d+ac+b)+X(ad+bc)+bd$. Prin identificare, obținem: $a+c=-6$, $d+ac+b=13$, $ad+bc=-12$, $bd=5$, $a, b, c, d\in\mathbb{Z}$. Din ultima ecuație, $b=1, d=5$ sau $b=5, d=1$ sau $b=-1, d=-5$ sau $b=-5, d=-1$. Analizăm cazul $b=1, d=5$. Din sistemul obținut găsim $a+c=-6$, $ac=7$, care nu are soluții întregi. La fel se procedează în celelalte cazuri. Rezultă că f este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$. **52.** a) Avem $f(0)=0$, apoi $f(1)=f^2(0)+1=1, f(2)=f^2(1)+1=2$ și $f(5)=f^2(2)+1=5$. b) Demonstrăm inductiv: pentru $n=0$, $f(a_0)=a_0$ este adevărată. Să presupunem că $f(a_k)=a_k$. Atunci $f(a_{k+1})=f(a_k^2+1)=(f(a_k))^2+1=a_k^2+1=a_{k+1}$, deci afirmația este adevărată și pentru $k+1$. Rezultă că $f(a_n)=a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. c) Considerăm polinomul $g=f-X$. Cum $g(a_k)=0$ și numerele a_k, $k\in\mathbb{N}$, sunt distincte (șirul (a_n) este strict crescător), rezultă că g are o infinitate de rădăcini, deci $g=0$ și apoi $f=X$. **53.** a) $f(a)=0$. b) Una dintre rădăcini este a; să zicem că $x_1=\sqrt{2}+\sqrt{5}$. Cum f are coeficienți raționali, celelalte rădăcini sunt conjugatele primeia, deci $x_2=\sqrt{2}-\sqrt{5}$, $x_3=-\sqrt{2}+\sqrt{5}$, iar $x_4=-\sqrt{2}-\sqrt{5}$. c) Din relațiile lui Viète, $S=0$, iar $P=9$. Bineînțeles, S și P pot fi calculate direct, cunoscând termenii/factorii. d) Evident că $B\subset A$. Vom arăta că $A\subset B$. Pentru aceasta, fie $x=g(a)\in A$, unde $g\in\mathbb{Z}[X]$. Din teorema împărțirii cu rest, există $q, r\in\mathbb{Z}[X]$, grad $r\leq 3$, astfel încât $g=f\cdot q+r$. Rezultă că $g(a)=f(a)\cdot q(a)+r(a)=r(a)$, cu grad $r\leq 3$, prin urmare $g(a)\in B$, adică $A\subset B$. Conchidem că $A=B$, deci $A\setminus B=\emptyset$. **54.** Singura rădăcină rațională a lui f este $x_1=1$, iar această rădăcină este simplă ($f'(1)=5\neq 0$). Înseamnă că g admite rădăcinile $x_1=1$ și $x_2=-p-1$ (pentru că $x_1+x_2=-p$). Evident, $x_2\in\mathbb{Q}$, deci $f(x_2)\neq 0$, întrucât f nu admite alte rădăcini raționale afară de $x_1=1$; chiar dacă $x_2=1$, f admite pe 1 ca rădăcină simplă. În concluzie, $(f, g)=X-1$. **55.** a) $f^2=\hat{1}$, deci grad $f^2=0$. b) Din a), f este inversabil și $f^{-1}=f$. c) $g_1=\hat{2}X+\hat{1}$ și $g_2=\hat{2}X+\hat{3}$. **56.** a) $a=\hat{1}$. c) $x_1=\hat{2}$, $x_2=\hat{3}$, $x_3=\hat{4}$ (se calculează $f(x)$ pentru fiecare $x\in\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$ și se urmărește când se obține rezultatul $\hat{0}$). **57.** a) Se verifică prin calcul. b) $a=\hat{2}$. c) $f=X^3+\hat{5}X=X^3-X$. Conform a), rădăcinile lui f sunt $\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}$. Acesta este un exemplu de polinom care are mai multe rădăcini decât gradul său. **58.** a) Se verifică prin calcul. b) $(X^3-\hat{4})(X^3+\hat{4})=X^6-16=X^6+\hat{5}$. c) Cercetăm dacă f are o rădăcină $b\in\mathbb{Z}_7$, $b\neq 0$; $f(b)=0$ implică $b^6+ab+5=0$ și, cum $b^6=\hat{1}$, rezultă că $ab=\hat{1}$, deci $b=a^{-1}$. Prin urmare, dacă $b\neq 0$, polinomul se divide la $X-a^{-1}$, deci este reductibil. Pentru $a=\hat{0}$, $f=X^6+\hat{5}=(X^3-\hat{4})(X^3+\hat{4})$, deci polinomul f este reductibil și în acest caz. **59.** a) Fie $f(\hat{0})=f(\hat{1})=f(\hat{2})=b$, $b\in\mathbb{Z}_7$.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci $f = aX(X-\hat{1})(X-\hat{2})+b$, $a \in \mathbb{Z}_3$, $a \neq \hat{0}$. Sunt 6 astfel de polinoame. **60.** a) $\hat{0}$, $\hat{1}$, $\hat{2}$. b) g nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$ și are gradul 3, deci este ireductibil. c) Fie $h(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3$, $a \neq \hat{0}$. Din $h(\hat{0}) = g(\hat{0})$, $h(\hat{1}) = g(\hat{1})$, $h(\hat{2}) = g(\hat{2})$, rezultă că $d = \hat{2}$; $a + b + c + d = \hat{2}$ și $\hat{2}a + b + \hat{2}c + d = \hat{2}$. Găsim soluțiile $a = \hat{1}$, $b = \hat{0}$, $c = \hat{2}$, $d = \hat{2}$ sau $a = \hat{2}$, $b = \hat{0}$, $c = \hat{1}$, $d = \hat{2}$. Sunt două soluții: $h_1 = X^3 + \hat{2}X + \hat{2}$ și $h_2 = \hat{2}X^3 + X + \hat{2}$. **61.** a) Ecuația $a^2 + a + \hat{1} = 0$ are soluția $a = \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_3$. Deci, dacă $a \neq \hat{1}$, atunci grad $f = 3$, iar dacă $a = \hat{1}$, $f = \hat{1}$ și are gradul zero. b) Cum $f = X^3 + X + \hat{2}$, $x_1 = \hat{2}$ este rădăcină. Obținem că $f = (X - \hat{2})(X^2 + \hat{2}X + \hat{2}) = (X + \hat{1})(X^2 + \hat{2}X + 2)$. Polinomul $g = X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$ este ireductibil, deoarece nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$ și este de grad 2. **62.** a) $f(\hat{0}) = a$; $f(\hat{1}) = \hat{a}$, $f(\hat{2}) = a + \hat{1}$ și suma cerută este egală cu $\hat{1}$. b) Pentru $a = \hat{2}$, din a), $f(\hat{0}) = \hat{2}$, $f(\hat{1}) = 2$, $f(\hat{2}) = \hat{0}$, deci f are o singură rădăcină, $x = \hat{2}$. c) Deoarece grad $f = 3$, f este ireductibil dacă și numai dacă nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$. Atunci $a \neq \hat{0}$ și $a + \hat{1} \neq \hat{0}$ și rezultă $a = \hat{1}$. **63.** a) $f(\hat{0}) = 0$; $f(\hat{1}) = \hat{0}$. b) Im $f \neq \mathbb{Z}_5$, deci f nu este surjectivă. *Observație.* Dacă A este mulțime finită și f este o funcție $f: A \to A$, atunci propozițiile 1. f este injectivă. 2. f este surjectivă. 3. f este bijectivă. sunt echivalente. c) $f = X(X + \hat{4})(X^2 + X + \hat{1})$. Polinomul $g = X^2 + X + \hat{1}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_5$, deoarece nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_5$ și este de grad 2.

4.5. Probleme de sinteză – algebră

1. a) Pentru $a, b \in (0, 1)$ se arată imediat că $a \circ b \in (0, 1)$, deci $\circ$ este lege de compoziție internă pe H. b) $f(x) \circ f(y) = \dfrac{f(x)\cdot f(y)}{f(x)f(y)+(1-f(x))(1-f(y))} = \dfrac{xy}{1+xy} = f(xy)$, $\forall x, y \in H$. c) Din $\dfrac{x^3}{x^3+(1-x)^3} = \dfrac{1}{2}$, obținem $x^3 = (1-x)^3$ și cum $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $x = \dfrac{1}{2}$. **2.** a) Se verifică faptul că $\mathbb{R}$ este stabilă față de $*$, iar $*$ este asociativă, comutativă, cu elementul neutru 0. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$ realizează un izomorfism între $(\mathbb{R}, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, *)$. b) Efectuăm un transport de structură de la $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ la $(\mathbb{R}, \circ, *)$ prin intermediul funcției f de la a). Pentru aceasta, definim $x \circ y = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) = f(1 - x + 1 - y) = 1 - (2 - x - y) = x + y - 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Se verifică faptul că $(\mathbb{R}, \circ, *)$, cu „$\circ$" astfel definită este corp. **3.** a) Pentru $a = \hat{1}$, $b = \hat{0}$, rezultă că $I_2 \in G$, iar pentru $a = \hat{0}$, $b = \hat{0}$, rezultă că $O_2 \in G$. b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \hat{2}b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ \hat{2}d & c \end{pmatrix}$ din G, atunci $A + B = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ \hat{2}(b+d) & a+c \end{pmatrix} \in G$. c) $(G, +)$ este subgrup al grupului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5), +)$. **4.** a) Funcția f este injectivă, deoarece dacă $x_1, x_2 \in G$ și $f_a(x_1) = f_a(x_2)$, atunci $ax_1 = ax_2$, de unde $x_1 = x_2$. Apoi f este surjectivă, deoarece pentru orice $y \in G$, există $x = a^{-1}y \in G$ astfel încât $f_a(x) = y$. b) $(f_a \cdot f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = f_a(bx) = a(bx) = (ab)x = f_{ab}(x)$, deci $f_a \cdot f_b = f_{ab}$. c) Din b) se deduce că operația de compunere a funcțiilor este lege de compoziție pe $F(G)$. Asociativitatea este o proprietate generală a

Scanned with OKEN Scanner

compunerii funcțiilor. Elementul neutru este f_e și orice $f_a \in G$ are simetricul $f(a)^{-1} = f_{a^{-1}}$. Rezultă că $(F(G), \circ)$ este grup. **5.** a) Înlocuind pe x cu $x - T$ în relația $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$; găsim că $f(x) = f(x + (-T))$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $-T \in H$. b) Fie $T_1, T_2 \in H$, deci $f(x + T_1) = f(x)$ și $f(x + T_2) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$; înlocuind pe x cu $x + T_2$ în prima relație, găsim că $f(x + T_1 + T_2) = f(x + T_2)$, deci $f(x + T_1 + T_2) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Astfel $T_1 + T_2 \in H$, deci adunarea este lege de compoziție pe H. Cum pentru orice $T \in H$ rezultă că $-T \in H$, deducem că H este subgrup al grupului $(\mathbb{R}, +)$. c) Fie $T \in H$, atunci $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = 0$, $f(T) = f(0)$, de unde $\{T\} = 0$, deci $T \in \mathbb{Z}$. Rezultă că $H \subset \mathbb{Z}$. Reciproc, pentru orice $T \in \mathbb{Z}$, avem că $\{x + T\} = \{x\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, adică $T \in H$, rezultă că $\mathbb{R} \subset H$. Astfel, $H = \mathbb{Z}$. **6.** a). **9.** b) f este bijectivă și $f(x, y) = xy + 3 = (x + 3) \circ$ $\circ (x + 3) = f(x) \circ f(y)$. c) Funcția $f^{-1} : G \to (0, \infty)$, $f^{-1}(x) = x - 3$ este, de asemenea, izomorfism de grupuri; atunci $f^{-1}(H)$ este subgrup în $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ care conține toate numerele naturale nenule. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $n \in f^{-1}(H)$, deci simetricul său $\frac{1}{n}$ în $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ se află în $f^{-1}(H)$. Apoi, dacă $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+^*$, cu $m, n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\frac{m}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{m \text{ fracții}} \in$ $\in f^{-1}(H)$. În concluzie, $f^{-1}(H)$ conține toate numerele raționale strict pozitive și, de aici, cerința problemei. **7.** a) Calcul direct. b) Avem că $A(k, t - 1) \cdot A(k_2, t - 1) = A((k_1 + k_2)t - 1)$, deci H_t este parte stabilă a lui G în raport cu înmulțirea. Elementul neutru al lui G este $A(-1)$ și $A(-1) \in H_t$, $\forall t \in \mathbb{Z}$. În sfârșit, simetricul elementului $A(kt - 1) \in H_t$ este $A((-k) \cdot t - 1) \in H_t$. c) Se verifică faptul că $f : G \to \mathbb{Z}$, $f(A(k)) = k + 1$ este izomorfism între grupurile $(G, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}, +)$. **8.** b) Conform a), $(\hat{x} + \hat{y})^3 = \hat{x} + \hat{y} = \hat{x}^3 + \hat{y}^3$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}_6$. c) $n = 2$ nu convine, deoarece $f(\hat{1} + \hat{1}) = \hat{2}^2 = \hat{4}$, iar $f(\hat{1}) + f(\hat{1}) = \hat{2}$. Pentru $n = 3$, $f(\hat{x}) = \hat{x}^3 = \hat{x}$ și f este izomorfism. **9.** a) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \in G$. b) Fie $z_1, z_2 \in G$, $z_1 = \cos q_1 x + i \sin q_1 x$ și $z_2 = \cos q_2 x + i \sin q_2 x$, $q_1, q_2 \in$ $\in \mathbb{Q}$; atunci $z_1 z_2 = \cos(q_1 + q_2)x + i \sin(q_1 + q_2)x \in G$. c) Rădăcinile lui f sunt $x_k = \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}$, $k = \overline{0,5}$, deci $x_k \in G$, $\forall k = \overline{0,5}$. **10.** a) $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = (x - 1)(x^2 - x + 1)$, de unde $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 =$ $= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 0$ și, cum x_1, x_2, x_3 nu pot fi toate nule, rezultă că ecuația are măcar o soluție complexă nereală $x_1 = a + bi$. Atunci $x_2 = a - bi$ este, de asemenea, soluție, iar a treia soluție va fi reală. c) $\Delta = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3) = -4$, $\forall a \in \mathbb{C}$. **11.** $|a| = |x_1 + x_2 + x_3| \le |x_1| + |x_2| + |x_3| \le 3$. b) Funcția polinomială atașată $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ este continuă, $f(0) = c < 0$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, deci f se anulează măcar o dată pe $(0, \infty)$. c) $x_1x_2x_3 = 1 \Rightarrow |x_1| \cdot |x_2| \cdot |x_3| = 1$ și cum $|x_1| \le 1$, $|x_2| \le 1$, $|x_3| \le 1$, rezultă că toate cele trei rădăcini au modulul egal cu 1. Conform b), f are rădăcina $x_1 \in (0, \infty)$, deci $x_1 = 1$. Din relațiile lui Viète, $x_2 + x_3 = -2$ și $x_2x_3 = 1$ și obținem că $x_2 = x_3 = -1$. Folosind a doua relație Viète, urmează că $b = -1$.

Scanned with OKEN Scanner

12. a) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_1x_2x_3+\ldots+x_2x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4}=0$. b) Notăm $x^2=t$, ecuația $t^2-5t+5=0$ are soluțiile $t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$, reale și pozitive. Atunci $x_{1,2}=\pm\sqrt{t_1}$ și $x_{3,4}=\pm\sqrt{t_2}$ sunt numere reale. c) Dacă gr $g\geq 5$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\pm\infty$, deci $(g(x))$ este, de la un loc încolo, mai mare decât $(f(x))$. Rezultă că $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}$ și $|g(x_i)|\leq|f(x_i)|=0$, înseamnă că x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcini ale lui g, și, de aici, concluzia problemei. 13. a) $\varepsilon^2-1=0\Rightarrow(\varepsilon-1)(\varepsilon^2+\varepsilon+1)=0$. Cum $\varepsilon\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, rezultă că $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$. b) Determinantul sistemului este nenul, deci sistemul admite doar soluția banală. c) Notăm $x=f_1(1), y=f_2(1), z=f_3(1)$. În relația $f_1(X^3)+Xf_2(X^3)+X^2f_3(X^3)=(X^3-1)\cdot g(x)$ dăm lui X valorile $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ și obținem un sistem ca la punctul b). Rezultă că $x=y=z=0$, deci 1 este rădăcină pentru fiecare polinom f_i. 14. a) $X^3-2X-1=(X^2-X-1)(X+1)$. b) $Q_3=X^3-2X-1$ are rădăcinile $x_1=-1$, $x_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. c) Procedăm prin inducție după n. Afirmația este adevărată pentru $n=2$. Presupunem că Q_n se divide cu P și să arătăm că Q_{n+1} se divide cu P. Avem: $Q_{n+1}=X^{n+1}-F_{n+1}X-F_n=X(X^n-F_nX-F_{n-1})+F_nX^2+F_{n-1}X-(F_n+F_{n-1})X-F_n=X\cdot Q_n+F_n(X^2-X-1)=X\cdot Q_n+F_n\cdot P$, de unde concluzia problemei. 15. a) Avem că $x_1^3+ax_1+b=0$, de unde $x_1^{n+3}+ax_1^{n+1}+bx_1^n=0$, $\forall\, x\in\mathbb{N}$. Scriind încă două relații analoage și adunându-le, obținem cerința. b) Egalitatea matriceală se justifică prin calcul. Cum $S_0=3$, $S_1=0$, $S_2=-2a$, $S_3=-3b$ și $S_4=2a^2$, obținem relația cerută pentru Δ. c) Observăm că $\Delta=\det A\cdot\det A^t=(\det A)^2=(x_2-x_1)^2(x_3-x_1)^2(x_3-x_2)^2$ și, dacă $x_1, x_2, x_3\in\mathbb{R}$, rezultă că $\Delta\geq 0$. Reciproc, fie $\Delta\geq 0$ și $x_1=c+di$, cu $c, d\in\mathbb{R}$. Dacă, prin absurd, $d\neq 0$, atunci $x_2=c-di$ și $x_3=-x_1-x_2=-2c$. Obținem că $\Delta=(-2di)^2(-3c-di)^2(-3c+di)^2=-4d^2(9c^2+d^2)^2<0$, contradicție.

4.6. Primitive

1. $f(x)=F'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+2)^2}$. 2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=F'(x)=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$. 3. Din condiția $F'(x)=f(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, rezultă că $-ax^2-2bx+a-b=x^2+2x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Obținem $a=-1$, $b=-1$. 4. a) $F'(x)=f(x)$, $\forall\, x>0$. b) Cum $G'(x)=f(x)\geq 0$ pe $[1,\infty)$, G este crescătoare. 5. $a=\frac{2}{5}$, $b=-\frac{1}{5}$ și $c=-\frac{3}{5}$. 6. $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$. 7. a) $F(x)=-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$. b) $F(x)=-\frac{1}{13}e^{-3x}(3\sin 2x+2\cos 2x)+C$. c) $F(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+4}+2\ln(x+\sqrt{x^2+4})+C$. d) $F(x)=-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C$. 8. F trebuie să fie derivabilă și $f=F'$. Rezultă că $a=0$, $b=1$, iar $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{2\ln x}{x}, & x\geq 1\end{cases}$. 9. a) $F'(x)=f(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^2}\overset{0/0}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{F'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)^2\ln(x+1)}{2x}=\frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

10. b) $\frac{e}{2}$. c) 1. **11.** a) $a=2, b=-8, c=8$. b) $\int f(x)\,dx = x^2 - 8\ln(x+1) - \frac{8}{x+1} + C$. c) $F(0)=0$, de unde $C=8$.

12. a) $\int f(x)\,dx = \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{(x-3)^2} + C$. b) $F(-1)=0$ și rezultă că $C=\frac{83}{48}$. **13.** a) $\frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$.

b) $\frac{1}{10}x^2\sqrt{x} - \frac{1}{6}x\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} - \ln(x+1) + 2\operatorname{arctg} x + C$. c) $\frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + \ln x - \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \arcsin x + C$. d) $\frac{x^4}{4} -$

$- 2x^2 + \ln x - \frac{2^x}{\ln 2} + C$. e) $-\frac{3x^5}{5} + 2\ln x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 3\cos x + \operatorname{arctg} x + C$. **14.** a) $\frac{1}{5}(x+1)^5 - \frac{1}{5}(x-1)^5 + C$.

b) $\frac{1}{12}(2x-3)^6 + C$. c) $\frac{1}{6}(x-1)^6 + \frac{1}{5}(x-1)^5 + C$. **15.** a) $-x + 3\ln x + \frac{2}{x} + C$. b) $x^2 - 3x - 2\ln x + C$. c) $3x -$

$- \frac{2}{x-1} + C$. **16.** a) $\frac{x^2}{2} - 3\ln x - \frac{4}{x} + C$. b) $\frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x-1) + C$. c) $\frac{x^2}{2} + \operatorname{arctg} x + C$. d) $\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

17. a) $\int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C$. b) $\int \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \int \frac{(x+1)^2 - x^2}{x^2(x+1)^2}\,dx =$

$= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + C$. **18.** a) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(1+x) + C$. b) $\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$. c) $x -$

$- 9\ln(x+3) - \frac{18}{x+3} + C$. **19.** a) $\ln(x+1) - \ln(x+2) + C$. b) $\operatorname{arctg}(x+2) + C$. c) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \operatorname{arctg}(x+1) + C$.

d) $x - \ln(x^2+x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$. e) $\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\ln(x^2 - x + 1) + C$. **20.** a) $\frac{x^3}{3} - x + x\ln x + C$.

b) $-(x+2)e^{-x} + C$. c) $e^x(3x^2 - 8x + 3) + C$. d) $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$. e) $\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + C$. f) $(x^2-2)\sin x +$

$+ 2x\cos x + C$. **21.** a) $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C$. b) $-(x^2+2x+2)e^{-x} + C$. c) $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + C$. **22.** a) $\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x -$

$- \cos x) + C$. b) $\frac{1}{13}e^{3x}(2\sin 2x + 3\cos 2x) + C$. c) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$. d) $\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2} +$

$+ C$. **23.** a) $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$. b) $\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$. c) $-\frac{1}{3}(9-x^2)\sqrt{9-x^2} + C$. d) $\frac{1}{4}\sin^4 x + C$. e) $\frac{(x^2+1)^{2002}}{4004} + C$.

24. a) $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln(x^2+1) + C$. b) $2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C$. c) $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\ln\left(x + \frac{1}{2} +\right.$

$\left. + \sqrt{x^2+x+1}\right) + C$. d) $-\frac{1}{x}\arcsin x + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + C$. e) $2\ln(e^x+1) - x + C$. **25.** a) $2\ln(x^2 - 5x + 4) + C$.

b) $2\ln(\ln^2 x - 5\ln x + 4) + C$. **26.** Notăm $\ln x = t$; integrala asociată este $\int \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t) + C$, prin urmare $F(x) =$

$= \ln(1 + \ln x) + C$. Cum $F(e^{e-1}) = \ln(1 + e - 1) + C = 1 + C = 2$, rezultă că $C = 1$, deci $F(x) = \ln(1 + \ln x) + 1$ este

primitiva pentru care $F(e^{e-1}) = 2$. **27.** a) $F(x) = \frac{(x+1)^3}{3}\ln(x+1) - \frac{(x+1)^3}{9} - \frac{8}{3}\ln 2 + \frac{8}{9}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)=f(1)=4$ ln 2. **28.** a) $f(x)=F'(x)=x-\ln x$. b) $\int g(x)\,dx=$ $=\int F'(x)F(x)\,dx=\dfrac{1}{2}F^2(x)+C$. **29.** Funcția f este evident continuă pe $(-\infty, 1)\cup(1, \infty)$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=$ $=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=f(1)=e$, rezultă că f este continuă și în 1, deci este continuă pe $\mathbb{R}$. Orice funcție continuă admite primitive; în cazul nostru, $F(x)=\begin{cases}(x-1)e^x+C_1, x\le 1\\ ex^2-ex+C_2, x>1\end{cases}$. Impunem condiția ca F să fie continuă în 1 și obținem că $C_1=C_2=C$, deci o primitivă a lui f este $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}(x-1)e^x+C, x\le 1\\ ex^2-ex+C, x>1\end{cases}$. **30.** Funcția f este continuă, deci admite primitive. Fie F o primitivă. Pentru $x\le 0$, $F(x)=\int xe^x\,dx=(x-1)e^x+C_1$, iar pentru $x>0$, $F(x)=$ $=\int\dfrac{x^2}{x+1}\,dx=\int\left(x-1+\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\dfrac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)+C_2$. Din continuitatea lui F în 0, obținem că $C_1=C_2+1$. Astfel, F este de forma $F(x)=\begin{cases}(x-1)e^x+1+C, x\le 0\\ \dfrac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)+C, x>0\end{cases}$.

4.7. Formula lui Leibniz–Newton

1. Avem $\int_1^a(a-4x)\,dx=-a^2-a+2$. Se obține ecuația $a^2-4a+4=0$, deci $a=2$. **2.** Avem că $\int_0^a(2-4x+3x^2)\,dx=$ $=\left(2x-2x^2+x^3\right)\Big|_0^a=a^3-2a^2+2a$. Obținem ecuația $a^3-2a^2+a=0$ și, cum $a>0$, rezultă că $a=1$. **3.** a) $I=m^2-$ $-6m+21$. b) $m=3$. **4.** Avem că $\int_0^x e^t(2e^t-3)\,dt=\int_0^x(2e^{2t}-3e^t)\,dt=(e^{2t}-3e^t)\Big|_0^x=e^{2x}-3e^x+2$. Atunci $e^{2x}-$ $-3e^x+2=0$ implică $e^x=1$ sau $e^x=2$, de unde $x=0$ sau $x=\ln 2$. **5.** Cum $\int f(x)\,dx=3a\sin\dfrac{x}{3}-3b\cos\dfrac{x}{3}+C$, se obțin condițiile $\dfrac{3a}{2}-\dfrac{3b\sqrt{3}}{2}+3b=0$ și $\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3b}{2}=3$. Rezultă că $a=-1$ și $b=2+\sqrt{3}$. **6.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\int_0^n f(x)\,dx=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+n}{n^3}=\dfrac{1}{3}$. **7.** $\int_x^{x+1} f(t)\,dt=\left(-\dfrac{t^3}{3}+2t^2-3t\right)\Big|_x^{x+1}=\dfrac{-3x^2+9x-4}{3}$ și limita cerută este egală cu 1. **8.** a) $I(t)=\sin t-2\cos t+2$. b) 1. **9.** a) $F'(x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$. b) $\int_{-1}^1 f(x)\,dx=F(x)\Big|_{-1}^1=0$. **10.** a) $F'(x)=e^x\sin x+$ $+e^x\cos x=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$. b) 0. **11.** a) $F'(x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$. b) $\int_{-n}^n f(x)\,dx=F(n)-F(-n)=$

Scanned with OKEN Scanner

$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{2n+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2n-1}{\sqrt{3}}\right)$. Limita cerută este egală cu $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$. **12.** a) $\int_{-1}^{1}(x+1)^{2002}\,dx=\frac{(x+1)^{2003}}{2003}\Big|_{-1}^{1}=$

$=\frac{2^{2003}}{2003}$. b) $\int_0^1((x+1)^5-(x-1)^5\,dx=\frac{(x+1)^6-(x-1)^6}{6}\Big|_0^1=\frac{2^6}{6}=\frac{32}{3}$. **13.** Deoarece $\frac{4x+4}{x^2(x+2)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+2)^2}$,

rezultă că $\int_1^2\frac{4x+4}{x^2(x+2)^2}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+2)^2}\right)dx=\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\frac{5}{12}$. **14.** a) $\frac{1}{2003}+\frac{1}{2}+1$. b) $\frac{1}{2003}$.

15. $\frac{2002-2002^{-1}}{\ln 2002}$. **16.** Avem că $f(t)=2+\left(\frac{2}{3}\right)^t+\left(\frac{3}{2}\right)^t$, de unde $\int_0^x f(t)\,dt=2x+\frac{1}{\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^x$ și limi-

ta cerută este egală cu $\frac{1}{\ln 3-\ln 2}$. **17.** Cum $f(x)=1-\frac{1}{x+1}-1+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}$, rezultă că $\int_0^x f(t)\,dt=$

$=\ln\frac{t+2}{t+1}\Big|_0^x=\ln\frac{x+2}{x+1}-\ln 2$ și atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x f(t)\,dt=-\ln 2$. **18.** a) $\int_0^1\frac{x+1}{x^2+1}dx=\int_0^1\left(\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$

$=\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$. b) $\int_0^1\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+3}dx=\int_0^1\left(x+3+\frac{2x}{x^2+3}-\frac{2}{x^2+3}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+3x+\right.$

$\left.+\ln(x^2+3)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^1=\frac{7}{2}+\ln\frac{4}{3}-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **19.** a) $I_1=\int_0^1\frac{dx}{(x+1)^2+1}dx=\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_0^1=\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{2}$. b) $I_2=$

$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\int_0^1\frac{1}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)\Big|_0^1-\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}-\operatorname{arctg}2+\frac{\pi}{4}$. **20.** Descompu-

nând în fracții simple, $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$, obținem că $A=-1, B=1, C=1$. Atunci $\int_0^1\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}dx=$

$=\int_0^1\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\left(-\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$. **21.** a) $I_0=\int_2^3\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_2^3=$

$=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. $I_1=\int_2^3\frac{x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|\Big|_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$. b) $I_{n+2}-I_n=\int_2^3\frac{x^n(x^2-1)}{x^2-1}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_2^3=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$.

22. a) $I_1(x)=\int_0^x I_0(t)\,dt=\int_0^x dt=x$. b) $I_n(x)=\frac{x^n}{n!}$, $n\in\mathbb{N}^*$. c) 0. **23.** Observăm că $f(x)=(x-1)^2(x+2)$ și atunci:

a) $\int_2^3\frac{f(x)}{x-1}dx=\int_2^3(x^2+x-2)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_2^3=\frac{41}{6}$. b) $\frac{x^2+4}{f(x)}=\frac{x^2+4}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+$

$+\frac{C}{x+2}$, de unde $A=\frac{5}{3}$, $B=\frac{1}{9}$, $C=\frac{8}{9}$, prin urmare $\int_{-1}^0\frac{x^2+4}{f(x)}dx=\left(-\frac{5}{3(x-1)}+\frac{1}{9}\ln|x-\right.$

$\left.-1|+\frac{8}{9}\ln|x+2|\right)\Big|_{-1}^0=\frac{5}{6}+\frac{7}{9}\ln 2$. **24.** a) $a=2, b=1$. b) $F(x)=2\ln(x-1)+\ln(x-2)+C$. c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_3^n f(x)\,dx=$

Scanned with OKEN Scanner

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\ln(n-1)+\ln(n-2)-2\ln 2}{n} = 0$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n-1)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n-2)}{n} = 0$. **25.** b) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{F(x)}{xf(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{F(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{F'(x)}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{2x} = \dfrac{1}{2}$. **26.** $I(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{x}{(x+1)(x^2+4)}\,dx = \left(-\frac{1}{5}\ln(x+1) + \right.$

$\left. + \dfrac{1}{10}\ln(x^2+4) + \dfrac{2}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\right)\Big|_0^a = -\dfrac{1}{5}\ln(a+1) + \dfrac{1}{10}\ln(a^2+4) + \dfrac{2}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{a}{2} - \dfrac{1}{10}\ln 4$, iar $\lim\limits_{a\to\infty} I(a) = \lim\limits_{a\to\infty}\left(\dfrac{1}{10}\ln\dfrac{a^2+4}{(a+1)^2} + \right.$

$\left. + \dfrac{2}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{a}{2} - \dfrac{1}{5}\ln 2\right) = \dfrac{\pi - \ln 2}{5}$. **27.** a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left|\frac{\ln x}{x}\right|dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(-\frac{\ln x}{x}\right)dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = 1$. b) $\displaystyle\int_{-1}^{2}|e^x - e^{-x}|\,dx =$

$= \displaystyle\int_{-1}^{0}(e^{-x} - e^x)\,dx + \int_0^2 (e^x - e^{-x})\,dx = e^2 + \frac{1}{e^2} + e + \frac{1}{e} - 4$. c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin x|\,dx = \int_0^{\pi}\sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)\,dx =$

$= -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4$. **28.** a) $\dfrac{e^2-1}{2}$. b) $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2}$. c) $I_n = \dfrac{1}{2}\ln^2 x\Big|_{e^n}^{e^{n+1}} = \dfrac{2n+1}{2}$. $I_{n+1} -$

$- I_n = 1$, deci şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică de raţie 1. **29.** $I_n = \left(\dfrac{1}{2}\ln^2 x + \ln x\right)\Big|_{e^{\frac{n}{2}}}^{e^{\frac{n+1}{2}}} =$

$= \dfrac{(n+1)^2}{8} - \dfrac{n^2}{8} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2n+5}{8}$, $n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul (I_n) este o progresie aritmetică de raţie $\dfrac{1}{4}$. **30.** a) Notăm $e^x = t$ şi

atunci $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + a} = \int \frac{dt}{t(t+a)} = \frac{1}{a}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+a}\right)dt = \frac{1}{a}(\ln t - \ln(t+a)) + C = \frac{1}{a}(x - \ln(e^x + a)) + C$. b) Cum $g(x) =$

$= \dfrac{1}{e^x+1} - \dfrac{1}{e^x+2}$, rezultă că $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = (x - \ln(e^x+1))\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\left(x - \ln(e^x+2)\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \ln\frac{2}{e+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{e+2}{3}$.

31. a) f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive. Pentru $x \leq 0$, $\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C_1$, iar pentru $x > 0$,

$\displaystyle\int (x + \sqrt{x})\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C_1$. Primitiva are forma $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{4} + C_1, & x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + C_2, & x > 0 \end{cases}$. Cum G este

derivabilă, $C_1 = C_2 = C$ şi astfel $G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{4} + C, & x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + C, & x > 0 \end{cases}$. Din $G(0) = 0$, obţinem $C = 0$. b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx =$

$= G(x)\Big|_{-1}^{1} = \dfrac{11}{12}$. c) Avem că $F(x)\Big|_a^b = F(x)\Big|_b^c$, deci $F(b) - F(a) = F(c) - F(b)$, prin urmare $F(b) = \dfrac{F(a) + F(c)}{2}$

şi concluzia se impune. **32.** a) f este continuă pe $[-2\pi, 2\pi] \setminus \{0\}$, iar în $x = 0$, f are o discontinuitate de prima speţă.

Rezultă că f este integrabilă pe $[-2\pi, 2\pi]$. b) $\displaystyle\int_{-1}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^3\,dx + \int_0^{\pi}(1 + \sin x)\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + (x - \cos x)\Big|_0^{\pi} =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \frac{7}{4} + \pi$. **33.** a) $\int_0^1 f'(x)\,dx = f(x)\Big|_0^1 = \ln 2$. b) $\int g(x)\,dx = \int f'(x)\,dx = f(x) + C$. c) $\int_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)}\,dx = \int_1^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,dx =$

$= -\frac{1}{f(x)}\Big|_1^2 = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 5}$. **34.** a) $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in (0, \infty)$. b) $\int_1^e f(x)F(x)\,dx = \int_1^e F'(x)F(x)\,dx = \frac{1}{2}F^2(x)\Big|_1^e =$

$= \frac{1}{2}F^2(e) - \frac{1}{2}F^2(1)$. **35.** a) $g'(x) = (e^x - e^{-x})' = e^x + e^{-x} = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. b) $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 g(x)g'(x)\,dx =$

$= \frac{1}{2}g^2(x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)^2$. **36.** a) $F(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. b) $I = \int_1^x \left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)'\,dt = \frac{f'(t)}{f(t)}\Big|_1^x = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{x+1}{x} -$

$- 2$. **37.** a) $f_1(x) = \int_2^x f_0(t)\,dt = \int_2^x dt = x - 2$; $f_2(x) = \int_2^x f_1(t)\,dt = \int_2^x (t-2)\,dt = \frac{(t-2)^2}{2!}\Big|_2^x = \frac{(x-2)^2}{2!}$.

b) Demonstrăm inductiv propoziția $P(n)$: $f_n(x) = \frac{(x-2)^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}^*$. La a) am verificat $P(1)$. Presupunem $P(k)$ adevărată, deci $f_k(x) = \frac{(x-2)^k}{k!}$ și arătăm că $P(k+1)$ este adevărată. Într-adevăr, $f_{k+1}(x) = \int_2^x f_k(t)\,dt =$

$= \int_2^x \frac{(t-2)^k}{k!}\,dt = \frac{1}{k!}\cdot\frac{(t-2)^{k+1}}{k+1}\Big|_2^x = \frac{(x-2)^{x+1}}{(k+1)!}$, deci $P(k+1)$ este adevărată. **38.** a) Folosim binomul lui Newton: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n$. b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$. c) Cum $\int_0^1 f(x)\,dx =$

$= \left(xC_n^0 + \frac{x^2}{2}C_n^1 + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1}C_n^n\right)\Big|_0^1 = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n$, rezultă identitatea cerută. **39.** a) $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Cum $\sin k\pi = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, concluzia se impune. c) Cum $F'(x) = f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rezultă că F este monoton crescătoare. Astfel, F este monotonă și periodică, deci este constantă. Cum $F(k\pi) = 0$, rezultă că $F(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

d) Evident, $f(x) = F'(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. e) Dacă $p \neq q$, $J(p, q) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos(p+q)x + \cos(p-q)x)dx =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(p+q)x}{p+q} + \frac{\sin(p-q)x}{p-q}\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$ și $J(p,p) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2px)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2px}{2p}\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi$. f) Dacă $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, atunci $F(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ (conform c)), deci $f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ (conform d)). Deoarece $f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rezultă că $\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx = 0$, , $\forall\, k = \overline{1,n}$. Conform e), rezultă că $\pi \cdot a_k = 0$, deci $a_k = 0$, $k = \overline{1,n}$.

Scanned with OKEN Scanner

4.8. Formula de integrare prin părți

1. a) $\int_0^1 f(e^x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$. b) $\int_1^e f^2(x)dx = \int_1^e \ln x dx = x(\ln x - 1)\Big|_1^e = 1$. **2.** a) $\frac{5}{2}$. b) $2e - 1$.

3. a) $\int_1^e (3-x)f(x)dx = \int_1^e \ln x dx = x(\ln x - 1)\Big|_1^e = 1$. b) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{3-x}\ln x = \int_1^2 (-\ln(3-x))'\ln x dx =$

$= -\ln(3-x)\cdot \ln x\Big|_1^2 + \int_1^2 \ln(3-x)\cdot\frac{1}{x}dx = \int_1^2 g(x)dx$. **4.** $a = 2$; $b = \frac{5}{e-1}$. **5.** a) $2 - 3e^{-1}$; b) $3 - 2\log_3 e$.

6. Folosind formula de integrare prin părți, avem: $\int_0^1 \ln(1+x)dx = \int_0^1 (x+1)'\ln(1+x)dx = (x+1)\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 dx =$

$= 2\ln 2 - 1$ și atunci $\int_0^1 (x - \ln(1+x))dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2$. **7.** a) Pentru $a \geq 0$ și $x > 0$, avem $\int \ln(x+a)dx =$

$= \int (x+a)'\ln(x+a)dx = (x+a)\ln(x+a) - \int dx = (x+a)\ln(x+a) - x$. Astfel $\int_1^e (\ln(x+2) - \ln x)dx =$

$= ((x+2)\ln(x+2) - x\ln x)\Big|_1^e = (e+2)\cdot\ln(e+2) - e - 3\ln 3$. b) Pentru $a \geq 0$ și $x \in \mathbb{R}$, $\int \operatorname{arctg}(x+a)dx =$

$= \int (x+a)'\operatorname{arctg}(x+a)dx = (x+a)\operatorname{arctg}(x+a) - \int \frac{x+a}{1+(x+a)^2}dx = (x+a)\operatorname{arctg}(x+a) - \frac{1}{2}\ln((x+a)^2+1)$.

Astfel: $\int_0^1 (\operatorname{arctg}(x+2) - \operatorname{arctg}x)dx = 3\operatorname{arctg}3 - 2\operatorname{arctg}2 - \frac{\pi}{4}$. **8.** Determinăm o primitivă a funcției $f(x) = \ln(x +$

$+ a)$ pe $(0, \infty)$, $a \geq 0$. Avem $\int \ln(x+a)dx = \int (x+a)'\ln(x+a)dx = (x+a)\ln(x+a) - \int dx = (x+a)\ln(x+a) - x$.

Astfel, $\int_1^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx = \int_1^2 (\ln(1+x) - \ln x)dx = ((1+x)\ln(1+x) - x\ln x)\Big|_1^2 = 3\ln 3 - 4\ln 2$. **9.** Integrând prin părți,

obținem: $I = x\ln\frac{5-x}{4x}\Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{5}{x-5} = -6\ln 2$. **10.** $\int_0^1 (x^2 - x)e^x dx = \int_0^1 (x^2 - x)(e^x)'dx = (x^2 - x)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 (2x-1)e^x dx =$

$= -(2x-1)e^x\Big|_0^1 + \int_0^1 2e^x dx = e - 3$. b) $\int_0^1 \frac{1-x}{e^x}dx = \int_0^1 (1-x)e^{-x}dx = \int_0^1 (1-x)(-e^{-x})'dx = (1-x)(-e^{-x})\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x}dx =$

$= 1 + e^{-x}\Big|_0^1 + \frac{1}{e}$. c) $\int x\ln x\,dx = \int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$, deci $\int_1^e (x\ln x + x)dx =$

$= \left(\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^e = \frac{3e^2-1}{4}$. d) $\int_1^e \ln^2 x dx = \int_1^e x'\ln^2 x dx = x\ln^2 x\Big|_1^e - 2\int_1^e \ln x dx = e - \left(x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx\right) = e - 2$.

11. Fie $I = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$. Folosim formula de integrare prin părți. Avem: $I = \int_0^1 x'\sqrt{1+x^2}dx = x\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 -$

$- \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \left(\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$, deci $I = \sqrt{2} - I + ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_0^1 = \sqrt{2} - I + \ln(1+\sqrt{2})$, de

Scanned with OKEN Scanner

unde $I=\frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2}$. Rezultă că $\int_0^1(\sqrt{1+x^2}-x)dx=\frac{\sqrt{2}-1+\ln(1+\sqrt{2})}{2}$. **12.** Folosind formula de integrare prin părți obținem: a) $\int_0^1\ln(x^2+1)dx=\int_0^1 x'\ln(x^2+1)dx=x\ln(x^2+1)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{2x^2}{x^2+1}dx=\ln 2-2\int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$ $=\ln 2-2(x-\operatorname{arctg}x)\Big|_0^1=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$. b) $\int_0^1 x^2e^x dx=\int_0^1 x^2(e^x)'dx=x^2e^x\Big|_0^1-\int_0^1 2xe^x dx=2-\int_0^1 2x(e^x)'dx=$ $=e-2xe^x\Big|_0^1+\int_0^1 2e^x dx=e-2e+2e-2=e-2$. **13.** a) $\int_0^\pi x^2\cos x\,dx=\int_0^\pi x^2(\sin x)'dx=x^2\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi 2x\sin x dx=$ $=2\int_0^\pi x(\cos x)'dx=2x\cos x\Big|_0^\pi-2\int_0^\pi\cos x dx=-2\pi$. b) $\int_0^1 x^2\operatorname{arctg}x\,dx=\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}\right)'\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x\Big|_0^1-\frac{1}{3}\cdot$ $\cdot\int_0^1\frac{x^3}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln^2(x+1)\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\ln 2$. c) $\int_0^{\frac12}\arcsin x dx=\int_0^{\frac12}x'\arcsin x dx=x\arcsin x\Big|_0^{\frac12}-$ $-\int_0^{\frac12}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{12}+\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac12}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$. d) Fie $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx$. $I=e^x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x dx=-1+$ $+e^x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=-1+e^{\frac{\pi}{2}}-I$. Rezultă că $I=\frac12(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$. **14.** a) $\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=$ $=(\ln x+2\sqrt{x})\Big|_1^4=\ln 4+2$. b) $\int_1^4\ln x\,dx=\int_1^4 x'\ln x\,dx=x\ln x\Big|_1^4-\int_1^4 dx=(x\ln x-x)\Big|_1^4=4\ln 4-3$ și atunci $\int_1^4 g(x)dx=\ln 4-\frac34$. c) $\int_1^e f(x^2)g(x^2)dx=\int_1^e\frac{1+x}{2x^2}\ln x\,dx=\frac12\int_1^e\frac{1}{x^2}\ln x\,dx+\frac12\int_1^e\frac1x\ln x$. Avem $\int_1^e\frac{1}{x^2}\ln x\,dx=$ $=\int_1^e\left(-\frac1x\right)'\ln x\,dx=-\frac1x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e-\frac1x\cdot\frac1x dx=-\frac1e-\frac1x\Big|_1^e=-\frac2e+1$ și $\int_1^e\frac1x\ln x\,dx=\frac12\ln^2 x\Big|_1^e=\frac12$. Astfel, $\int_1^e f(x^2)g(x^2)dx=\frac34-\frac1e$. **15.** a) Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci are primitive. b) $F(x)=\begin{cases}(x+1)e^x-1, & x\le 0\\ x^2+2x, & x>0\end{cases}$. c) $\int_{-1}^1 f(x)dx=F(x)\Big|_{-1}^1=F(1)-F(-1)=4$. **16.** $I_n=\int_0^1 x^n(-\cos x)'dx=-x^n\cos x\Big|_0^1+\int_0^1 nx^{n-1}\cos x dx=$ $=-\cos 1+\int_0^1 x^{n-1}(\sin x)'dx=-\cos 1+n\left(x^{n-1}\sin x\Big|_0^1-\int_0^1(n-1)x^{n-2}\sin x\,dx\right)$. Deci, $I_n=-\cos 1+n\sin 1-n(n-1)I_{n-2}$. **17.** a) $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)'\cos^{2n-1}x dx=\sin x\cdot\cos^{2n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot(2n-1)\cos^{2n-2}x\,dx=(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^{2n-2}x\,dx=$ $=(2n-1)(a_{n-1}-a_n)$. Rezultă că $a_n=\frac{2n-1}{2n}a_{n-1}$. b) Cum $a_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac12\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$ $=\frac{\pi}{4}$, din relația de la a) rezultă că $a_n>0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$. Din aceeași relație rezultă că $a_{n+1}<a_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton și mărginit. c) Conform relației de la a) $a_3=\frac{5}{6}a_2=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}a_1$. **18.** a) $\frac{2}{3}$. b) Deoarece $\int\sqrt{1-x}\,dx=\frac{-2(\sqrt{1-x})^3}{3}$, avem că $I_k=\int_0^1 x^k\left(\frac{-2(\sqrt{1-x})^3}{3}\right)'dx=\frac{-2x^k\sqrt{(1-x)^3}}{3}\Big|_0^1+\frac{2k}{3}\int_0^1 x^{k-1}\sqrt{(1-x)^3}dx=$

$=\frac{2k}{3}\int_0^1 x^{k-1}(1-x)\sqrt{1-x}\,dx=\frac{2k}{3}(I_{k-1}-I_k)$. Deci $I_k=\frac{2k}{3}(I_{k-1}-I_k)$, de unde rezultă că $I_k=\frac{2k}{2k+3}\cdot I_{k-1}$.

19. a) $I_n=\int_1^e\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'\ln x\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}$. b) $J_n=\int_1^e\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'\ln^2 x\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln^2 x\Big|_1^e-$

$-\int_1^e\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^{n+1}}{n+1}-\frac{2}{n+1}I_n$. c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_n-J_n}{e^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{(n+1)^3}+\frac{n+3}{(n+1)^3e^{n+1}}\right)=0$. **20.** a) $I_0=\frac{\pi}{2}$. $I_1=1$.

b) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)'\cdot\sin^{n-1}x\,dx=-\cos x\sin^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos x\cdot(n-1)\cdot\sin^{n-2}x\cos x\,dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx=$

$=(n-1)\cdot(I_{n-2}-I_n)$. Rezultă că $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$, $n\geq 2$. c) Folosim inducția matematică și punctul b). d) Deoarece pentru $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin^n x\geq\sin^{n+1}x$, rezultă că $I_n\geq I_{n+1}$, deci $\frac{I_n}{I_{n+1}}\geq 1$. Aplicând b), obținem $I_{n+1}=\frac{n}{n+1}I_{n-1}$ și cum $I_{n+1}\geq I_n$, avem $\frac{I_n}{I_{n+1}}=\frac{I_n(n+1)}{nI_{n-1}}\leq\frac{n+1}{n}$. e) Din c) rezultă că $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=w_n^2\cdot\frac{\pi}{2}$. f) Avem $w_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}}$ și cum din d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_n}{I_{n+1}}=1$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}w_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

4.9. Integrarea prin substituții

1. $\int_{e^2}^{x}\frac{1}{t}(2\ln t-3)dt\overset{\ln t=y}{=}\int_2^{\ln x}(2y-3)dy=\ln^2 x-3\ln x+2$. Ecuația $\ln^2 x-3\ln x+2=0$ are soluțiile $\ln x=1$ sau $\ln x=2$, deci $x=e$ sau $x=e^2$. **2.** a) $\int_0^1\frac{2x+9}{x^2+1}dx=\int_0^1\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{9}{x^2+1}\right)dx=(\ln(x^2+1)+9\operatorname{arctg}x)\Big|_0^1=\ln 2+\frac{9\pi}{4}$.

b) $\int_0^1\frac{4x}{4x^4+1}dx\overset{x^2=t}{=}\int_0^1\frac{2dt}{4t^2+1}=\operatorname{arctg}(2t)\Big|_0^1=\operatorname{arctg}2$. **3.** a) $\int_0^1(\sqrt{x}+1)^2dx\overset{\sqrt{x}=t}{=}\int_0^1(t+1)^2 2t\,dt=\frac{17}{6}$. b) $\ln x=t$.

$\int_1^e\frac{dx}{x(\ln^2 x+1)}=\int_0^1\frac{dt}{t^2+1}=\frac{\pi}{4}$. c) $x+1=t$. $\int_0^1 x(x+1)^n dx=\int_1^2(t-1)t^n dt=\left(\frac{t^{n+2}}{n+2}-\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_1^2=\frac{2^{n+1}\cdot n+1}{(n+1)(n+2)}$.

d) $e^x=t$. $\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int_1^e\frac{dt}{1+t}=\ln(t+1)\Big|_1^e=\ln\frac{e+1}{2}$. e) $\sqrt{x^2+9}=t$. $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx=\int_3^5 t^2dt=\frac{98}{3}$. f) x^2+

Scanned with OKEN Scanner

$+1=t$. $\int_0^1 x\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 dx=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{2t}\Big|_1^2=\frac{1}{4}$. **4.** a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^2 x\,dx \overset{\cos x=t}{=} -\int_1^0(1-t^2)t^2dt=\int_0^1(t^2-t^4)dt=$

$=\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{15}$. b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^3 x\,dx \overset{\sin x=t}{=} \int_0^1 t^2(1-t^2)dt=\frac{2}{15}$. c) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{3+\cos x}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{t^2+2}dt=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{6}}$. d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^2 x\,dx \overset{\operatorname{tg}x=t}{=} \int_0^1\frac{t^2}{t^2+1}dt=(t-\operatorname{arctg}t)\Big|_0^1=1-\frac{\pi}{4}$. **5.** a) Cu substituția

$x^2=t$, $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}$. b) $g(x)=\int_0^x\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)'dt=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{f'(x)}{f(x)}$ și atunci

$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln f(x)\Big|_0^1=-\ln 2$. **6.** a) $\frac{x^{1005}}{1005}+\frac{2009^x}{\ln 2009}$. b) Cu substituția $x^2=t$, obținem

$\int_0^1 xf(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^{1005}}{1005}+\frac{2009^t}{\ln 2009}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1005}+\frac{2008}{\ln 2009}\right)$. **7.** a) $\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0(2x+3)dx+$

$+\int_0^1(e^x+2)dx=(x^2+3x)\Big|_{-1}^0+(e^x+2x)\Big|_0^1=e+3$. b) Cu substituția $x^3=t$, avem $\int_0^1 x^2f(x^3)dx=\frac{1}{3}\int_0^1 f(t)dt=$

$=\frac{1}{3}\int_0^1(e^t+2)dt=\frac{1}{3}(e^t+2t)\Big|_0^1=\frac{e+1}{3}$. **8.** a) $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^1=\frac{e-1}{e}$. b) Cu substituția $x=t^2$,

avem $\frac{e-1}{e}=\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=2\int_0^1 tf(t)dt$, deci $\int_0^1 tf(t)dt=\frac{e-1}{2e}$. **9.** a) $F'(x)=(c-ax^2-b)\sin x+(2ax+$

$+cx)\cos x=f(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, pentru $a=-1$, $b=c=2$. b) Cu substituția $\frac{1}{2x}=t$, avem $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} f\left(\frac{1}{2x}\right)dx=$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} f(t)\cdot\frac{-dt}{2t^2}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=-\frac{1}{2}\cos t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. **10.** Pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=\int_0^{-x}(t^2+1)\sqrt{|t|}dt$. Cu

substituția $t=-y$, obținem $f(-x)=-\int_0^x(y^2+1)\sqrt{|y|}dy=-f(x)$. Rezultă că f este impară. **11.** a) F este derivabilă

pe $\mathbb{R}$ și $F'(x)=f(x)$. b) Cu substituția $x=-t$, deducem că $\int_{-2}^0 F(x)dx=-\int_2^0 F(-t)dt=\int_0^2 F(-x)dx$. Rezultă că

$2=\int_0^2 F(x)dx-\int_0^2 F(-x)dx=\int_0^2\frac{x^2+ax+5-(x^2-ax+5)}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^2\frac{2ax}{\sqrt{x^2+1}}dx=2a\sqrt{x^2+1}\Big|_0^2=2a(\sqrt{5}-1)$.

Rezultă că $a=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. **12.** a) $F'(x)=f(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. b) Cu substituția $y=x-k\pi$, obținem $I_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)dx=$

$=\int_0^\pi e^{-y-k\pi}\cdot(-1)^k\sin y\,dy=(-1)^k e^{-k\pi}I_0$. Evident, $I_0=\int_0^\pi f(x)dx=F(x)\Big|_0^\pi=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$. **13.** Cu substituția

Scanned with OKEN Scanner

$\sqrt{\ln x} = t$, obținem $\int_1^e f(x)dx = \int_0^1 t(e^{t^2})'dt = te^{t^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{t^2}dt = e - \int_0^1 e^{t^2}dt$ și concluzia se impune. **14.** a) Deoarece $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2+1} > 0$, rezultă că f este strict crescătoare, deci este injectivă. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ și f este continuă, rezultă că $\text{Im}\, f = \mathbb{R}$, deci f este și surjectivă. b) Avem $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = x$, sau $t = f(x)$, deci $t = x + \text{arctg}\, x$. Rezultă că $g(x + \text{arctg}\, x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. În integrala dată facem substituția $g(t) = x$, deci $t = x + \text{arctg}\, x$ și $dt = \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$; $t = 0$ implică $x = g(0) = 0$, iar $t = 1 + \frac{\pi}{4}$ implică $x = g\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Rezultă că $\int_0^{1+\frac{\pi}{4}} g(t)dt = \int_0^1 x\left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1+\ln 2}{2}$. **15.** Fie $I = \int_0^\pi \sin^9 x \cos^3 x\, dx$. Cu substituția $x = \pi - t$, obținem că $I = \int_\pi^0 \sin^9 t(-\cos^3 t)(-dt) = -I$, deci $I = 0$. **16.** a) $A + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$. b) Cu substituția $y = \frac{\pi}{2} - x$, obținem $A = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos y}{\cos y + \sin y}(-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{\sin y + \cos y}dy = B$. **17.** Fie $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x}dx$ și $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x}dx$. Cu substituția $y = \frac{\pi}{2} - x$, rezultă că $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^3 x}{\cos x + \sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x}dx = J$. Observând că $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\sin 2x}{2}\right)dx =$

$= \left(x + \frac{\cos 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\pi-1}{2}$, deducem că $I = J = \frac{\pi-1}{4}$. **18.** Fie $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+e^x}\cos x\, dx$. Cu substituția $x = -t$, obținem $I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\cos(-x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^x}\cos x\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)\cos x\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx -$

$- \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+e^x}\cos x\, dx$. Rezultă că $I = 2 - I$ și de aici deducem că $I = 1$. **19.** a) Cu substituția $\sin x = t$, avem $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \text{arctg}\, t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$. b) Fie $I = \int_0^{2\pi} xf(x)dx$. Dacă facem substituția $t = 2\pi - x$, atunci $I =$

$= -\int_{2\pi}^0 (2\pi - t)f(2\pi - t)dt = \int_0^{2\pi} (2\pi - t)f(t)dt = 2\pi\int_0^{2\pi} f(t)dt - I$, dar $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Rezultă că $I = -I$ și deci $I = 0$. **20.** 1) $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$. Cu substituția $x = -t$, obținem $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) =$

$= \int_0^a f(-t)dt = -\int_0^a f(t)dt$, deci $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$. 2) $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$. Cu substituția

Scanned with OKEN Scanner

$x = -t$, avem $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t)dt$ și atunci $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$. 3) a) Funcția $f: \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$ este impară, deci $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\frac{1-x}{1+x}dx = 0$. b) Funcția $f: \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left|\ln\frac{1-x}{1+x}\right|$ este pară, deci

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left|\ln\frac{1-x}{1+x}\right|dx = 2\int_{0}^{\frac{1}{2}} \left|\ln\frac{1-x}{1+x}\right|dx - 2\int_{0}^{\frac{1}{2}} \ln\frac{1-x}{1+x}dx = -2\left((x+1)\ln\frac{1-x}{1+x} - 2\ln(1-x)\right)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}} = 3\ln 3 - 4\ln 2.$$

c) Funcția $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2e^{|x|}$ este pară, deci $\int_{-1}^{1} x^2e^{|x|}dx = 2\int_{0}^{1} x^2e^x dx = 2(x^2 - 2x + 2)e^x\Big|_{0}^{1} = 2e - 4$.

d) Funcția $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3e^{|x|}$ este funcție impară, deci $\int_{-1}^{1} x^3e^{|x|}dx = 0$. **21.** a) Considerăm $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(a) = \int_{a}^{a+T} f(x)dx$. Funcția F este derivabilă și $F'(a) = f(a + T) - f(a) = 0$. Așadar, $F(a) = \text{const} = F(0)$.

b) Funcția f este periodică, de perioadă $T = 1$ și atunci, conform punctului a), avem $\int_{a}^{a+1} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx =$

$= \int_{0}^{1} x(1-x)dx = \frac{1}{6}$. **22.** a) $f(1) = 2003$. b) Calcul direct. c) Pentru $x > 1$, avem $x - 1 > 0$, $x^{2003} - 1 > 0$, deci $f(x) > 0$;

pentru $x < 1$, avem $x - 1 < 0$, $x^{2003} - 1 < 0$, deci $f(x) > 0$, iar pentru $x = 1$, $f(1) = 2003 > 0$. d) $F'(x) = \left(\int_{0}^{x} f(t)dt\right)' =$

$= f(x)$. e) Cum $F'(x) > 0$, rezultă că f este strict crescătoare, deci injectivă. Din $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$,

rezultă că F este surjectivă. Deci, F este bijectivă. f) Fie $I = \int_{0}^{a} g(x)dx$. Facem substituția $g(x) = t$, deci $x = F(t)$.

Atunci $I = \int_{0}^{1} tF'(t)dt = \int_{0}^{1} tf(t)dt = \int_{0}^{1} (t + t^2 + ... + t^{2003})dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2004}$. **23.** a) $B(1, 1) = \int_{0}^{1} x(1-x)dx =$

$= \frac{1}{6}$. b) $B(0, n) = \int_{0}^{1} x^n dx = \frac{1}{n+1}$. c) Efectuând substituția $x = 1 - t$, obținem $B(p, q) = \int_{1}^{0} (1-t)^q t^p(-dt) =$

$= \int_{0}^{1} t^p(1-t)^q dt = B(q, p)$. d) $B(p, q) = \int_{0}^{1} \left(\frac{x^{q+1}}{q+1}\right)'(1-x)^p dx = \frac{x^{q+1}}{q+1}(1-x)^p\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \frac{x^{q+1}}{q+1} p(1-x)^{p-1}(-1)dx =$

$= \frac{p}{q+1}B(p-1, q+1)$. e) Conform d), avem $B(n, q) = \frac{n}{q+1}B(n-1, q+1) = \frac{n}{q+1}\cdot\frac{n-1}{q+2}B(n-2, q+2) =$

$= \frac{n}{q+1}\cdot\frac{n-1}{q+2}\cdot...\cdot\frac{n-k}{q+k+1}B(n-k-1, q+k+1) = \frac{n}{q+1}\cdot\frac{n-1}{q+2}\cdot...\cdot\frac{1}{q+n}B(0, q+n) = \frac{n!q!}{(q+n)!}B(0, q+n)$. f) Din

e) și b) rezultă că $B(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!}B(0, p+q) = \frac{p!q!}{(p+q)!}\cdot\frac{1}{p+q+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Scanned with OKEN Scanner

4.10. Inegalități

1. Inegalitatea este echivalentă cu $\int_0^2 f(x)dx > \int_2^4 f(x)dx$ sau $\ln(x^2+1)\Big|_0^2 > \ln(x^2+1)\Big|_2^4$, adică $\ln 5 > \ln\frac{17}{5}$, care este adevărată. **2.** $\frac{x^2+1}{x+1} \le \frac{x+1}{x+1}$, $\forall x \in [0,1]$, deci $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x+1}dx \le \int_0^1 \frac{x+1}{x+1}dx$, așadar $I_2 \le I_1$. **3.** Întrucât $1 \le \ln x \le 2$, $\forall x \in [e, e^2]$, rezultă că $\frac{1}{x} \le \frac{\ln^n x}{x} \le \frac{2^n}{x}$, de unde $\int_e^{e^2} \frac{1}{x}dx \le \int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x}dx \le \int_e^{e^2} \frac{2^n}{x}dx$. Deoarece $\int_e^{e^2} \frac{1}{x}dx = 1$ și $\int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x}dx = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1}\Big|_e^{e^2} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$, rezultă concluzia problemei. **4.** a) $f(x) = (7^x - 3^x)(5^x - 2^x) \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Inegalitatea este echivalentă cu $\int_0^1 f(x)dx > 0$, care este adevărată, deoarece $f(x) \ge 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5. Din $x \in [0,1]$ și $-1 \le \sin x \le 1$, obținem $-x^n \le x^n \sin x \le x^n$. Rezultă $-\int_0^1 x^n dx \le \int_0^1 x^n \sin x\, dx \le \int_0^1 x^n dx$, deci $-\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ și de aici deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. **6.** a) $I_0 = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$. $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\, dx = \left(\frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi-2}{8}$. b) Pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\cos 2x \ge 0$ și $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x(x-1)dx \le 0$, deoarece funcția de sub integrală este negativă. c) Pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, avem $0 \le x^n \cos 2x \le x^n$, de unde obținem că $0 \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x\, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx$, deci $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$ și cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} = 0$, rezultă că șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent și are limita egală cu 0. **7.** Folosind formula de integrare prin părți, obținem $I_n = \frac{1}{(n+1)e^{n+1}} + \frac{1}{(n+1)^2 e^{n+1}} - \frac{1}{(n+1)^2}$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. *Soluție alternativă.* Pentru $t \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$, avem $-1 \le \ln t \le 0$, deci $-t^n \le t^n \ln t \le 0$, de unde rezultă că $-\frac{1}{n+1} \le \int_{\frac{1}{e}}^1 t^n \ln t dt \le 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. **8.** a) $\frac{1}{2}\ln 2$. b) Pentru $x \in [0,1]$, avem $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \le x^n$, deci $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}dx \le \int_0^1 x^n dx$, de unde obținem $I_n \le \frac{1}{n+1}$. c) Din $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. **9.** a) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\, dx$. Cu substituția $\operatorname{tg} x = t$, avem $I_2 = \int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}dt = (t - \operatorname{arctg} t)\Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$. b) $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x(1+\operatorname{tg}^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x(\operatorname{tg} x)' dx = \frac{\operatorname{tg}^{n+1} x}{n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}$. c) Deoarece pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ avem $\operatorname{tg} x \in$

$\in [0, 1]$, rezultă că $I_n \geq 0$. Cum $I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x(1-\operatorname{tg} x)dx \geq 0$, înseamnă că șirul $(I_n)_{n\geq 2}$ este descrescător.

d) Șirul $(I_n)_{n\geq 2}$ este monoton și mărginit, deci convergent. Din b), deducem $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, de unde rezultă $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. **10.** b) Considerând $u = e^{ax} > 0$ în inegalitatea dată, deducem $e^{ax} + e^{-ax} \geq 2$, deci $f(x) \leq \frac{1}{2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Rezultă că $\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 \frac{1}{2}dx$, de unde obținem $\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{1}{2}$. **11.** Avem $1 \leq \frac{e^x}{x+1} \leq e^x$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$, de unde obținem că $\int_0^1 dx \leq \int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx \leq \int_0^1 e^x dx$, prin urmare $1 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq e-1$. **12.** b) Din $\int_0^x (t+1)^{2008}dt \geq \int_0^x dt$ rezultă că $\frac{(x+1)^{2009}}{2009} - \frac{1}{2009} \geq x$, de unde $(x+1)^{2009} \geq 2009x + 1$, oricare ar fi $x \geq 0$.

c) Pentru $x \geq 0$, integrăm relația de la b): $\int_0^x (t+1)^{2009}dt \geq \int_0^x (2009t+1)dt$, deci $\frac{(x+1)^{2010}-1}{2010} \geq 2009\frac{x^2}{2} + x$, de unde $(x+1)^{2010} \geq 2009 \cdot 1005x^2 + 2010x + 1$. **13.** a) Inegalitatea este echivalentă cu $(1-x^2+x^4)(1+x^2) \geq 1$ sau $1 + x^6 \geq 1$, care este adevărată. b) Avem că $\int_0^x (1-t^2+t^4)dt \geq \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$, oricare ar fi $x \geq 0$, deci $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \geq \operatorname{arctg} x$. c) **5.** **14.** Pentru $x \in [a, a+1]$, avem că $\frac{1}{a+2} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{a+1}$, de unde rezultă că $\int_a^{a+1} \frac{dx}{a+2} \leq \int_a^{a+1} f(x)dx \leq \int_a^{a+1} \frac{1}{a+1}dx$, prin urmare $\frac{1}{a+2} \leq \int_a^{a+1} f(x)dx \leq \frac{1}{a+1}$. **15.** Pentru $t \geq 1$, avem că $t(t+1)(t+2) \geq 6$, deci $f(t) \leq \frac{1}{6}$, $t \in [1, \infty)$ și de aici deducem că $\int_1^x f(t)dt \leq \int_1^x \frac{1}{6}dx$, de unde $\int_1^x f(t)dt \leq \frac{x-1}{6}$. **16.** a) Folosind semnul derivatei, obținem că $x = 0$ este punct de minim. Cum $f(0) = 1$, rezultă că $f(x) \geq 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. b) Din $x + e^{-x} \geq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $e^{-x^2} \geq 1 - x^2$, de unde obținem că $\int_0^1 e^{-x^2}dx \geq \int_0^1 (1-x^2)dx$, deci $\int_0^1 e^{-x^2}dx \geq \frac{2}{3}$. **17.** a) Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - x\ln 2 - 1$. Cum $f'(x) = 2^x\ln 2 - \ln 2$, obținem următorul tablou de variație al funcției f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
f	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

de unde deducem că $2^x - x\ln 2 - 1 \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. b) Înlocuind pe x cu x^2 în inegalitatea de la a), deducem că $2^{x^2} \geq x^2\ln 2 + 1$, de unde rezultă că $\int_0^1 2^{x^2}dx \geq \int_0^1 (x^2\ln 2 + 1)dx$ sau, încă, $\int_0^1 2^{x^2}dx \geq 1 + \frac{\ln 2}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

18. b) Folosind a), deducem că $e^{x^2} \geq x^2+1$, de unde obținem $e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{x^2+1}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Cum pentru $x \in [0, 1]$, $e^{-x^2} \geq e^{-1}$, obținem inegalitățile $\frac{1}{e} \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2+1}$, de unde rezultă $\int_0^1 \frac{1}{e}dx \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq$ $\leq \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$, deci $\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \frac{\pi}{4}$. **19.** a) $\int_0^a \frac{1}{1+t}dt = \ln(1+t)\Big|_0^a = \ln(1+a)$. b) Deoarece $\sin t \leq 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, pentru $x > 0$, avem: $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1+t}dt < \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \ln(1+x)$. c) Inegalitatea este echivalentă cu $\int_x^{2x} \frac{\sin t}{1+t}dt < 0$, care este adevărată deoarece $\sin t \leq 0$, $t \in [\pi, 2\pi]$. **20.** Avem $f'(x) = -\sin x + x$ și $f''(x) = 1 - \cos x \geq 0$. Deducem că f' este crescătoare pe $\mathbb{R}$. Deci, pentru $x \geq 0$, are loc inegalitatea: $f'(x) \geq f'(x) = 0$, deci f este crescătoare pe $[0, \infty)$. Astfel, $x \geq 0$ implică $f(x) \geq f(0) = 0$, de unde $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$, $\forall x \geq 0$. Cum $x^2 \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $\cos x^2 \geq 1 - \frac{x^4}{2}$, deci $\int_0^1 \cos x^2 dx \geq \int_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{2}\right)dx$, adică $\int_0^1 \cos x^2 dx \geq \frac{9}{10}$. **21.** a) $I_0 = \ln 2$. $I_1 = 1 - \ln 2$.

b) $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{x+1}dx = \frac{1}{n+1}$. c) $I_n = \int_0^1 \left(\frac{x^n}{n}\right)' \cdot \frac{x}{x+1}dx = \frac{x^n}{n} \cdot \frac{x}{x+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}dx =$

$= \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^2}dx$. Rezultă că $nI_n = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx$. d) Deoarece $\frac{x^{n+1}}{x+1} \leq \frac{x^n}{x+1}$, $x \in [0, 1]$, rezultă că: $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$, deci $I_{n+1} \leq I_n$. e) Avem $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, de unde obținem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. f) Deoarece $0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$, rezultă că $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \leq \frac{1}{n+1}$. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx = 0$. Astfel, din c) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{2}$. **22.** a) $I_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$. $I_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\ln\frac{5}{3}\right)$. b) $2I_{n+1} + 3I_n = \int_0^1 \frac{x^n(2x+3)}{2x+3}dx =$

$= \frac{1}{n+1}$. d) Avem $I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{2x+3}dx \geq 0$, deoarece $\frac{x^n(1-x)}{2x+3} \geq 0$, $\forall x \in [0, 1]$. e) Folosind d) și b), obținem $\frac{1}{n+1} = 2I_{n+1} + 3I_n \geq 5I_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Înlocuind pe n cu $n-1$, rezultă că $\frac{1}{5n} \geq I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. De asemenea, avem $\frac{1}{n+1} = 2I_{n+1} + 3I_n \leq 5I_n$, de unde rezultă că $\frac{1}{5(n+1)} \leq I_n$. f) Din e) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{5}$, conform criteriului cleștelui. **23.** a) $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2+1}dx = \operatorname{arctg}(x+2)\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2$. $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+5}dx =$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx - \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{4}{x^2+4x+5}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)\Big|_0^1 - 2\operatorname{arctg}(x+2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - 2\operatorname{arctg} 3 + 2\operatorname{arctg} 2$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $I_{n+2}+4I_{n+1}+5I_n=\int_0^1\frac{x^n(x^2+4x+5)}{x^2+4x+5}dx=\frac{1}{n+1}$. c) Observăm că $I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{x^2+4x+5}dx\le 0$, deoarece funcția de sub integrală este negativă pe [0, 1]. d) Folosind c), $I_n\ge I_{n+1}\ge I_{n+2}$, rezultă că $\frac{1}{n+1}=I_{n+2}+4I_{n+1}+5I_n\ge 10I_{n+2}$ și $\frac{1}{n+1}=I_{n+2}+4I_{n+1}+5I_n\le 10I_n$. e) Din $10I_{n+2}\le\frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, înlocuind pe n cu $n-2$, rezultă $10I_n\le\frac{1}{n-1}$, $n\ge 2$. Deci $\frac{1}{10(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{10(n-1)}$, $n\ge 2$. f) Folosind e), deducem că $\frac{n}{10(n+1)}\le nI_n\le\frac{n}{10(n-1)}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{10}=f(1)$. **24.** a) $I_0=e-1$. $I_1=1$. b) $I_{n+1}=$ $=x^{n+1}e^x\Big|_0^1-\int_0^1(n+1)x^ne^xdx=e-(n+1)I_n$. c) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1x^ne^x(x-1)dx\le 0$, deoarece funcția de sub integrală $x^ne^x(x-1)\le 0$ pentru $x\in[0,1]$. Rezultă că (I_n) este descrescător. Cum $I_n\ge 0$, deducem că $I_n\in[0,I_0]$, deci șirul $(I_n)_{n\ge 0}$ este și mărginit. d) Din c), rezultă că (I_n) este convergent. Cum $I_n=\frac{e}{n+1}-\frac{I_{n+1}}{n+1}$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$, iar din $nI_n=e-I_n-I_{n+1}$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n=e$. **25.** a) $I_1=\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=\frac{1}{2}\ln^2(x+1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln^2 2$. b) Pentru $x\in[0,1]$ avem $\frac{\ln(x^n+1)}{x+1}\ge\frac{\ln(x^{n+1}+1)}{x+1}$, de unde rezultă că $\int_0^1\frac{\ln(x^n+1)}{x+1}dx>\int_0^1\frac{\ln(x^{n+1}+1)}{x+1}dx$, deci $I_n>I_{n-1}$. c) Avem $\ln(x+1)\le x$, oricare ar fi $x\ge 0$, deci $\ln(x^n+1)\le x^n$ și $\frac{\ln(x^n+1)}{x+1}\le\frac{x^n}{x+1}\le x^n$, de unde obținem $\int_0^1\frac{\ln(x^n+1)}{x+1}dx\le\int_0^1x^ndx$ sau, încă, $I_n\le\frac{1}{n+1}$. Din $0\le I_n\le\frac{1}{n+1}$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$. **26.** a) Cum $\int\ln(1+x)dx=$ $=\int(x+1)'\ln(x+1)dx=(x+1)\ln(x+1)-\int dx=(x+1)\cdot\ln(x+1)-x$, rezultă că $\int_0^1f(x)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\right.$ $\left.+\frac{x^4}{12}-(x+1)\ln(x+1)+x\right)\Big|_0^1=\frac{17}{12}-2\ln 2$. b) Avem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F'(x)}{5x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{5x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{20x^3}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x+x^2-\frac{1}{x+1}}{20x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{20x^3(x+1)}=\frac{1}{20}$. c) Deoarece $f'(x)=\frac{x^3}{x+1}\ge 0$, pentru $x\ge 0$, rezultă că f este crescătoare. Deci $x\ge 0$ implică $f(x)\ge f(0)=0$ și de aici obținem $\ln(x+1)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$. Integrând pe [0, 1], rezultă $\int_0^1\ln(x+1)dx\le\int_0^1\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)dx$ sau, încă, $\int_0^1\ln(x+1)dx\le\frac{5}{12}$.

Scanned with OKEN Scanner

4.11. Teorema de existență a primitivelor unei funcții continue

1. Trebuie arătat că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x+a)\operatorname{arctg}(x+a)-\frac{1}{2}\ln((x+a)^2+1)+\frac{1}{2}\ln(a^2+1)-a\cdot\operatorname{arctg}a$ este primitiva funcției f, care se anulează în 0. Altfel spus, trebuie arătat că $F'(x)=f(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ și $F(0)=0$. **2.** Deoarece $\frac{t^2+t+2}{t-1}=t+2+\frac{4}{t-1}$, rezultă că $\int_2^x\frac{t^2+t+2}{t-1}dt=\frac{t^2}{2}+2t+4\ln(t-1)\Big|_2^x=\frac{x^2}{2}+2x+$ $+4\ln(x-1)-6$ și atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\int_2^x\frac{t^2+t+2}{t-1}dt=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{2}+2x+4\ln(x-1)-6}{x^2}=\frac{1}{2}$. *Soluție alternativă.* Fie F o primitivă a funcției $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$ pe $[2,\infty)$. atunci $\int_2^x f(t)dt=F(t)\Big|_2^x=F(x)-F(2)$ și limita cerută este egală cu $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)-F(2)}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+2}{2x(x-1)}=\frac{1}{2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{3x^2}=\infty$. **4.** Cum $f(t)\ge t-\frac{\pi}{2}$, oricare ar fi $t\in\mathbb{R}$, rezultă că $\int_0^x f(t)dt\ge\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{2}x$, $x>0$, de unde $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt=\infty$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)=\frac{1}{2}$. **5.** a) 1. b) $\frac{1}{2010}$. **6.** Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ fixat, funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(t)=t^n\ln t$ este continuă, deci admite primitive. Fie G o primitivă; atunci $f_n(x)=G(x)-G\left(\frac{1}{e}\right)$. Rezultă că f_n este derivabilă și $f_n'(x)=G'(x)$, deci $f_n'(x)=x^n\ln x$. Cum $f_n'(x)>0$ pentru $x\in(0,1)$, rezultă că f_n este descrescătoare. **7.** a) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}^2t+\operatorname{tg}t)dt$. Notăm $\operatorname{tg}t=y$ și atunci $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^1\frac{y^2+y}{y^2+1}dy=\int_0^1\left(1+\frac{y}{y^2+1}-\frac{1}{y^2+1}\right)dy=\left(y+\frac{1}{2}\ln(y^2+1)-\operatorname{arctg}y\right)\Big|_0^1=1+\frac{1}{2}\ln2-\frac{\pi}{4}$. b) Funcția f este derivabilă și $f'(x)=\frac{(\sin x+\cos x)\sin x}{\cos^2x}>0$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Deci f este strict crescătoare. c) Cu regula lui L'Hospital obținem: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{(\sin x+\cos x)\sin x}{2x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\sin x+\cos x}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}$. **8.** a) Funcția f este derivabilă pe $[0,\infty)$ și $f'(x)=x^3\cdot\sqrt{x^2+1}>0$, oricare ar fi $x>0$, deci f este strict crescătoare. b) Evident $f(1)=\int_0^1t^3\sqrt{t^2+1}dt$. Cu substituția $\sqrt{t^2+1}=y$, obținem $f(1)=\int_1^{\sqrt2}y^2(y^2-1)dy=\left(\frac{y^5}{5}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt2}=$

Scanned with OKEN Scanner

$= \frac{2(\sqrt{2}+1)}{15}$. c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^5} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{5x^4} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{5x^4} = \frac{1}{5}$. **9.** Funcția F este derivabilă și $F'(x) =$ $= \int_0^x (1+\cos t)dt + x(1+\cos x)$. Deoarece $1+\cos t \geq 0$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, obținem: 1) dacă $x > 0$, $\int_0^x (1+\cos t)dt > 0$ și $x(1+\cos x) \geq 0$, deci $F'(x) > 0$. 2) dacă $x < 0$, $\int_0^x (1+\cos t)dt < 0$ și $x(1+\cos x) \leq 0$, deci $F'(x) < 0$. 3) pentru $x = 0$, $F'(0) = 0$. Rezultă că F este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $[0, \infty)$. **10.** Funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) =$ $= (t^3 - 3t + 2)e^t$ este continuă, deci admite primitive. Fie H o primitivă (deci H este derivabilă și $H'(x) = h(x)$), atunci $f(x) = H(t)\Big|_0^{x^2} = H(x^2) - H(0)$. Rezultă că $f'(x) = 2xH'(x^2) = 2xh(x^2) = 2x(x^6 - 3x^2 + 2)e^{x^2} = 2x(x^2-1)^2(x^2 +$ $+ 2)e^{x^2}$. Tabelul de variație a funcției f este:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'	$-$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	$+$
f	↘		$f(-1)$	↘	0	↗	$f(1)$	↗	

Funcția are un minim în $x = 0$. **11.** a) $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2e}$. b) Folosim regula lui L'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(\cos x)-F(1)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-F'(\cos x)\sin x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-e^{-\cos^2 x}\cdot\sin x}{2x} = -\frac{1}{2e}$. c) Funcția g este derivabilă și $g'(x) =$ $= f(x) + f'(x) = e^{-x^2}(1-2x)$. Rezultă că $x = \frac{1}{2}$ este punct de maxim local. **12.** Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = e^{-x^2}$. Deci $f''(x) = -2xe^{-x^2} \leq 0$ pe $[0, \infty)$. Rezultă că f este concavă. **13.** a) $F_1(x) = -e^{-x}(x+1)+1$. b) Funcția F_n este derivabilă și $F_n'(x) = x^n e^{-x}$, apoi $F_n''(x) = e^{-x}x^{n-1}(n-x)$; $x = n$ este punct de inflexiune pentru F_n. c) $F_2(x) = e^{-x}(-x^2-2x-2)+2$ și $\lim\limits_{x\to\infty} F_2(x) = 2$. **14.** a) F este derivabilă și $F'(x) = f(x)$, $F''(x) = -2xe^{-x^2}$. Rezultă că $x = 0$ este punct de inflexiune al graficului funcției F. b) $\int_0^1 xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2e}$. c) $\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 x'F(x)dx = xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xF'(x)dx = -\int_0^1 xf(x)dx = \frac{1-e}{2e}$. **15.** a) $f(3) = \int_2^3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt =$ $= \left(t + \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right)\Big|_2^3 = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. b) Funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = \sqrt{3e^t+1}$ este continuă, deci admite primitive. Fie H o primitivă. Rezultă că $g(x) = H(t)\Big|_0^{\ln\frac{x^2-1}{3}} = H\left(\ln\frac{x^2-1}{3}\right) - H(0)$, deci g este derivabilă pe $(1, \infty)$ și $g'(x) =$ $= H'\left(\ln\frac{x^2-1}{3}\right)\cdot\left(\ln\frac{x^2-1}{3}\right)' = h\left(\ln\frac{x^2-1}{3}\right)\cdot\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x^2}{x^2-1}$, $x \in (1, \infty)$. c) Funcțiile g și $2f$ au aceeași

Scanned with OKEN Scanner

derivată și, cum $g(2) = 2f(2) = 0$, ele sunt egale. **16.** a) Evident $f(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2}\,dt$. Cu substituția $t = -y$ deducem că $f(-x) = \int_0^x e^{y^2}(-dy) = -f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. b) Funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = e^{t^2}$ este continuă, deci admite primitive. Fie G o primitivă. Cum $f(x) = G(x) - G(0)$, rezultă că $f'(x) = G'(x) = g(x) = e^{x^2}$. c) Evident $e^{t^2} \geq 1$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$. Atunci pentru $x > 0$, avem $\int_0^x e^{t^2}\,dt \geq \int_0^x dt = x$, deci $f(x) \geq x$ și, cum $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$, deducem că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

4.12. Aplicații ale integralei definite

1. $\mathscr{A} = \int_0^1 |3^t - 2^t|\,dt = \int_0^1 (3^t - 2^t)\,dt = \frac{2}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 2}$. **2.** a) $\int_0^x \ln(t^2 + a^2)\,dt = \int_0^x t' \ln(t^2 + a^2)\,dt = t\ln(t^2 + a^2)\Big|_0^x -$

$- \int_0^x \frac{2t^2}{t^2 + a^2}\,dt = x\ln(x^2 + a^2) - 2\int_0^x \left(1 - \frac{a^2}{t^2 + a^2}\right)dt = x\ln(x^2 + a^2) - 2x + 2a\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. b) Folosim punctul anterior.

3. $\mathscr{A} = \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$; dacă notăm $x^2 = t$, atunci $\mathscr{A} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+4)}\,dx = \frac{1}{6}\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4}\right)dx = \frac{1}{6}\cdot$

$\cdot \ln\frac{x+1}{x+4}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}\ln\frac{8}{5}$. **4.** $\mathscr{A} = \int_{-1}^1 |f(x)|\,dx = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x)\,dx + \int_0^1 (-x^3 + 3x)\,dx = \frac{5}{2}$. **5.** $\mathscr{A} = \int_1^2 |f(x)|\,dx =$

$= \int_1^2 \frac{4x^2 - 3x - 1}{x}\,dx = \int_1^2 \left(4x - 3 - \frac{1}{x}\right)dx = (2x^2 - 3x - \ln x)\Big|_1^2 = 3 - \ln 2$. **6.** $\mathscr{A} = \int_0^1 (e^{2x} + e^{-2x})\,dx = \frac{e^4 - 1}{2e^2}$.

7. Deoarece funcția $|f|$ este funcție pară, rezultă că $\mathscr{A} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |f(x)|\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} |f(x)|\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin x\,dx = \sqrt{2}\cdot$

$\cdot \left(2 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16}\right) - 4$. **8.** $\mathscr{A} = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} |f(x) - 1|\,dx = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)dx = \left(-\frac{1}{2}\ln^2 x - \ln x\right)\Big|_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{2}$. **9.** $\mathscr{A} =$

$= \int_{-2}^0 |e^{-x}(x+1)|\,dx = \int_{-2}^{-1} -e^{-x}(x+1)\,dx + \int_{-1}^0 e^{-x}(x+1)\,dx = 2e - 2$. **10.** a) Se arată că $g'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) $\mathscr{A} = \int_{-1}^1 |f(x)|\,dx = \int_{-1}^0 -f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx = -g(x)\Big|_{-1}^0 + g(x)\Big|_0^1 = 4\ln\frac{1+e}{2} - 2$. **11.** Avem $\mathscr{A}(u) =$

$= \int_1^u |f(x)|\,dx = \int_1^u (x-1)e^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big|_1^u = \frac{1}{e} - \frac{u}{e^u}$ și $\lim\limits_{u\to\infty} \mathscr{A}(u) = \frac{1}{e}$. **12.** Întrucât $\int_1^a f(t)\,dt = \int_a^3 f(t)\,dt =$

$= \frac{1}{2}\cdot\int_1^3 f(t)\,dt$, $a \in (1, 3)$, rezultă ecuația $a^3 - 6a^2 + 9a - 2 = 0$, de unde obținem $a = 2$. **13.** Punctele de intersecție dintre cele două grafice sunt $A(-4, 0)$ și $B(1, 5)$ și aria căutată este $\mathscr{A} = \int_{-4}^1 (x + 4 - x^2 - 4x)\,dx =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \left(4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-4}^{1} = \frac{125}{6}$. **14.** a) $x \in [0, 4]$. b) Punctele de intersecție dintre cele două grafice sunt $A(0, 3)$ și $B(4, -1)$ și aria cerută este egală cu $\mathcal{A} = \int_0^4 (g(x) - f(x))dx = \int_0^4 (8x - 2x^2)dx = \frac{64}{3}$. **15.** Asimptota oblică are ecuația $y = x + 2$. Aria căutată este egală cu $\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} |f(x) - x - 2|\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{2}{|x-1|}dx = -2\ln|x-1| = 2\ln 2$. **16.** Tangenta la grafic în $A(2, 7)$ are ecuația $y = 4x - 1 = g(x)$. Deci aria căutată este egală cu $\mathcal{A} = \int_0^2 |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^2 |x^2 - 4x + 4|\,dx = \int_0^2 (x-2)^2 dx = \frac{(x-2)^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$. **17.** Pentru $x \in [0, 1]$, avem $\frac{1}{2} \le \frac{1}{x^n + 1} \le 1$, deci $\int_0^1 \frac{1}{2}dx < \int_0^1 \frac{1}{x^n+1}dx < \int_0^1 1dx$. De aici rezultă că $\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{1}{x^n+1}dx < 1$. **18.** a) $f(x) - 1 + x - x^2 = -\frac{x^3}{1+x} \le 0, \forall x \ge 0$. b) $f(x) = -1 + x - x^2 + x^3 = \frac{x^4}{1+x} \ge 0, \forall x \ge 0$. c) Rezultă din a) și b). d) Din c) rezultă că $1 - x^9 + x^{18} - x^{27} \le \frac{1}{1+x^9} \le 1 - x^9 + x^{18}$, de unde obținem $\int_0^1 (1 - x^9 + x^{18} - x^{27})dx \le \int_0^1 g(x)dx \le \int_0^1 (1 - x^9 + x^{18})dx$, deci $0{,}91 < \int_0^1 g(x)dx < 0{,}96$. **19.** Reprezentăm grafic parabola $y = 2x - x^2$ și dreapta $y = mx$. Cele două grafice au în comun punctele $O(0, 0)$ și $A(2-m, 2m - m^2)$ pentru $m \in (0, 2)$. Notăm cu S_1 și S_2 ariile celor două suprafețe formate. Cum $S_1 + S_2 = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \frac{4}{3}$, avem $S_1 = S_2$ dacă și numai dacă $S_1 = \frac{2}{3}$; $S_1 = \int_0^{2-m} (2x - x^2 - mx)dx = \frac{(2-m)^3}{6}$. Rezultă că $(2 - m)^3 = 4$, de unde obținem $m = 2 - \sqrt[3]{4}$. **20.** $\mathcal{V} = \pi\int_0^2 f^2(x)dx = \pi\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}dx = \frac{-\pi}{x+1}\Big|_0^2 = \frac{2\pi}{3}$. **21.** Evident $\mathcal{V} = \pi\int_0^1 (ax+2)^2 dx = \frac{\pi}{3}(a^2 + 6a + 12)$ și este minim pentru $a = -3$. **22.** $\mathcal{V} = \pi\int_0^3 f^2(x)dx = \pi\int_0^3 \frac{x(x-3)}{x-4}dx = \pi\int_0^3 \left(x + 1 + \frac{4}{x-4}\right)dx = \pi\left(\frac{x^2}{2} + x + 4\ln|x-4|\right)\Big|_0^3 = \pi\left(\frac{15}{2} - 8\ln 2\right)$. **23.** Avem $\mathcal{V} = \pi\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin^2 x\,dx = \pi\int_0^{\frac{1}{2}} x'\arcsin^2 x\,dx = \pi\left(x\arcsin^2 x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx\right)$. Deoarece $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (-\sqrt{1-x^2})'\arcsin x\,dx = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$, rezultă că $\mathcal{V} = \pi\cdot\left(\frac{\pi^2}{72} - 1 + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right)$. **24.** a) $\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. b) $\mathcal{V} = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)dx = \frac{\pi}{2}\cdot\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$. c) Deoarece $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = \dfrac{1}{2}$, limita cerută este egală cu $\dfrac{1}{2}\cdot \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{n}{n}\right)\right) = \dfrac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{1}{2}\sin 1$.

25. a) $\mathcal{A} = \int_0^1 (x+e^{-x})dx = \dfrac{x^2}{2}-e^{-x}\Big|_0^1 = \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{e}$. b) $\mathcal{V} = \pi\int_0^1 g^2(x)dx = \pi\int_0^1 (e^{-x}+e^x)^2 dx = \pi\left(\dfrac{e^{2x}}{2}-\dfrac{e^{-2x}}{2}+2x\right)\Big|_0^1 =$

$= \dfrac{(e^2-e^{-2}+4)\pi}{2}$. **26.** a) $\mathcal{A} = \int_0^1 f_1(x)dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{4}$. b) Limita cerută este egală cu $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\right.$

$\left.+\dfrac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\ldots+\dfrac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right) = \int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx = \dfrac{\pi}{4}$. **27.** Avem $a_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. Deci, a_n reprezintă suma Riemann asociată funcției $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, diviziunii $\Delta_n = \left(0,\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\ldots,\dfrac{n}{n}\right)$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\ldots,\dfrac{n}{n}\right)$. Cum f este integrabilă, rezultă că șirul este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)dx =$

$= \dfrac{\pi}{4}$. **28.** Termenul general, $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$, este o sumă Riemann asociată funcției $f(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2}$, $x\in[0,1]$, diviziunii $\Delta_n = \left(0,\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\ldots,\dfrac{n-1}{n},\dfrac{n}{n}\right)$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\ldots,\dfrac{n}{n}\right)$. Cum f este integrabilă, rezultă că șirul (a_n) este convergent și are limita $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$. **29.** Avem $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx = \int_0^1 x'\ln(1+x^2)dx = x\ln(1+x^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \dfrac{2x^2}{x^2+1}dx = \ln 2-2+\dfrac{\pi}{2}$. Observăm că $a_n =$

$= \dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln n^2\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)-2(n-1)\ln n\right) = \dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)$, deci a_n este o sumă Riemann asociată funcției $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x^2)$, diviziunii $\Delta_n = \left(0,\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\ldots,\dfrac{n-1}{n},1\right)$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_n = \left(0,\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\ldots,\dfrac{n-1}{n}\right)$. Cum f este integrabilă, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)dx = \ln 2-2+\dfrac{\pi}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

4.13. Probleme de sinteză – analiză matematică

1. a) Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci are primitive; integrând pe ramuri, primitiva căutată are forma $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}-\frac{x}{e^x}+a, & x<1\\ \frac{\ln^3 x}{3}+b, & x\geq 1\end{cases}$. Cum F este continuă, $b=a-\frac{1}{e}$. Primitivele lui f sunt $F(x)=\begin{cases}-\frac{x}{e^x}+a, & x<1\\ \frac{\ln^3 x}{3}-\frac{1}{e}+a, & x\geq 1\end{cases}$.

b) $\int_{-1}^{0}|f(x)|dx=\int_{-1}^{0}-f(x)dx=-F(x)\Big|_{-1}^{0}=e$. c) $\frac{1}{3}-\frac{1}{e}$. **2.** a) Fie F o primitivă a funcției f_a. Atunci $F'(x)=$ $=f_a(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, deci F este strict crescătoare. b) $\int_0^3 f_2(x)dx=\int_0^3\frac{1}{|x-2|+3}dx=\int_0^2\frac{1}{-x+5}dx+\int_2^3\frac{1}{x+1}dx=$

$=-\ln|x-5|\Big|_0^2+\ln|x+1|\Big|_2^3=\ln\frac{5}{3}+\ln\frac{4}{3}$. c) Deoarece $x\in[0,3]$, pentru $a>3$ avem $|x-a|=a-x$ și atunci

$\lim_{a\to\infty}\int_0^3 f_a(x)dx=\lim_{a\to\infty}(-\ln|a+3-x|\Big|_0^3)=\lim_{a\to\infty}\ln\frac{a+3}{a}=0$. **3.** a) Funcția f este continuă pe $[0,\infty)$, deci este integrabilă.

b) Fiind continuă, f admite primitive. Primitiva F are forma $F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C_1, & x>0\\ C_2, & x=0\end{cases}$. Din condiția

de continuitate găsim $C_1=C_2$ și primitivele funcției f sunt de forma $F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C, & x>0\\ C, & x=0\end{cases}$. Astfel

$\int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)=\frac{1}{4}$. c) $\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^e\frac{1}{x}\ln^2 x\,dx=\frac{\ln^3 x}{3}\Big|_1^e=\frac{1}{3}$. **4.** a) $1-\frac{2}{e}$. b) $\frac{1}{2}f_n(2x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{e^{x^n\cdot 2x}}=$

$=\frac{x}{e^{2^{n+1}\cdot x}}=f_{n+1}(x)$. c) $I_{n+1}=\int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}}f_{n+1}(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}}\frac{1}{2}f_n(2x)dx$. Cu substituția $2x=t$, obținem $I_{n+1}=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2^n}}f_n(t)dt=$

$=\frac{1}{4}I_n$. Din relația $I_{n+1}=\frac{1}{4}I_n$, rezultă că $I_n=\frac{1}{4^n}\cdot I_0$ și $S_n=I_0\cdot\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right)\cdot\frac{4}{3}$ și $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{4}{3}I_0$. **5.** a) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$.

b) Folosind regula lui L'Hospital, avem că $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(\ln t)dt=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x f(\ln t)dt}{x}=\lim_{x\to\infty}f(\ln x)=\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}(\ln x)=$

$=\frac{\pi}{2}$. c) Limita este egală cu $\int_0^1 f(x)dx$. **6.** a) $\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$. b) Avem $f_2(x)=$

$=x^2e^{x^2}\geq x^2(x^2+1)$, deci $\int_0^1 f_2(x)dx\geq\int_0^1(x^4+x^2)dx=\frac{8}{15}$. c) $\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 x^n e^{x^2}dx=\int_0^1 x^{n-1}\left(\frac{e^{x^2}}{2}\right)'dx=$

Scanned with OKEN Scanner

$= x^{n-1}\frac{e^{x^2}}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 (n-1)x^{n-2}\frac{e^{x^2}}{2}dx = \frac{e}{2} - \frac{n-1}{2}\int_0^1 f_{n-2}(x)dx$. **7.** a) $\int_0^1 f_2(x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{(1-x)^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$. b) Cu substituția $x = 1-y$, avem $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_1^0 f_n(1-y)(-dy) = \int_0^1 f_n(1-y)dy$. c) Deoarece pentru $x \in [0, 1]$, rezultă $1-x \in [0, 1]$ și $x^{2008} \geq x^{2010}$, $(1-x)^{2008} \geq (1-x)^{2010}$, deducem că $f_{2008}(x) \geq f_{2010}(x)$ și deci $\int_0^1 f_{2008}(x)dx \geq$ $\geq \int_0^1 f_{2010}(x)dx$. **8.** a) $f(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2}dt$. Cu substituția $t = -y$, avem $f(-x) = -\int_0^x e^{y^2}dy = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Astfel f este impară. b) Deoarece $e^{t^2} \geq 1$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$, pentru $x > 0$, rezultă că $\int_0^x e^{t^2}dt \geq \int_0^x dt$, de unde obținem $f(x) \geq x$ și de aici deducem că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. c) Pentru $x \in [0, 1]$ și $t \in [0, x]$, avem $e^{t^2} \leq e^t$. Drept urmare, $\int_0^x e^{t^2}dt \leq \int_0^x e^t dt$, deci $f(x) \leq e^x - 1$, de unde rezultă că $\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 (e^x - 1)dx$ și de aici obținem $\int_0^x e^{t^2}dt \leq$ $\leq e - 2$. **9.** a) Dacă notăm $\sin x = t$, atunci $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2-\sin x}dx = \int_0^1 \frac{dt}{2-t} = -\ln(t-2)\Big|_0^1 = \ln 2$. b) Funcția F este derivabilă și $F'(x) = \frac{1}{2-\sin x} > 0$, deci F este strict crescătoare. c) Deoarece $\frac{1}{2-\sin t} \geq \frac{1}{3}$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$, pentru $x > 0$, rezultă că $\int_0^x \frac{1}{2-\sin t}dt \geq \frac{x}{3}$. Deci, $F(x) \geq \frac{x}{3}$ și de aici deducem că $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$. **10.** Studiind variația funcțiilor f și g, obținem că $f(x) \geq 0$ și $g(x) \leq 0$, oricare ar fi ≥ 0. Din aceste inegalități obținem: $x - \frac{x^3}{3} \leq \operatorname{arctg} x \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$, $\forall x \geq 0$. Înlocuind pe x cu x^2, avem $x^2 - \frac{x^6}{3} \leq \operatorname{arctg} x^2 \leq x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Rezultă că $\int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3}\right)dx < \int_0^1 \operatorname{arctg} x^2 dx < \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5}\right)dx$. Cum $\int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3}\right)dx = \frac{2}{7}$ și $\int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5}\right)dx =$ $= \frac{117}{385} < \frac{31}{100}$, problema este rezolvată. **11.** a) Pentru $x \neq 1$, $f(x) = \frac{x^7 - 1}{x - 1} > 0$ ($x^7 - 1$ și $x - 1$ au același semn) și cum $f(1) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. b) Din relația $F'(x) = f(x) > 0$ rezultă că F este strict crescătoare, deci injectivă. Cum $F(1) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{7}$, înseamnă că ecuația considerată are soluția $x = 1$. c) Considerăm funcția $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = xf(x) - F(x)$. Avem $g'(x) = f(x) + xf'(x) - F'(x) = xf'(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \geq 0$, deci g este crescătoare. Drept urmare, $g(x) \geq g(0) = 0$, oricare ar fi $x \geq 0$, de unde rezultă că $xf(x) \geq F(x)$, oricare ar fi $x \geq 0$. **12.** a) Cum $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{k^2}$, oricare ar fi $k \leq x \leq k+1$, rezultă că $\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2}dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq$ $\leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2}dx$, de unde obținem $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$. b) Cum $\int_1^n f(x)dx = 1 - \frac{1}{n}$, limita cerută este egală

Scanned with OKEN Scanner

cu 1. c) Şirul (a_n) este strict crescător şi cum $a_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \le f(1) + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \ldots +$ $+ \int_{n-1}^{n} f(x)dx = f(1) + \int_1^n f(x)dx = 2 - \frac{1}{n} \le 2$, şirul este mărginit superior. În concluzie, şirul (a_n) este convergent. **13.** a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. b) Pentru $x \in \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avem $\cos^n x \ge \cos^{n+1} x$, de unde obţinem $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \ge \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x\,dx$, deci $I_n \ge I_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. c) Folosind formula de integrare prin părţi, deducem că $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)' \cos^{n-1} x\,dx = \sin x \cdot \cos^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (n-1)\cos^{n-2} x \sin x\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\,dx =$ $= (n-1)(I_{n-2} - I_n)$, deci $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, $n \ge 2$, de unde rezultă că $nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2}$. Aşadar, şirul $(nI_nI_{n-1})_{n>1}$ este constant. Astfel, obţinem $nI_nI_{n-1} = I_1I_0 = \frac{\pi}{2}$, oricare ar fi $n \ge 1$. **14.** a) Deoarece $\int_{-2}^{a} |f(x)|\,dx = \int_a^2 |f(x)|\,dx =$ $= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |f(x)|\,dx$, rezultă că $\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{a} = \frac{1}{2}\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}$, deci $4a - \frac{a^3}{3} = 0$ şi, cum $a \in (-2, 2)$, obţinem $a = 0$.

b) Ecuaţia $f(x) = b$ are soluţiile $x_{1,2} = \pm\sqrt{4-b}$. Condiţia din enunţ devine: $\int_{-\sqrt{4-b}}^{\sqrt{4-b}} (f(x) - b)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx$ sau $\frac{4}{3}(4-b)\sqrt{4-b} = \frac{16}{3}$ sau $(4-b)^3 = 16$, de unde rezultă că $b = 4 - \sqrt[3]{16}$. c) Pentru $b = 4 - \sqrt[3]{16}$ cele patru arii formate sunt egale cu $S_1 = \int_{-\sqrt{4-b}}^{0} (f(x) - b)dx$; $S_2 = \int_0^{\sqrt{4-b}} (f(x) - b)dx$; $S_3 = \int_{-2}^{0} f(x)dx - S_1$ şi $S_4 = \int_0^2 f(x)dx - S_2$. Rezultă că $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{8}{3}$. **15.** b) În integrala $\int_1^3 g(x)dx$ facem schimbarea de variabilă $u = g(x)$, deci $f(u) = x$, $dx = f'(u)du$. Pentru $x = 1$ rezultă $u = g(1)$, deci $f(u) = 1$ şi $u = 0$; dar pentru $x = 3$ rezultă $u = g(3)$, deci $f(u) = 3$ şi $u = 1$. Astfel, $\int_1^3 g(x)dx = \int_0^1 uf'(u)du = uf(u)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(u)du = f(1) - \int_0^1 f(u)du$. Rezultă că $\int_0^1 f(x)dx +$ $+ \int_1^3 g(x)dx = f(1)$. c) Considerăm funcţia $F : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $F(\alpha) = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{\alpha} g(x)dx - \alpha\frac{1}{2}$. Cum $F'(\alpha) =$ $= g(\alpha) - 1 \le 0$, rezultă că F este descrescătoare pe $[1, 3]$. Din $\alpha \le 3$ rezultă $F(\alpha) \ge F(3)$ şi, cum $F(3) = 0$ (conform b)), concluzia se impune. **16.** a) Fie F o primitivă a funcţiei f. Atunci $F'(x) = \ln(1 + \sin^2 x) \ge 0$, deci F este crescătoare pe $\mathbb{R}$. b) Cu schimbarea de variabilă $\sin x = y$, integrala devine $\int_0^0 \ln(1+y^2)dy = 0$. c) Dacă F este primitiva lui f, atunci $g(x) = F(\arcsin x) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ şi $g'(x) = F'(\arcsin x)(\arcsin x)' = f(\arcsin x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$ $= \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. **17.** a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = (x - \ln(x+1))\Big|_0^1 = 1 - \ln 2$. b) $I_n = \int_0^1 x(\ln(1+x^n))'dx = x\ln(1+x^n)\Big|_0^1 -$ $- \int_0^1 \ln(1+x^n)dx = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$. c) Avem $0 \le \ln(1+t) \le t$, $\forall\, t \ge 0$. Deci, $0 \le \ln(1+x^n) \le x^n$, $\forall\, x \in [0, 1]$.

Scanned with OKEN Scanner

De aici rezultă că $0 \le \int_0^1 \ln(1+x^n)dx \le \frac{1}{n+1}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx = 0$. Astfel deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \ln 2$.

18. b) Funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = f(t)\cos t$ este continuă, deci admite primitive. Fie F o primitivă a sa. Rezultă că $g(x) = F(x) - F(-x)$; g este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $g'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x)\cos x + f(-x)\cos(-x) =$

$= \cos x\left(\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) = \cos x$. Din studiul semnului lui $\cos x$ pe $[0, \pi]$, rezultă că g este crescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ și descrescătoare pe $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. c) Cum $g'(x) = \cos x$, rezultă că $g(x) = \sin x + C$, și cum $g(0) = 0$, rezultă că $g(x) = \sin x$. Deci $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. **19.** a) $\frac{\pi}{4}$. b) Cu substituția $t = \frac{1}{y}$, avem $\int_x^1 f(t)dt = \int_1^{\frac{1}{x}} f\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{-1}{y^2}dy =$

$= -\int_x^1 \frac{y^5}{(1+y^2)(1+y^3)}\cdot\frac{1}{y^2}dy = \int_1^x y^3 f(y)dy$. c) Folosind punctul b) deducem că $\int_x^{\frac{1}{x}} f(t)dt = \int_1^{\frac{1}{x}} f(t)dt +$

$+ \int_1^x f(t)dt = \int_1^x t^3 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt = \int_1^x (t^3+1)f(t)dt = \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}$, deci limita cerută este $\frac{\pi}{4}$. **20.** a) $f_2(x) =$

$= \int_0^x (t-\sin t)dt = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1$. b) Pentru $n = 0$, relația devine $f_1(x) = x - \sin x$. Din $f_{2n-1} = \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!} +$

$+ \ldots + (-1)^{n-1}\sin x$, rezultă că $f_{2n}(x) = \int_0^x f_{2n-1}(t)dt = \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots + (-1)^{n+1}\cos x + (-1)^{n+2}$ și $f_{2n+1}(x)$

$= \int_0^x f_{2n}(t)dt = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots + (-1)^n x + (-1)^{n+1}\sin x$, deci relația are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}$. c) Se arată prin inducție că $0 \le f_n(x) \le 2\cdot\frac{x^n}{n!}$ și, cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$, $x > 0$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Folosind b), rezultă concluzia problemei.

Scanned with OKEN Scanner

Teste pentru Bacalaureat 2015, după modelul M.E.N.

Testul 1

I. 1. -2. 2. $(2, 1)$. 3. $x \in \{0, 3\}$. 4. 6. 5. $m = 5$. 6. $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$. II. 1. c) $x \in \{1, 2\}$. 2. b) $a = 3$. c) $x = 1$.

III. 1. b) $y = \frac{1}{2}x$. c) Funcția $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 1$ este continuă pe $[1, 2]$ și $g(1) \cdot g(2) = \frac{e-3}{3} \cdot \frac{e^2-2}{2} < 0$. Deci, există $c \in (1, 2)$ astfel încât $g(c) = 0$, adică $f(c) = 1$. 2. c) Deoarece $0 \le \frac{x^n}{1+x^n} \le x^n$, $\forall x \in [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Testul 2

I. 1. 36. 2. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$. 3. $x \in \{0, 1\}$. 4. 0,2. 5. 4. 6. 8. II. 1. b) $a \in \{-2, 2\}$. c) $x = y = z = 1$. 2. a) $m + 2$. b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 2^2 - 2 \cdot 3 = -2$. c) -6. 2. b) $y = 0$. c) $f'(e) = 0$, $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, e)$, $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (e, \infty) \Rightarrow f(x) \le f(e) = \frac{1}{e}$ pentru orice $x \in (0, \infty)$. 3. b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2+x+1} dx$ și $\frac{x^n(x-1)}{x^2+x+1} \le 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in [0, 1]$. c) $a = 1$.

Testul 3

I. 1. 8. 2. $\Delta = 0$, deci parabola asociată funcției f este tangentă axei Ox. 3. $x = 2$. 4. 12. 5. $y = -2x - 2$. 6. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$. II. 1. b) $n = 2$. c) $p = q = 0$ sau $p = q = 2$. 2. a) $f(0) = 2$. b) $c = X + 1$, $r = X + 6$. c) $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 2(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 6(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 2 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-3) = 20$. III. 1. a) $f'(x) = 3 + e^x$. b) $y = 3x$. c) Fie funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 4x - 1$. Deoarece $g'(0) = 0$, $g'(x) < 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 0)$ și $g'(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$, rezultă că $g(x) \ge g(0) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. 2. b) $\int_0^1 (f(x) - x + 1) dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. c) $\lim\limits_{t\to 0} \left(\frac{1}{t^4} \int_0^t f(x) dx\right) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t)}{4t^3} = \frac{1}{4}$.

Testul 4

I. 1. $a = 0$, $b = 1$. 2. $(2, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 8)$. 3. $x = 1$. 4. 0,8. 5. $y = \frac{1}{3}x - 2$. 6. $x = \frac{\pi}{4}$. II. 1. b) $(A(-1))^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. c) $(0, 2)$, $(2, 0)$. 2. b) 1. c) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$. III. 1. a) $y = x + 1$. b) $y = -2x + 10$. c) e. 2. a) $1 - \ln 2$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $I_{n+1}+I_n=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$. c) $I_{n+1}-I_n\le 0$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow 2I_{n+1}\le\frac{1}{n+1}\le 2I_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{1}{2}\le(n+1)I_n\le\frac{n+1}{2n}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}, n\ge 2\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)I_n=\frac{1}{2}$.

Testul 5

I. 1. $a=0, b=-1$. 2. $V(-2,-16)$. 3. $x=4$. 4. 0,01. 5. 20. 6. $4\sqrt{2}$. II. 1. b) $x=1$. c) Dacă $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, atunci relația considerată devine $\begin{cases}x+y+2z=0\\2x+y+z=0\\x-z=0\end{cases}$. Acest sistem are o infinitate de soluții, deoarece este omogen și are determinantul egal cu zero. 2. a) $f(-1)=0$. b) $m=1$. c) $m\in(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$. III. 1. a) $f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$. b) $y=x+\frac{1}{2}$. c) f este descrescătoare pe $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ și crescătoare pe $\left[-\frac{1}{2},\infty\right)$. 2. a) $I_1=e-2$. b) $I_{n+1}=$ $=\int_0^1(1-x)^{n+1}(e^x)'dx=(1-x)^{n+1}e^x\Big|_0^1-\int_0^1\left((1-x)^{n+1}\right)'e^x\,dx=-1+(n+1)I_n$. c) Inducție.

Testul 6

I. 1. $q=3$. 2. $x_v=3, y_v=-1$. 3. $x=0$. 4. $\frac{1}{15}$. 5. $AC=10$. 6. $\sin A=1$. II. 1. a) $\det\left(A(1)\right)=-1$. b) $m=1$. 2. a) $3\circ 4=4$. c) $x=5$. III. 1. b) $y=1$. c) Deoarece $f'(1)=0, f'(x)\le 0$, oricare ar fi $x\in(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, oricare ar fi $x\in[1,\infty)$, rezultă că $f(x)\ge f(1)=\frac{e}{e+1}$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$. 2. a) $I_0=\frac{1}{2}$. b) $I_{n+1}-I_n=$ $=\int_0^1 xe^{-nx^2}\left(e^{-x^2}-1\right)dx\le 0$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$. c) $I_n=-\frac{1}{2n}\int_0^1\left(e^{-nx^2}\right)'dx=-\frac{1}{2n}e^{-nx^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$.

Testul 7

I. 1. $a=19\in\mathbb{R}$. 2. 210. 3. $x=1$. 4. 2000. 5. $a=7$. 6. $x=\frac{\pi}{4}$. II. 1. c) $n=3$. 2. b) $m=-2$. c) $m=0, f(3)=0$. III. 1. a) $f'(x)=x-\sin x$. b) $y=1$. c) $f''(x)\ge 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'$ este crescătoare pe $\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)\le 0$, pentru $x\le 0$ și $f'(x)\ge 0$, pentru $x\ge 0\Rightarrow f(x)\ge f(0)=1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. 2. a) $I_1=1$. b) $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}\left(e^x\right)'dx=x^{n+1}e^x\Big|_0^1-(n+1)I_n=e-(n+1)I_n$. c) Din relația $x^n\le x^ne^x\le x^ne$, $x\in[0,1]$, $n\in\mathbb{N}^*$, rezultă că $\int_0^1 x^n dx\le\int_0^1 x^ne^x dx\le e\int_0^1 x^n dx, n\in\mathbb{N}^*$, deci $1\le(n+1)I_n\le e, n\in\mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 8

I. 1. $x=1$. **2.** $|x_1-x_2|=2$. **3.** $x=0$. **4.** 6 numere. **5.** $|\vec{v}|=15$. **6.** $\sin A=1$. **II. 1.** a) $\det(A(0))=2$. b) $a=2$. c) $(A(\mathbb{Q}))^{-1}=\frac{1}{4}(5I_3-A(2))$. **2.** a) $f(2)-f(-2)=28$. b) $f(-2)=-19$. c) $m\in\{-3,\ 0,\ 3\}$. **III. 1.** a) $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$. b) $f'(x)<0$, oricare ar fi $x\in(-1,\ 1)$. c) $x=0$. **2.** a) $I_0=e^2-e$. b) $I_1=xe^x\Big|_1^2-\int_1^2 e^x dx=e^2$. c) $I_{n+1}=\int_1^2 x^{n+1}(e^x)'dx=x^{n+1}e^x\Big|_1^2-(n+1)I_n=2^{n+1}e^2-e-(n+1)I_n$.

Testul 9

I. 1. $n=6\in\mathbb{N}$. **2.** $m\in(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$. **3.** $x=1$. **4.** $p=\frac{1}{16}$. **5.** $AC=13$. **6.** $2\cos b=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-a\right)=$ $=\cos a+\sqrt{3}\sin a$. **II. 1.** a) $D(-1,\ 2)=14$. b) $q=-\frac{1}{2}$. c) $D(x,\ y)=D(y,\ x)\Leftrightarrow(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2-8)=0$. Se poate alege $x=0$ şi $y=2\sqrt{2}$. **2.** a) $m=-6$. b) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2\in\mathbb{Z}$. c) $a=2$, $b=-1$, $c=0$, $d=-1$. **III. 1.** a) $f'(0)=0$. b) Cum $f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ şi f este continuă pe $[0,\infty)$, rezultă că ecuaţia dată are cel puţin o soluţie în $(0,\infty)$. Soluţia este unică, pentru că f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$, $(f'(x)>0,\ x>0)$. c) Din egalitatea $e^{x_n}=n+x_n$, rezultă că $e^{x_n}>n$ (căci $x_n>0$, oricare ar fi $n\geq 2$), deci $x_n>\ln n$, de unde obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$. **2.** a) $\mathcal{A}(S)=1$. b) $\mathcal{V}(S)=\frac{\pi^2}{4}$. c) Efectuând schimbarea de variabilă $t=kx$, obţinem $\int_0^{2\pi}f^n(kx)dx=\frac{1}{k}\int_0^{2k\pi}\cos^n t dt=\frac{1}{k}\left(\int_0^{2\pi}\cos^n t dt+\int_{2\pi}^{4\pi}\cos^n t dt+\ldots+\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}\cos^n t dt\right)=$ $=\frac{1}{k}\left(k\int_0^{2\pi}\cos^n t dt\right)=\int_0^{2\pi}f(x)dx$.

Testul 10

I. 1. $\log_2(\sqrt{7}+\sqrt{3})+\log_2(\sqrt{7}-\sqrt{3})=\log_2(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})=\log_2 4=2$. **2.** **3.** **3.** $x=0$. **4.** **5.** **5.** $3x+2y-15=0$. **6.** 30°. **II. 1.** b) $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 1,\ -3\}$. c) $x=-\frac{1}{9}$, $y=-\frac{4}{9}$, $z=-\frac{1}{9}$. **2.** b) $f=(X^4+\hat{1})(X^4+\hat{3})$. c) $f(a)=\hat{3}$, oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}_5$. **III. 1.** a) 1. b) $y=2x$. c) Deoarece funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, rezultă că f este funcţie surjectivă, deci ecuaţia are soluţie. Cum $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, rezultă că f este funcţie injectivă, deci soluţia este unică. **2.** a) $\frac{e-1}{2}$. c) $\frac{e-1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 11

I. 1. 2. 2. $(-1,-1),(-2,0)$. 3. $(-\infty,1]$. 4. $\frac{2}{5}$. 5. $a=1$. 6. $\cos A=-\frac{1}{5}$. II. 1. a) $\det A=3m-6$. b) $m\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$. c) $(1,1,-1)$. 2. a) $X(p)\cdot X(q)=X(p+q+pq)\in G$, pentru că $p+q+pq\neq -1,\forall p,q\neq -1$. b) Inversul elementului $X(p)\in G$ este $X\left(-\frac{p}{p+1}\right)\in G$. c) $X(1)$. III. 1. a) $f'(x)=3x^2-12\geq 0,\forall x\in[2,\infty)$. b) ∞. c) $a\in(-16,16)$. 2. a) $F'(x)=f(x)>0,\forall x\in(-1,\infty)$. b) $\ln 3$. c) 2.

Testul 12

I. 1. -3. 2. $a=2$. 3. $g(5)=1$. 4. $\frac{5}{16}$. 5. $M(3,6)$. 6. $x=\frac{\pi}{4}$. II. 1. a) 12. b) $x=0$ sau $x=1$. c) $D(a,b,c)=$ $=6(b-a)(c-a)(c-b)=0\Leftrightarrow a=b$ sau $b=c$ sau $c=a$. 2. a) $\hat{0}$. b) $p=\left(X+\hat{1}\right)\left(X+\hat{2}\right)\left(X+\hat{4}\right)$. c) Cum $f\left(\hat{1}\right)=f\left(\hat{3}\right)$, rezultă că $\operatorname{Im} f$ nu are cinci elemente, deci f nu este surjectivă. III. 1. a) $f'(x)=\frac{3-9x}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}$. b) $y=1$. c) $\operatorname{Im} f=\left(-1,2\sqrt{7}\right]$. 2. a) $F'=f$. b) 1. c) $(p+1)\int_1^x f^p(t)\,dt=\int_1^x t\left(\ln^{p+1}t\right)'dt=t\ln^{p+1}t\Big|_1^x-$ $-\int_1^x \ln^{p+1}t\,dt=xf^{p+1}(x)-\int_1^x f^{p+1}(t)\,dt$.

Testul 13

I. 1. $m=-4$. 2. $x_v=\frac{3}{2},y_v=-\frac{1}{4}$. 3. $x\in(0,1)$. 4. $\frac{5}{18}$. 5. $a=3$. 6. $R=\frac{25}{8}$. II. 1. a) 1. c) $x=\frac{k\pi}{1006},k\in\mathbb{Z}$. 2. a) $x\circ\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\circ x=x,\forall x\in G$. b) $x'=1-x\in G,\forall x\in G$. c) f este funcție bijectivă și $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y)=$ $=\frac{(x-1)(y-1)}{xy},\forall x,y\in G$. III. 1. a) 0. b) $f'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}>0,\forall x\in\mathbb{R}$. c) $g'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}}>0,\forall x>0$. 2. a) 1. b) $\frac{1}{3}$. c) $J_{2n}-J_{2n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\cos^2x\,dx\overset{\sin x=t}{=}\int_0^1 t^{2n}\sqrt{1-t^2}\,dt=I_{2n}$.

Testul 14

I. 1. $Card\,A=49$. 2. $(2,3),\left(\frac{1}{2},0\right)$. 3. $x_1=0,x_2=1,x_3=-4$. 4. 50. 5. $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$. 6. $\sin x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. II. 1. a) $\Delta=-\left(m^3-1\right)^2$, $m=1$. b) Dacă sistemul ar avea o soluție cu toate componentele strict pozitive, atunci $\Delta=0$, deci $m=1$. În acest caz, sistemul se reduce la ecuația $x+y+z=0$, care nu are soluție în mulțimea numerelor reale strict pozitive. c) Dacă $m=1$, atunci $rang\,A=1$, iar dacă $m\neq 1$, atunci $rang\,A=3$. 2. a) $(x*y)*z=x*(y*z)=\frac{1}{4}(x-1)(y-1)(z-1)+1$. b) $e=-1$. c) $x=3$. III. 1. a) -1. b) $f'(x)=3x^2-3\leq 0$,

Scanned with OKEN Scanner

$\forall x \in [-1,1]$. c) $m \in (0,4)$. 2. a) $\frac{8}{15}$; b) Şirul este descrescător şi mărginit inferior de 0. c) Deoarece $I_n = x\left(1-x^2\right)^n\Big|_0^1 -$ $-n\int_0^1 x\left(1-x^2\right)^{n-1}(-2x)dx = -2n\int_0^1\left[\left(1-x^2\right)-1\right]\left(1-x^2\right)^{n-1}dx = -2nI_n + 2nI_{n-1}$, rezultă că $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$.

Testul 15

I. 1. $q=2$. **2.** $a \in \{-1, 1\}$. **3.** $x \in (-\infty, 0)$. **4.** Sunt 6 termeni raţionali. **5.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$. **6.** 10. **II. 1.** b) Deoarece $\left(A^n\right)^2 = A^{2n} = \left(A^2\right)^n = A^n$ rezultă că $A^n \in H$. c) Matricele $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci mulţimea H este infinită. **2.** a) -2^{10}. b) Cum $f = \sum_{k=0}^{10}\left(C_{10}^k X^{10-k} i^k + C_{10}^k X^{10-k}(-i)^k\right) = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k X^{10-k} i^k \left(1+(-1)^k\right)$, rezultă că $a_{2p+1} = 0 \in \mathbb{R}$, pentru orice $p \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ şi $a_{2p} = C_{10}^{2p} i^{2p}\left(1+(-1)^{2p}\right) = 2C_{10}^{2p}(-1)^p \in \mathbb{R}$, pentru orice $p \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. c) Dacă z este o rădăcină a polinomului f, atunci $(z+i)^{10} = -(z-i)^{10}$, de unde obţinem $|z+i| = |z-i|$, ceea ce înseamnă că punctul de afix z este egal depărtat de punctele de afixe $-i$ şi i, deci aparţine axei reale. **III. 1.** a) 75. b) Deoarece $f''(x) = 20x^3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că f are un singur punct de inflexiune, $x=0$ (derivata a doua se anulează în acest punct şi îşi schimbă semnul). c) Considerăm funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - m$. Derivata ei, $h'(x) = 5\left(x^4-1\right)$, are două rădăcini reale, -1 şi 1. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$, $h(-1) = 8-m > 0$, $h(1) = -m < 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \infty$, rezultă, conform teoremei lui Rolle, că ecuaţia $h(x) = 0$ are exact trei soluţii reale distincte. **2.** a) $\frac{e-1}{e}$. b) $\frac{e-2}{3e}$. c) Cum $I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} e^{-x^3} dx \geq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că şirul este crescător. Din relaţia $0 \leq I_n \leq \int_1^n e^{-x}dx = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^n} < \frac{1}{e}$, valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că şirul este mărginit. Deci, şirul este convergent.

Testul 16

I. 1. Cum $\sqrt{2} = 1{,}4\ldots$ şi $\sqrt{5} = 2{,}2\ldots$, rezultă că $\left(\sqrt{2}, \sqrt{5}\right) \cap \mathbb{Z} = \{2\}$. **2.** $m = -4$. **3.** $x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \pi\right\}$. **4.** $n = 4$. **5.** $a = -\frac{1}{2}$. **6.** Egalitatea din enunţ este echivalentă cu $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = 2$, de unde obţinem $2\sin x \cdot \cos x = 1$, deci $\sin 2x = 1$. **II. 1.** b) Prin calcul, se arată că $\left(A(x) - A(y)\right)^3 = O_3$. c) $\left(A(x)\right)^{-1} = A(-x)$. **2.** a) $f(-1) = 0$. b) Dacă $x_1 = a+bi$ şi $x_2 = a-bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ sunt rădăcinile complex conjugate ale lui f, atunci $p = -(x_1 + x_2) = -2a \in \mathbb{R}$ şi $q = x_1 x_2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$, iar ecuaţia $x^2 + px + q = 0$, cu $p, q \in \mathbb{R}$, are rădăcini complex conjugate dacă şi numai dacă $\Delta < 0$, adică $p^2 < 4q$. c) Polinomul $f = (X+1)\left(X^2 - \alpha X + \alpha + (\alpha-2)i\right)$ are două rădăcini distincte, complex conjugate, dacă şi numai dacă polinomul $g = X^2 - \alpha X + \alpha + (\alpha-2)i$ are

Scanned with OKEN Scanner

două rădăcini distincte, complex conjugate, ceea ce, conform punctului b), implică $\alpha\in\mathbb{R}$ și $\alpha+(\alpha-2)i\in\mathbb{R}$, de unde rezultă că $\alpha=2$, care satisface condiția impusă. **III. 1.** a) $f'(x)=-\frac{2}{x^2-1}<0$, oricare ar fi $x>1$. b) Dreapta cu ecuația $x=1$ este asimptotă verticală, iar dreapta cu ecuația $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$. c) $\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=2$. **2.** a) $-\frac{1}{2}$. b) $A=\int_1^2\left|\frac{f(x)}{x}\right|dx=-\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=\frac{3}{2}-2\ln 2$.

c) $\int_1^2 f^n(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2(2x-3)'f^n(x)dx=\frac{1}{2}(2x-3)f^n(x)\Big|_1^2-\int_1^2(2x-3)^2nf^{n-1}(x)dx=-\frac{n}{2}\int_1^2(4x^2-12x+8+1)\cdot f^{n-1}(x)dx=-\frac{4n}{2}\int_1^2 f^n(x)dx-\frac{n}{2}\int_1^2 f^{n-1}(x)dx$, de unde rezultă concluzia problemei.

Testul 17

I. 1. $|z|=65$. **2.** $a=-4$, $b=7$, $f(3)=4$. **3.** $x=9$. **4.** $n\in\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$. **5.** $C(2,-2)$. **6.** $r=\frac{4}{3}$.

II. 1. a) $\det(A)=11-4a$. b) Pentru orice $a\in\mathbb{Z}$, avem $\det(A)=11-4a\neq 0$, deci $rang(A)=3$. c) Dacă A^{-1} are toate elementele întregi, atunci, din relațiile $\det(A),\det(A^{-1})\in\mathbb{Z}$ și $A\cdot A^{-1}=I_3$, deducem că $\det(A)\in\{-1,1\}$, deci $a=3$. Reciproc, dacă $a=3$, atunci A^{-1} are toate elementele întregi. **2.** a) $a+b+c=3$. b) $c=-12$. c) Dacă polinomul f ar avea toate rădăcinile reale, atunci, din egalitatea $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=a^2-2b=0$, obținem $x_1=x_2=x_3=x_4=0$, deci $x_1x_2x_3x_4=0$, ceea ce este în contradicție cu relația $x_1x_2x_3x_4=36$. **III. 1.** a) Întrucât $f'(x)=\frac{4(x^4-1)}{x}\leq 0$, oricare ar fi $x\in(0,1]$ și egalitatea are loc numai pentru $x=1$, rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe $(0,1]$. b) $x=0$. c) Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=\infty$, $f(1)=1$ și f este continuă, rezultă că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, există $x_n\in(0,1]$ astfel încât $f(x_n)=n$. Unicitatea este o consecință a faptului că f este strict descrescătoare pe $(0,1]$ **2.** a) $A=1$. b) 0. c) Șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător și mărginit inferior de 0.

Testul 18

I. 1. $|z|=2$. **2.** $\operatorname{Im}f=\left[\frac{3}{4},\infty\right)$. **3.** $b_1=\frac{3}{2}$, $q^2=4$, $b_7=96$. **4.** $x=\frac{9}{8}$. **5.** $y=2x-4$. **6.** $\cos x=-\frac{1}{3}$. **II. 1.** a) O_3. c) $(A(x))^{-1}=A(-x)$. **2.** a) $e=\frac{1}{2}$ este element neutru pentru legea considerată. b) Orice element $x\in G$ are simetricul $x'=1-x\in G$. c) Funcția f este bijectivă și $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, oricare ar fi $x,y\in G$. **III. 1.** a) $f'(5)=6$. b) e^4. c) Funcția f este continuă pe intervalele [2, 3], [3, 4], [4, 5], derivabilă pe intervalele (2, 3), (3, 4), (4, 5) și $f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=1$. Deci, conform teoremei lui Rolle, există $x_1\in(2,3),x_2\in(3,4),x_3\in(4,5)$ astfel încât $f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)=0$. De aici, având în vedere că f' este funcție polinomială de gradul al treilea, deducem că ecuația $f'(x)=0$ are exact trei rădăcini reale.

Scanned with OKEN Scanner

2. a) $I_0=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$. b) $I_2-I_0=\frac{10}{3}-\frac{\pi}{2}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. c) Deoarece X^2+1 divide pe $\left(X^2+X+1\right)^{4n+1}-X$, rezultă că $\frac{\left(X^2+X+1\right)^{4n+1}-X}{X^2+1}=g$, unde $g\in\mathbb{Z}[X]$. Aşadar $I_{4n+1}=\int_0^1 g(x)dx\in\mathbb{Q}$.

Testul 19

I. 1. $2\sqrt[3]{6}<3\sqrt[3]{3}$. 2. $\operatorname{Im} f=[0,\infty)$. 3. $m\in\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$. 4. Sunt 11 termeni raţionali. 5. $a=-\frac{9}{2}$. 6. $P=\frac{2}{5}$.

II. 1. a) $A^3=aI_3$, $A^{2010}=\left(A^3\right)^{670}=a^{670}I_3$. b) $\det(B_1)=a(a-1)^2=0$ dacă şi numai dacă $a\in\{0,1\}$. c) Deoarece $\det(B_n)=a^n(a-1)^2$, rezultă că B_n este inversabilă dacă şi numai dacă $a\in\mathbb{R}-\{0,1\}$. 2. a) Se observă că $x*y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+m-6$. Dacă $m=6$, atunci $x*y\in M$, oricare ar fi $x,y\in M$. Dacă $m\neq 6$, atunci $0,\ \frac{2m-3}{6}\in M$, iar $0*\frac{2m-3}{6}=\frac{3}{2}\notin M$. Deci, $m=6$. b) Elementul neutru este 2, iar simetricul oricărui element $x\in M$ este $x'=\frac{3x-4}{2x-3}\in M$. c) Funcţia f este bijectivă şi $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, oricare ar fi $x,y\in M$.

III. 1. a) $y+2=0$. b) $y=0$. c) e^{-1}. 2. a) $\frac{1}{2}$. b) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{x^2+x+1}dx\le 0$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. c) Din relaţia $0\le I_n\le\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

Testul 20

I. 1. 0. 2. $m=3$. 3. $x\in\{-2,2\}$. 4. $x=4$. 5. $x-y+1=0$. 6. $\cos x=\frac{4}{5}$. II. 1. a) O_2. b) $\det(A)=0=\det(A+I_2)$. c) O_2. 2. a) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=4$. b) 0. c) $\Delta=-1$.

III. 1. a) $f'(x)=\frac{16x}{(x^2+4)^2}$. b) $y=1$. c) Deoarece f este crescătoare pe $[1,2]$ şi $f(1)=-\frac{3}{5}$, $f(2)=0$, rezultă că $-\frac{3}{5}\le f(x)\le 0$, $(\forall)\,x\in[1,2]$. 2. a) 2010. b) $\frac{3\pi}{2}$. c) $\int_1^2 f^{2010}(x)dx\le\int_1^2(1+x)^{2010}dx=\frac{3^{2011}-2^{2011}}{2011}$.

Testul 21

I. 1. 1. 2. $f'=3x^2+1>0$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}$. 3. $x=\frac{9}{4}$. 4. $\frac{5}{36}$. 5. $2\sqrt{19}$. 6. $\frac{1}{2}$. II. 1. a) $\det(A)=\det(B)=2$. c) Conform punctului b), $A^2=3A-2I_2$ şi $B^2=3B-2I_2$. Notăm cu $P(n)$ propoziţia care trebuie demonstrată. Observăm că $P(1)$, $P(2)$ sunt adevărate şi presupunem că $P(k)$, $P(k+1)$ $(k\in\mathbb{N}^*)$ sunt adevărate. Cum $A^{k+2}-B^{k+2}=3(A^{k+1}-B^{k+1})-2(A^k-B^k)=3(2^{k+1}-1)(A-B)-2(2^k-1)(A-B)=(2^{k+2}-1)(A-B)$, rezultă că $P(k+2)$ este

Scanned with OKEN Scanner

adevărată. **2.** a) $\frac{n(n+1)}{2}$. b) $4X+6$. c) Din relația $f(X)=(X^2-1)c(X)+aX+b$, obținem $f(-1)=-a+b=\frac{n}{2}$ și $f(1)=a+b=\frac{n(n+1)}{2}$, de unde rezultă că $a=\frac{n^2}{4}$, $b=\frac{n(n+2)}{4}$. **III. 1.** a) $f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}>0$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$. b) $y=2x+1$. c) $f''(x)=\frac{-2}{\left(x^2+2\right)^{3/2}}<0$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$. **2.** a) $e-2$. b) Șirul este descrescător și mărginit inferior de 0. c) Deoarece $I_n=e-nI_{n-1}$, $(\forall)\,n\geq 2$, rezultă că $\frac{I_n}{n}=\frac{e}{n}-I_{n-1}$, de unde, având în vedere că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent, obținem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.

Testul 22

I. 1. 0. **2.** $V(1,\,2)$. **3.** $x\in\{-1,\,1\}$. **4.** $A_4^3=24$. **5.** $\vec{w}(3,-5)$. **6.** $h=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{12}{5}$. **II. 1.** a) I_2. b) $A^{-1}=A-I_2$. c) $X=\begin{pmatrix}2009 & 2010\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. **2.** a) $\hat{2}$. b) $\hat{0},\hat{2}$. c) $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})=\hat{2}=g(\hat{0})+g(\hat{1})+g(\hat{2})$, $(\forall)\,a\in\mathbb{Z}_3$. **III. 1.** a) $f'(x)=(2x+x^2)e^x$. b) Deoarece $f'(x)\leq 0,(\forall)x\in[-2,\,0]$, rezultă că f este descrescătoare pe $[-2,\,0]$. c) Dacă $x\in[-1,\,0]$, atunci $f(0)\leq f(x)\leq f(-1)$ (pentru că f este descrescătoare pe $[-1,\,0]$) și $f(0)\leq f(x^2)\leq f(1)$, căci f este crescătoare pe $[0,\,1]$ și $x^2\in[0,\,1]$). Adunând aceste două relații, obținem $0\leq f(x)+f(x^2)\leq\frac{e^2+1}{e}$, $(\forall)\,x\in[-1,\,0]$. **2.** a) 4. b) $V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\frac{29\pi}{6}$. c) $\frac{e^2+3}{4}$.

Testul 23

I. 1. 16. **2.** $f(-x)=-f(x)$, $(\forall)\,x\in(-3,\,3)$. **3.** $x\in\{-3,-2,-1,0,1\}$. **4.** În A sunt 25 de numere divizibile cu 5, 20 de numere divizibile cu 4, 5 numere divizibile cu 4 și cu 5. Deci, mulțimea A conține 40 (= 25 + 20 − 5) de numere divizibile cu 4 sau cu 5. **5.** $Q(3,1)$. **6.** $AD=\frac{2\mathcal{A}_{ABC}}{BC}=\frac{4\sqrt{14}}{5}$. **II. 1.** a) $\det(A)=0$ și $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=7\neq 0$. b) $(x,y,z)\in\left\{(2\alpha-3,\,31-3\alpha,\,\alpha)\,\middle|\,\alpha\in\mathbb{R}\right\}$. c) Din condițiile $x=2\alpha-3\geq 0$, $y=31-3\alpha\geq 0$, $z=\alpha\geq 0$ și $x,\,y,\,z\in\mathbb{N}$, obținem $\alpha\in\left[\frac{3}{2},\frac{31}{3}\right]\cap\mathbb{N}=\{2,3,4,\ldots,10\}$. Deci, sistemul are 9 soluții în $\mathbb{N}^3$. **2.** a) 25. b) $M=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{3}\\ -\hat{3} & \hat{1}\end{pmatrix}$. c) Căutăm $X=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}\in A$, astfel încât $X^2=I_2$. Efectuând calculele, obținem $x^2-y^2=\hat{1}$ și $xy=\hat{0}$, de unde rezultă că $(x,y)\in\left\{(\hat{0},\hat{2}),(\hat{0},\hat{3}),(\hat{1},\hat{0}),(\hat{4},\hat{0})\right\}$. **III. 1.** a) $y=\frac{\pi}{4}$. b) $f'(x)=\frac{1}{2x^2+2x+1}>0,(\forall)x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty,-1)$ și pe $(-1,\infty)$. c) $f''(x)=\frac{-2(2x+1)}{\left(2x^2+2x+1\right)^2}$. Funcția are un singur

Scanned with OKEN Scanner

punct de inflexiune, $x=-0,5$. **2.** a) Deoarece $I_n=2-\ln\frac{n+1}{n}$, rezultă că $I_{n+1}-I_n=\ln\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}>0,(\forall)n\in\mathbb{N}^*$, deci $(I_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. b) $1<I_n<2,n\in\mathbb{N}^*$. c) $\lim\limits_{n\to\infty}n(2-I_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$.

Testul 24

I. 1. $a_1=-1, r=3, S_7=56$. **2.** $A(4, 7)$. **3.** $x\in\{-3,3\}$. **4.** 3600. **5.** $m\in\{-1,2\}$. **6.** $\cos x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **II. 1.** a) $\det(A)=$ $=m^2-2m+1$. b) $x=1, y=-1, y=3$. c) Scăzând ultimele două ecuații, obținem $0=3$. **2.** a) $x*(y*z)=(x-4)(y-4)(z-4)+4=(x*y)*z,(\forall)x,y,z\in\mathbb{R}$. b) Dacă $x>4, y>4$, atunci $(x-4)\cdot(y-4)>0$, deci $x*y=(x-4)(y-4)+4>4$. c) 4. **III. 1.** a) $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}$. b) $y=\frac{7}{2}x-2$. c) $x=0$ este asimptota verticală a graficului funcției f, la stânga și la dreapta. **2.** a) $g'(x)=f(x),(\forall)x>0$. b) $8\ln 2-4$. c) $\frac{15}{16\ln 2}$.

Testul 25

I. 1. $\left(i\sqrt{2}-1\right)^2+2\left(i\sqrt{2}-1\right)+3=0$. **2.** $a<0$. **3.** $x=0$. **4.** 671. **5.** $y=4x-7$. **6.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **II. 1.** a) $x=0, y=1,$ $z=-1$. b) $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(\overline{A})=2$. c) $a\in\mathbb{R}-\left\{-1,\frac{1}{2},1\right\}$. **2.** a) $m=1,n=-5$. b) $m=3,n=1$. c) Dacă f ar avea o rădăcină $x_1\leq 0$, atunci, cum $x_1^3\leq 0, -3x_1^2\leq 0, mx_1\leq 0, -n<0$, rezultă că $0=f(x_1)<0$, ceea ce este fals.

III. 1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ și $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=0$. b) Deoarece $\lim\limits_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\infty$, rezultă că f nu este derivabilă în $x=-2$. c) **1. 2.** a) $\frac{\pi}{4}$. b) Dacă F este o primitivă a funcției f pe intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, atunci $F'(x)=\frac{\cos x}{2-\cos^2 x}\geq 0,(\forall)x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\left(\text{egalitatea are loc numai pentru } x=\frac{\pi}{2}\right)$, deci F este strict crescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. c) Fie $I=\int_0^{2\pi}xf(x)dx$. Dacă facem substituția $x=2\pi-y$, obținem $I=\int_0^{2\pi}(2\pi-y)f(2\pi-y)dy=$ $=\int_0^{2\pi}(2\pi-y)f(y)dy=2\int_0^{2\pi}f(y)dy-I=-I$. Deci, $I=0$.

Testul 26

I. 1. 1. 2. 0. **3.** $x=9$. **4.** $n=6$. **5.** $a\in\{1,2\}$. **6.** 1. **II. 1.** a) $\det(A)=-5$. b) $x=\frac{4}{5}, y=\frac{4}{5}, z=\frac{3}{5}$. c) $x=\frac{9}{5}a-1,$ $y=\frac{14}{5}a-2, z=\frac{13}{5}a-2, a=5$. **2.** a) 4018. b) $x\in[-2,1]$. c) A are un element. **III. 1.** b) $y=2$. c) Avem $f'(x)\leq 0,$ $(\forall)x\in(0,1]$ și $f'(x)\geq 0,(\forall)x\in[1,\infty)$, deci $f(x)\geq(1),(\forall)x>0$, de unde rezultă că $2\sqrt{x}-\ln x\geq 2,(\forall)x>0$.

Scanned with OKEN Scanner

2. a) $\int f_2(x)dx = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + x + C$. b) $A = \int_{01}^{1}(2x^2-2x+1)e^x dx = 3e - 7$. c) $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{2}{n+1} \geq$ $\geq \frac{2}{n+2} = \int_0^1 f_{n+1}(x)dx$.

Testul 27

I. 1. $\sqrt[4]{8} < \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$. 2. Fie d dreapta de ecuație $x = 1$. Deoarece $A(1, 0) \in G_f \cap d$, iar simetricul lui $M(0, 3) \in G_g$ față de dreapta d este $M'(2, 3)$, rezultă că simetrica dreptei $y = -3x + 3$ față de dreapta d este $AM' : y = 3x - 3$. Deci, $f(x) = 3x - 3$. 3. $x \in \{0, 2\}$. 4. $\frac{1}{9}$. 5. $3x + y - 5 = 0$. 6. $\frac{\text{ctg}1 - \text{tg}1}{2} = \frac{1 - \text{tg}^2 1}{2\,\text{tg}1} = \frac{1}{\text{tg}2} = \text{ctg}2$. II. 1. a) $f'(x) =$ $= \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} = 0$, $(\forall)\, x > 0$, deci f este constantă. b) Dacă $f(x) = f(y)$, atunci $\frac{(x - y)\det(A)}{(cx + d)(cy + d)} = 0$, deci $x = y$. Prin urmare, f este injectivă. c) Din egalitatea $A^{n+1} = A^n \cdot A$, deducem că $a_{n+1} = aa_n + cb_n$, $b_{n+1} = ba_n + db_n$, $c_{n+1} =$ $= ac_n + cd_n$, $d_{n+1} = bc_n + dd_n$. Notăm cu $P(n)$ propoziția care trebuie demonstrată. Evident, $P(1)$ este adevărată, iar dacă presupunem $P(k)$ adevărată $(k \geq 1)$, atunci $\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{de } k+1 \text{ ori } f}(x) = \frac{a_k f(x) + b_k}{c_k f(x) + d_k} = \frac{(aa_k + cb_k)x + (ba_k + db_k)}{(ac_k + cd_k)x + (bc_k + dd_k)} =$ $= \frac{a_{k+1}x + b_{k+1}}{c_{k+1}x + d_{k+1}}$, deci $P(k+1)$ este adevărată. 2. a) Cum $\det(I_2 + aA + bB) = 1 + a \neq 0$, rezultă că $I_2 + aA + bB$ este inversabilă. b) Dacă $X = I_2 + aA + bB \in G$ și $Y = I_2 + cA + dB \in G$, atunci $X \cdot Y = I_2 + (a + c + ac)A + (b + d +$ $+ ad)B \in G$, pentru că $a + c + ac = (a+1)(c+1) - 1 \neq -1, (\forall) a \neq -1, c \neq -1$. Dacă $X = I_2 + aA + bB \in G$, atunci $X^{-1} = \frac{1}{a+1}\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1+a \end{pmatrix} = I_2 + \frac{-a}{a+1}A + \frac{-b}{a+1}B \in G$, căci $\frac{-a}{a+1} \neq -1$. c) Ecuația $X^2 = I_2, X = I_2 + aA + bB \in G$ este echivalentă cu $I_2 + (2a + a^2)A + (ab + 2b)B = I_2$. Orice pereche (a, b), cu $a = -2$ și $b \in \mathbb{R}$, este soluție a ultimei ecuații, deci aceasta are o infinitate de soluții. III. 1. a) $x = 0$. b) $g_n''(x) = n(n-1)x^{n-2} + n(n+1)x^{-(n+2)} > 0$, $(\forall)\, x > 0$. c) Deoarece $f_n(1) - 2^n < 0$ și $f_n(2) - 2^n > 0$, rezultă că $x_n \in (1, 2)$. Din egalitatea $x_n^n = 2^n - \ln x_n$, deducem că $x_n = 2\left(1 - \frac{\ln x_n}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}}$. Având în vedere că $x_n \in (1, 2)$, obținem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln x}{2^n} = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. 2. a) $I_2 = \frac{a^2}{2} - a +$ $+ \ln(a + 1)$. b) $I_n + I_{n-1} = \int_0^a t^{n-1}dt = \frac{a^n}{n}$. c) Din relația $0 \leq I_n \leq \int_0^a t^n dt = \frac{a^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Testul 28

I. 1. $r = 2$, $S_{10} = 120$. 2. $m \in \{1, 2\}$. 3. $x = 11$. 4. $C_5^3 = 10$. 5. $\sqrt{5}$. 6. $\mathcal{A}_{ABC} = 16$. II. 1. a) 1. c) $(f(A))^3 = (I_3 +$ $+ B)^3 = I_3 + 3B + 3B^2$, pentru $B^3 = O_3$. 2. a) $x \in \{3, 5\}$. b) $a = 3$. c) $x = 4$, $y = 2$. III. 1. a) $f'(x) = 3\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

b) 0. c) f este crescătoare pe $(-\infty, -1]$ și pe $[1, \infty)$ și descrescătoare pe $[-1, 0)$ și pe $(0, 1]$. **2.** a) $V = \pi\int_0^1 f^2(x)dx =$ $= \frac{7\pi}{15}$. b) $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{2}\int_2^1 \sqrt{t}dt = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Testul 29

I. 1. -64. **2.** 2. **3.** $x \in \left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$. **4.** $C_6^3 = 20$. **5.** $\frac{\sqrt{5}}{10}$. **6.** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} =$ $= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD} = 1+4 = 5$. **II. 1.** b) $x = 0, y = 1, z = 0$. c) Egalitatea $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = 0$ se poate rescrie astfel $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$, de unde obținem $a = b = c$. Deci, sistemul se reduce la o singură ecuație: $x+y+z = 1$, iar mulțimea soluțiilor este $\left\{(\alpha, \beta, 1-\alpha-\beta) \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$. Condiția $x^2+y^2 = z-1$ devine $\alpha^2 +$ $+ \beta^2 = -\alpha - \beta$, sau $\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$, care este verificată de toate coordonatele punctelor cercului cu centrul în $Q\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ și rază $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Prin urmare, există o infinitate de soluții ale sistemului considerat care satisfac condiția impusă: $x = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t$, $y = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t$, $z = 2-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.

2. a) 64. b) $A = \begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{2}\end{pmatrix}$. c) Fie $X = \begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix} \in G$. Ecuația considerată este echivalentă cu $\begin{pmatrix}a^2 & b(a+c)\\ 0 & c^2\end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$, de unde rezultă că $a \in \left\{\hat{1}, \hat{3}\right\}, b = \hat{0}, c \in \left\{\hat{0}, \hat{2}\right\}$. Deci, există 4 soluții. **III. 1.** a) $y = x$. b) $f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

c) $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} < 0, (\forall) x \in (-\infty, -1)$. **2.** a) $\int_0^{\pi} f_2(x)dx = \int_0^{\pi}|\sin 2x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2xdx = 2$. b) $I_n =$ $= \int_{\pi}^{2\pi}\frac{|\sin nx|}{x}dx \le \int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{x}dx = \ln 2$. c) $I_n = \int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt + \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt + \ldots + \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt \ge$ $\ge \frac{1}{\pi(n+1)}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|dt + \frac{1}{\pi(n+2)}\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi}|\sin t|dt + \ldots + \frac{1}{\pi(n+n)}\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}|\sin t|dt = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$, pentru că $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|dt = \ldots = \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}|\sin t|dt = 2$.

Testul 30

I. 1. 9. **2.** $x = 7$. **3.** $-\frac{1}{2}$. **4.** Im $f = [-1, 0]$. **5.** $a = -3$, $b = 4$. **6.** $m(\sphericalangle B) = 30°$. **II. 1.** a) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

2. a) $x \in \left\{\hat{1}, \hat{4}\right\}$. b) $\Delta = \hat{0}$. c) $(x, y) \in \left\{\left(\hat{1}, \hat{2}\right), \left(\hat{3}, \hat{4}\right), \left(\hat{5}, \hat{0}\right)\right\}$. **III. 1.** a) $f'(x) = 6x^2 - 6x$ și $f'(1) = 0$. b) Deoarece

Scanned with OKEN Scanner

$f''(x)=12x-6$, rezultă că f este concavă pe $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ și convexă pe $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$. c) Funcția f este descrescătoare pe [0, 1] și crescătoare pe $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ și pe [1, ∞). Cum $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f(1)=0$, rezultă că $f(x)\geq 0,(\forall)x\geq -\frac{1}{2}$.

2. a) $\int f(x)dx=e^x+C$. b) $A=\int_0^1 xe^x dx=1$. c) Întrucât $g(x)-f(x)\geq 0$, $(\forall)\ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, rezultă că $\int_0^{\frac{1}{2}}(g(x)-f(x))dx\geq 0$.

Testul 31

I. 1. 0. 2. 3. 3. 5. 4. Im $f=[-5,3]$. 5. Fie M mijlocul lui AC. Avem $\overrightarrow{OA}+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=-2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{OM}=\vec{0}$.

6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. II. 1. a) $a=3, b=3, c=5$. b) $A\cdot F=F\cdot A=I_3$. c) $X=\begin{pmatrix}-6 & -6 & -6\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$. 2. b) $x*(y*z)=4xyz-2xy-2xz-2yz+x+y+z=(x*y)*z$. c) $x\in\{0,1\}$. III. 1. b) Funcția f este crescătoare pe $[0,\infty)$ și descrescătoare pe $(-\infty,0]$. c) 0. 2. a) $I_0=\frac{e^4-e^2}{2}$. b) Deoarece $x\ln^n x\leq x\ln^{n+1}x,(\forall)x\in\left[e,e^2\right],(\forall)n\in\mathbb{N}$, rezultă că $I_n\leq I_{n+1},(\forall)n\in\mathbb{N}$. c) $I_n=\int_e^{e^2}\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln^n x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln^n x\Big|_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\frac{x^2}{2}\left(\ln^n x\right)'dx=\frac{e^2(e^2\cdot 2^n-1)}{2}-\frac{n}{2}I_{n-1}$.

Testul 32

I. 1. $-8\in\mathbb{Z}$. 2. Im $f=\left[\frac{7}{4},\infty\right)$. 3. $x=-12$. 4. $\frac{2}{45}$. 5. $4x+5y-1=0$. 6. $AC=6\sqrt{2}$, $BC=3(\sqrt{2}+\sqrt{6})$, $\mathcal{P}=3(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6})$. II. 1. b) Deoarece $\det\left(A-A^t\right)=\det\left(\left(A-A^t\right)^t\right)=\det\left(A^t-A\right)=-\det\left(A-A^t\right)$, rezultă că $\det\left(A-A^t\right)=0$. c) Cum minorul $\begin{vmatrix}b & b+1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, înseamnă că rang $A\geq 2$. 2. a) Dacă $a\geq 0$, atunci $f(a)>0$; b) $-p^3+3pq-3r$. c) Fie $p=-(a+b+c)>0$, $q=ab+bc+ca>0$, $r=-abc>0$. Numerele reale a, b, c sunt rădăcinile polinomului $g=X^3+pX^2+qX+r$, care nu are rădăcini în $[0,\infty)$. Deci, $a,b,c\in(-\infty,0)$.

III. 1. a) Cum $f'(x)=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}>0$, $x\in\mathbb{R}$, rezultă că f este strict crescătoare. b) Funcția f este injectivă pentru că este strict crescătoare și surjectivă pentru că este continuă și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-2x)=\infty$. 2. a) $\frac{1}{6}$. b) Întrucât f este periodică, cu perioada 1 și este continuă pe (0, 1], rezultă că este continuă pe $\mathbb{R}$, deci are primitive. c) Funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(a)=\int_a^{a+1}f(x)dx$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $g'(x)=f(a+1)-f(a)=0,(\forall)a\in\mathbb{R}$. Deci, g este constantă.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 33

I. 1. $C_5^4+1=6=P_3$. **2.** $A(-1,0), B(1,0), C(0,-1)$ **3.** $\Delta=5m^2+4>0, (\forall)\, m\in\mathbb{R}$. **4.** 26. **5.** $10\sqrt{2}$. **6.** 6,5. **II. 1.** a) -7. b) $x=1, y=1, z=0$. c) $a=0$. **2.** a) $a=4$. b) $c=X, r=-8$. c) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4-2a<0, (\forall)\, a\in(2,\infty)$. **III. 1.** a) $a=4$. b) $y=1$. c) $a=-10$. **2.** b) $\frac{1}{2}(e-1)$. c) Deoarece $1\le f(x)\le e,\ (\forall)x\in[0,\ 1]$, rezultă că $1\le\int_0^1 f(x)dx\le e$.

Testul 34

I. 1. $b_1=3$. **2.** $m\in\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **4.** $\frac{2}{9}$. **5.** $m=\frac{1}{3}$. **6.** $-\frac{7}{9}$. **II. 1.** a) Se poate demonstra prin calcul sau aplicând formula pentru determinanții de tip Vandermonde. b) $x=pqr, y=-(pq+qr+rp),\ z=p+q+r$. c) Se observă că p, q, r sunt soluțiile ecuației $t^3-t^2-t+1=0$, deci $p, q, r\in\{-1, 1\}$. Prin urmare, cel puțin două dintre numerele p, q, r sunt egale. **2.** a) 25. b) $X\in\left\{\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{2}\\ \hat{3} & \hat{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{3}\\ \hat{2} & \hat{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\hat{4} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{4}\end{pmatrix}\right\}$. c) Matricea $Y=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{2}\\ -\hat{2} & \hat{1}\end{pmatrix}\neq O_2$ aparține lui A și nu este inversabilă, pentru că $\det(Y)=\hat{0}$. **III. 1.** a) e. b) $a=-\frac{8}{3}$. c) $a\in\{-2, 0\}$.

2. a) $f_1^2(x)=x^2=2f_2(x)$. b) Se arată, prin inducție, că $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}$. Avem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xf_n(x)+1}{f_{n+1}(x)+2}=n+1$.

c) $V=\pi\int_0^{\pi}x^2\sin^2 x dx=\frac{\pi^4}{6}-\frac{\pi^2}{4}$.

Testul 35

I. 1. 0. **2.** $A(1, 4)$. **3.** $x=-1$. **4.** $x=3$. **5.** $x-y-2=0$. **6.** 6. **II. 1.** a) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. c) Dacă $X=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & l\end{pmatrix}$, atunci rezultă că $\begin{pmatrix}d+g & e+h & f+l\\ g & h & l\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a & a+b\\ 0 & d & d+e\\ 0 & g & g+h\end{pmatrix}$, deci $d=g=h=0, 1=e=a, f=b$.

2. a) $c=\frac{1}{2}$. b) $x_1=1, x_2=1+\sqrt{2}, x_3=1-\sqrt{2}$. c) $a\left(a^2-3b\right)$. **III. 1.** b) $y=0$. c) Deoarece f este crescătoare pe $(-\infty,0]$ și descrescătoare pe $[0,\infty)$, rezultă că $f(x)\le f(0)=1, (\forall)x\in\mathbb{R}$. **2.** a) $\frac{x^2}{2}+4x+C$. b) $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$. c) Cum $\frac{1}{5}\le f_{2008}(x)\le\frac{1}{4}, (\forall)x\in[0, 1]$, avem $A=\int_0^1 f_{2008}(x)dx\in\left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 36

I. 1. 3. **2.** $a_{n+1} - a_n = 2(n+1) + 3 - 2n - 3 = 2$. **3.** $A(2, 0)$. **4.** $(x, y) \in \{(2, 3), (3, 5)\}$. **5.** $f(-1) = 3$. **6.** $AB = 20$.

II. 1. a) $\det(A(a)) = a^3 - 3a + 2$. b) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. c) $x = y = z = \frac{1}{2}$. **2.** a) $a_0 = 2$. b) 2^{2008}. c) 2^{2008}. **III. 1.** b) $x_1 = -1$ este punct de maxim și $x_2 = 3$ este punct de minim. c) Deoarece $x_1 = -1$ este punct de maxim absolut pe $(-\infty, 1)$, rezultă că $f(a) \le f(-1) = -2$, $(\forall)\, a < 1$. Cum $x_2 = 3$ este punct de minim absolut pe $(1, \infty)$, înseamnă că $f(b) \ge f(3) = 6$, $(\forall)\, b > 1$. Prin urmare, $f(a) - f(b) \le -8$, $(\forall) a < 1$, $b > 1$. **2.** a) $x^2 - x + C$. b) $\frac{26}{3}$.

c) $\int_1^5 f(x)F^{2008}(x)\,dx = \int_1^5 F'(x)F^{2008}(x)\,dx = \left.\frac{F^{2009}(x)}{2009}\right|_1^5 = \frac{3^{6027}-1}{2009 \cdot 3^{2009}}$.

Testul 37

I. 1. $x = 2$, $y = 1$. **2.** $m \in (-\infty, 0)$. **3.** $x \in \{-9, 9\}$. **4.** $T_3 = 2160$. **5.** $m = 3$, $n = 1$. **6.** $BM = \sqrt{61}$. **II. 1.** a) $A^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. b) Fie $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Deoarece $B \cdot E_1 = E_1 \cdot B$, rezultă că $b = 0$, $a = d$, iar din $B \cdot E_2 = E_2 \cdot B$, obținem $c = 0$, deci $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. c) Din ipoteză, deducem că $A^n \cdot E_1 = E_1 \cdot A^n$ și $A^n \cdot E_2 = E_2 \cdot A^n$, deci $A^n = aI_2$, $a \in \mathbb{R}$. Fie r restul împărțirii lui n la 4; ținând cont de a), avem: $aI_2 = A^n = A^{4k+r} = (A^4)^k \cdot A^r = (-4I_2)^k \cdot A^r = (-4)^k \cdot A^r$. Cum matricele A, A^2 și A^3 nu sunt de forma $b \cdot I_2$, rezultă că $r = 0$, deci $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$. **2.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{i\sqrt{10}}{2}$, $x_4 = -\frac{i\sqrt{10}}{2}$. b) $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 \ldots = 3(x_1^2 + x_2^2 \ldots) - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots) = 3(x_1 + x_2 + \ldots)^2 - 8(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots) = \frac{3}{4}(a^2 - 16)$. c) Dacă $a = 4$, atunci $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \ldots = 0$, deci $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Folosind relațiile lui Viète, obținem $b = 1$ și $c = \frac{1}{8}$. **III. 1.** a) $f_s'(1) = -1 \ne 1 = f_d'(1)$. b) Dacă $m < 0$, ecuația nu are soluții reale; dacă $m \in \{0\} \cup \left(\frac{2}{e}, \infty\right)$, ecuația are o soluție; dacă $m \in \left(0, \frac{2}{e}\right)$, există trei soluții; pentru $m = \frac{2}{e}$, ecuația are două soluții. c) Inegalitatea considerată este echivalentă cu $\frac{\ln 3}{\sqrt{3}} < \frac{\ln 5}{\sqrt{5}}$, sau $f(3) < f(5)$, inegalitate care este adevărată pentru că f este crescătoare pe $(1, e^2)$. **2.** a) $\frac{\pi}{4}$. b) Fie $G : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int_0^x \arccos\sqrt{t}\,dt$. Avem $g'(x) = (G(\cos^2 x))' = G'(\cos^2 x)(\cos^2 x)' = -x \sin 2x$. c) Deoarece $(f + g)'(x) = 0$, $(\forall)\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă că funcția $f + g$ este constantă, ceea ce implică $f(x) + g(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, $(\forall)\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 38

I. 1. 91. **2.** $m = 4$. **3.** 0. **4.** $\frac{4}{5}$. **5.** $x + 2y + 4 = 0$. **6.** $BC = 2\sqrt{19}$. **II. 1.** b) $a = 6$. c) $x_0 = \frac{4(a-2)}{3(a-6)}$, $z_0 = \frac{a-2}{3(a-6)}$, $\frac{x_0}{z_0} = 4$. **2.** a) $x_{1,2} = \pm 1 \in \mathbb{R}$, $x_{3,4} = \pm i\sqrt{3} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. b) $P = f(2) = 21$ (sau calcul direct). c) $S = \frac{f'(2)}{f(2)} = \frac{40}{21}$ (sau calcul direct).

III. 1. b) $y = -1$. c) Întrucât $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, $(\forall) x > 0$, înseamnă că f este convexă. **2.** a) $\frac{x^2}{2} + x + C$. b) $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$. c) Din relația $x^n + 1 \le 2$, $(\forall) x \in [0, 1]$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, obținem $\int_0^1 \sqrt{f_n(x)}dx \le \int_0^1 \sqrt{2}dx = \sqrt{2}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Testul 39

I. 1. $z \in \{-3i, 3i\}$. **2.** $a \in \left(-\infty, \frac{9-2\sqrt{19}}{5}\right] \cup \left[\frac{9+2\sqrt{19}}{5}, \infty\right) \setminus \{0\}$. **3.** $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$. **4.** 625. **5.** $r = 4$. **6.** $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B} = \sqrt{2}$. **II. 1.** a) $\det(A) = -1$. b) $A^{-1} = A$. c) Fie $P(n)$ propoziția care trebuie demonstrată. Evident, $P(1)$ este adevărată. Dacă presupunem că $P(k)$ este adevărată, atunci $(I_3 + A)^{k+1} = 2^{k-1}(I_3 + A) \cdot (I_3 + A) = 2^{k-1}(I_3 + 2A + A^2) = 2^{k-1}(2I_3 + 2A) = 2^k(I_3 + A)$, deci $P(k + 1)$ este adevărată. **2.** a) $f_1(2) = 7 \neq 0$. b) 9. c) $f_n = (X^{3n} - 1) + (2X^2 - 4X) = (X^3 - 1)((X^3)^{n-1} + (X^3)^{n-2} + \ldots + X^3 + 1) + (2X^2 + 2X + 2) - 6X - 2$. Restul împărțirii lui f_n la $X^2 + X + 1$ este $-6X - 2$. **III. 1.** a) $f'(1) = a(\ln a - 1)$. b) $y = a^a(\ln a - 1)(x - a)$. c) Conform ipotezei avem $f(x) \ge f(a)$, $(\forall) x > 0$, ceea ce înseamnă că $x = a$ este punct de minim. Aplicând teorema lui Fermat, obținem $f'(a) = 0$, deci $a = e$, rezultat care verifică condiția dată. **2.** a) $I_1 = 1$. b) $I_n = \int_1^e x' \ln^n x dx = x\ln^n x\Big|_1^e - n\int_1^e \ln^{n-1} x dx = e - nI_{n-1}$, $(\forall)$ $n \ge 2$. c) Deoarece $I_{n+1} - I_n = \int_1^e \left(\ln^n x\right)(\ln x - 1)dx \le 0$, $(\forall) n \ge 1$ și $I_n \ge 0$, $(\forall) n \ge 1$, rezultă că șirul $(I_n)_{n \ge 1}$ este descrescător și mărginit inferior, deci este convergent.

Testul 40

I. 1. 4497. **2.** $A(2, 3)$ și $B(3, 5)$. **3.** $x = -\frac{2}{9}$. **4.** $\frac{22}{901}$. **5.** $a = \frac{5}{3}$. **6.** $\frac{9}{16}$. **II. 1.** b) $(A - I_3)\left(\frac{1}{2}A - I_3\right) = \left(\frac{1}{2}A - I_3\right)(A - I_3) = I_3$; c) $A^{2015} = 3^{2014}A$. **2.** a) f este bijectivă și $f(x * y) = f(x) + f(y)$, $(\forall) x, y \in G$. b) Fie $a = 1 * \frac{1}{2} * \ldots * \frac{1}{n}$. Atunci $f(a) = f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(n + 1)$, deci $a = n$. c) Dacă $x, y \in H$, $x = a^2 - 1$, $y = b^2 - 1$, $a, b \in \mathbb{Q}^*$, atunci $x * y = (ab)^2 - 1 \in H$ și $x' = -\frac{x}{x+1} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 1 \in H$. **III. 1.** a) Cum $f'(x) = \frac{1}{2-x} > 0$, $(\forall) x \in (-\infty, 2)$, rezultă că f este strict crescătoare. b) Deoarece f este strict crescătoare și continuă, avem $f([-2, 0]) = [f(-2), f(0)] = [-\ln 4, -\ln 2] \subset [-2, 0]$. c) Demonstrăm prin inducție că $u_n \in [-2, 0]$, $(\forall) n \ge 1$. Faptul că $(u_n)_{n \ge 1}$ este strict crescător se arată tot prin inducție, având în vedere că $u_1 < u_2$ și f este funcție strict crescătoare. **2.** a) $F'(x) = f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$. b) Deoarece

Scanned with OKEN Scanner

$f(n+1) \le f(x) \le f(n)$, $(\forall)\, x \in [n, n+1]$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$ rezultă că $f(n+1) \le I_n \le f(n)$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$. Din relația precedentă deducem că $f(n+2) \le I_{n+1} \le f(n+1)$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$, deci $I_{n+1} \le f(n+1) \le I_n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce înseamnă că șirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este descrescător. c) Cum $\lim\limits_{n\to\infty} f(n+1) = \lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$ și $f(n+1) \le I_n \le f(n)$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Testul 41

I. 1. $a \in \{-1, 1\}$. **2.** 11. **3.** $x = 2$. **4.** $2^{10} - 2^5 = 992$. **5.** 0. **6.** 1. **II. 1.** b) $5a + 1$; c) $X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + aA + bA + 5abA = X(a + b + 5ab)$. **2.** a) $f \vdots (X^2 - 1) \Leftrightarrow f(1) = 0$ și $f(-1) = 0$, fals; b) Dacă $x_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ este rădăcină pentru f, atunci și $x_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ este rădăcină a sa, deci f se divide cu $X^2 - X + 1$. Găsim $a = -4$ și $b = 1$; c) $x_3 = -1$ și $x_4 = 4$. **III. 1.** a) $f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 2}{(x-2)^2}$; b) $y = x + 3$; c) $f(x_1) + f(x_2) = 10$. **2.** a) $I_1 = \frac{\ln 2}{2}$; b) $I_{n+2} + I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x^2+1)}{x^2+1}dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. c) Se arată că $I_{n+1} \le I_n$ $\forall\, n \ge 1$; atunci $2I_{n+2} \le I_{n+2} + I_n \le 2I_n \Rightarrow$ $\Rightarrow I_{n+2} \le \frac{1}{2n+2} \le I_n \Rightarrow \frac{1}{2n+2} \le I_n \le \frac{1}{2n-2} \Rightarrow \frac{n}{2n+2} \le nI_n \le \frac{n}{2n-2}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-2} = \frac{1}{2}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{2}$.

Testul 42

I. 1. $\frac{1+2^9}{3} = 171$. **2.** $f^{-1} : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(x-1)$. **3.** $x \in \{-2, 1\}$. **4.** $A_3^2 : C_3^2 = 2$. **5.** $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2}$. **6.** $\sin a \cdot \sin b = \sin a \cdot \sin(2\pi - a) = -\sin^2 a \le 0$. **II. 1.** a) $\det(A) = (a-1)^2$; b) Matricea A are rangul 3, dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ și are rangul 1, dacă $a = 1$; c) Sistemul are soluția unică $(0, 0, 1)$. **2.** a) $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$; b) $-3m$; c) $m \in \left\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\right\}$. **III. 1.** a) $f(x) > 0$, dacă $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$ și $f(x) < 0$, dacă $x \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$. b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$; c) $f'(x) = 2 + (2x - 7)e^{-x}$. **2.** a) Se folosește metoda integrării prin părți; b) $\int_0^x \frac{dt}{1+e^t} = \int_0^x \left(1 - \frac{e^t}{1+e^t}\right)dt = x - \ln(1 + e^x) + \ln 2$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 2\ln 2$.

Testul 43

I. 1. 0. **2.** $x \in \left[\frac{9}{2}, \infty\right)$. **3.** $\frac{24}{25}$. **4.** $5 \cdot 5! = 600$. **5.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$. **6.** $BD = 9{,}6$ cm. **II. 1.** a) $a = 1, b = 1$. b) $a = 1, b = 1$,

Scanned with OKEN Scanner

$c=-1$; c) $x_0=-2, y_0=-3$. 2. b) $x_1=x_2=\ldots=x_{10}=1, x_{11}=x_{12}=\ldots=x_{20}=-\frac{1}{2}$; c) $a_0=2^{10}; x_1+x_2+\ldots+x_{20}=$ $=-\frac{a_1}{a_0}$ implică $a_1=-5\cdot 2^{10}; a_{20}=1$. III. 1. a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$; b) $f''(x)=1-\cos x$; c) Deoarece $f''(x)\geq 0$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$, rezultă că f' este crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci $f'(x)\geq f'(0)=0$, $(\forall)x\geq 0$, ceea ce înseamnă că f este crescătoare pe $[0,\infty)$. Aşadar, $f(x)\geq f(0)=0$, $(\forall)\, x\geq 0$. 2. a) Deoarece $0\leq x^n\sin x\leq x^n$ $(\forall)\, x\in[0,1]$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$, rezultă că $0\leq\int_0^1 x^n\sin x dx\leq\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$ de unde obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$, deci şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent. b) $I_n=\int_0^1 x^n(-\cos x)'dx=-x^n\cos x\Big|_0^1+n\int_0^1 x^{n-1}\cos x dx$. Cum $\int_0^1 x^{n-1}\cos x dx=\int_0^1 x^{n-1}(\sin x)'dx=x^{n-1}\sin x\Big|_0^1-$ $-(n-1)\int_0^1 x^{n-1}\sin x dx=\sin 1-(n-1)I_{n-2}$, deducem că $I_n=-\cos 1+n\sin 1-n(n-1)I_{n-2}$. c) Folosind relaţia de la b), $I_{n+2}=-\cos 1+(n+2)\sin 1-(n+2)(n+1)I_n$ deci $nI_n=-\frac{\cos 1}{n+2}+\sin 1-I_n-\frac{I_{n+2}}{n+2}$ şi, cum $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n=\sin 1$.

Testul 44

I. 1. $[a]=0$. 2. 1. 3. $x\in\left\{\frac{\pi}{3},\pi\right\}$. 4. $C_6^4\cdot C_7^1+C_6^5\cdot C_7^0=111$. 5. $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\neq\frac{-3}{5}\Rightarrow d_1\parallel d_2$. 6. $R=\frac{BC}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{39}}{3}$.

II. 1. a) $X=\begin{pmatrix}1-bc & a-c\\ b & 1\end{pmatrix}$; b) $C=\begin{pmatrix}n & \frac{n(n+1)}{2}c\\ 0 & n\end{pmatrix}$. c) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2\Leftrightarrow AB=BA\Leftrightarrow bc=0$. 2. a) $x_1=$ $=-1, x_2=1, x_3=-i, x_4=i$; b) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\left(\frac{b}{a}\right)^2$. c) $a=3, b=-4$. III. 1. a) Cum $f_n'(x)=\frac{2n}{(x+n)^2}+e^{-x}>0$, $(\forall)x\geq 0$, înseamnă că f_n este strict crescătoare. b) Întrucât f_n este continuă, $f_n(n)=-e^{-n}<0$ şi $f_n(n+1)=$ $=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{e^{n+1}}>0$, rezultă că există $u_n\in[n,n+1]$, astfel încât $f_n(u_n)=0$. Unicitatea lui u_n este asigurată de injectivitatea funcţiei f_n pe $[0,\infty)$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{n}=1$. 2. a) $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$; b) $\frac{4\pi}{3}$; c) $A=\int_0^1\sqrt{x^2+1}dx=$ $=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$.

Testul 45

I. 1. $\frac{1}{a}$. 2. Vârful parabolei este $V(x_V,y_V)$, $x_V=-1-\frac{1}{m}$, $y_V=-4-\frac{1}{m}$ şi $x_V-y_V=3$. 3. $\left\{10,10^{-\frac{1}{4}}\right\}$ 4. $C_6^2=15$.

5. 7. 6. $-\frac{3}{5}$. II. 1. b) Egalitatea de la punctul a) este echivalentă cu $B\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}I_3\right)=I_3$, de unde rezultă că B

Scanned with OKEN Scanner

este inversabilă și $B^{-1}=\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}I_3$. c) Deoarece $\det(B^n)=2^n$ și $\det I_3=1$, rezultă că $B^n\neq I_3$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$. 2. a) $f(\hat{0})=f(\hat{1})=\hat{1}\neq\hat{0}$. b) $f(-\hat{1})\neq\hat{0}$. c) Dacă împărțim pe g la f, obținem $g=(X+\hat{1})\cdot f$. III. 1 a) $f'(x)=$ $=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}>0$, $(\forall)\,x>0$. b) $f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}>0$, $(\forall)\,x>0$. c) Deoarece f este convexă pe $(0,\infty)$, rezultă că $\frac{f(a)+f(b)}{2}\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $(\forall)a,b>0$. A doua inegalitate este o consecință a faptului că $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}>0$ și f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$. 2. a) $F'(x)=f(x)$, $(\forall)\,x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\,\mathrm{tg}^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(\mathrm{tg}\,x-x)'dx=x(\mathrm{tg}\,x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-$ $-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}\,x-x)dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi^2}{32}$. c) Din relația $0\leq x\,\mathrm{tg}^2x$, $\forall\,x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, rezultă, prin integrare, concluzia.

Testul 46

I. 1. $a=4<4,1=b$. 2. $f\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\circ f(x)=x^4-2x^3+x$. 3. $\Delta=4-4\sin^2a=4\cos^2a\geq 0$. 4. $C_{15}^3\cdot C_{13}^2$. 5. $x+y=0$. 6. $\cos 70^\circ+\cos 110^\circ=2\cos 90^\circ\cos 20^\circ=0$. II. 1. a) A_0A_1: $x-y+2=0$. b) $A_n\in A_0A_1$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, deoarece $n-(n+2)+2=0$. c) $\mathcal{A}_{OA_nA_{n+1}}=1$. 2. a) $x_1=-1$, $x_2=3$. b) Deoarece $g(-1)=0$ și $f(-1)=4^{100}\neq 0$, rezultă că g nu divide pe f. c) Restul împărțirii lui f la g are forma $aX+b$. Din relația $f=(X+1)(X-3)\hat{c}(X)+aX+b$ rezultă că $f(-1)=4^{100}=-a+b$, $f(3)=4^{100}=a+b$, deci $a=0$ și $b=4^{100}$. III. 1. a) Deoarece $g'(x)=-\ln x<0$, $(\forall)\,x>1$ și $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=0$, rezultă că $g(x)<0$, $(\forall)\,x>1$; b) $f'(x)=\frac{g(x)}{x(x-1)^2}<0$, $(\forall)\,x>1$, $\mathrm{Im}\,f=(0,1)$. c) Inegalitatea considerată este echivalentă cu relația $f(\sqrt{2})>f(\sqrt{3})$, care este adevărată, pentru că f este descrescătoare. 2. a) Evident, $f(1)=11>0$, iar dacă $x\neq 1$, atunci $f(x)=\frac{1-x^{11}}{1-x}>0$, întrucât numărătorul și numitorul au același semn. b) $F'(x)=f(x)>0$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}$. c) Fie $G(x)=F(x)-xf(x)$. Deoarece $G'(x)=-xf'(x)<0$, $(\forall)\,x>0$ și $G(0)=0$, rezultă că $G(x)<0$, $(\forall)\,x>0$.

Testul 47

I. 1. $c<a<b$. 2. $f(1)=1$. 3. $\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$. 4. 30 lei. 5. $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$. 6. -2. II. 1. a) $f_A(I_2)=I_2$. b) Oricare ar fi $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ecuația $f_A(X)=Y$ are soluția unică $X=A^{-1}Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, deci f_A este bijectivă. c) $f_A(XY)=A(XY)A^{-1}=$ $=(AXA^{-1})(AYA^{-1})=f_A(X)\cdot f_A(Y)$. 2. b) Elementul neutru este $A(0)=I_3$, iar simetricul lui $A(x)$ este $A(-x)$; c) Funcția $f:G\to\mathbb{R}$, $f(A(x))=x$ este izomorfism între cele două grupuri. III. 1. a) $A=-5$, $B=8$. b) $f'(x)=$ $=\frac{5}{(x-1)^2}-\frac{8}{(x-2)^2}$, $(\forall)x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$. c) Se demonstrează prin inducție că derivata de ordin n a funcției $g:\mathbb{R}\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{x-a}$ este $g^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$. Folosind a), obținem $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left(\frac{-5\cdot n!}{(x-1)^{n+1}}+\frac{8\cdot n!}{(x-2)^{n+1}}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

2. a) $\int f(x)dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$. b) f este continuă pe $[0, \infty)$. c) $\frac{e^2+1}{4}$.

Testul 48

I. 1. $r = \sqrt{2}$. 2. 0. 3. $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$. 4. $T_5 = 210x^4$. 5. $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. 6. $E = \frac{\sin 2x}{2}$, deci $E_{max} = \frac{1}{2}$.

II. 1. a) $x = 1$. b) Avem $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$ și $B^n = O_2$, $\forall\, n \geq 2$; c) $A^n = (I_2 + B)^n = I_2 + C_n^1 B + \ldots + C_n^n B^n = I_2 + nB =$

$= \begin{pmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{pmatrix}$. 2. b) Elementul neutru este $e = 3$ și simetricul unui element $x \in G$ este $x' = 2 + \frac{1}{x-2} \in G$.

III. 1. a) $f_1(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$. b) Folosim inducția matematică. c) Limita este egală cu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = 1$.

2. a) $I_3 = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{(x^4+1)'}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\ln(x^4+1)\Big|_0^1 = \frac{\ln 2}{4}$. b) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2)'}{x^4+1}dx =$

$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}$. c) Șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător, deci $\frac{\ln 2}{4} = I_3 < I_2 < I_1 = \frac{\pi}{8}$.

Testul 49

I. 1. $-\frac{1}{2}$. 2. $m \in \{0, 1\}$. 3. $x \in \{-1, 2\}$. 4. 18. 5. $a = -2$. 6. 2. II. 1. b) $\sigma^3 = e$, deci $\sigma^{100} = (\sigma^3)^{333} \cdot \sigma = e \cdot \sigma = \sigma$.

c) De exemplu, se poate lua $\tau = \sigma^2$. 2. a) $r = f(3) = 63$. b) Eventualele rădăcini raționale ar fi de forma $\frac{m}{n}$, cu $m \mid 3, n \mid 1$, deci $\frac{m}{n} \in \{\pm 1, \pm 3\}$. Niciunul dintre aceste patru numere nu este rădăcină. c) Avem $x_1^3 = 3x_1 - 2 - \frac{3}{x_1}$

și analoagele. Atunci $S = 3(x_1 + \ldots + x_4) - 8 - 3\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_4}\right) = -6$. III. 1. a) $f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$. b) Dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală la $\pm\infty$, iar dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală. c) f este descrescătoare pe $(-\infty, 1)$ și pe $(1, +\infty)$, dar nu este descrescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. 2. a) $\frac{1}{2}\ln 2$. b) $\frac{1}{8}$. c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\ln 2$.

Testul 50

I. 1. $a = 9 \in \mathbb{N}$. 2. $x \in \{3, 4\}$. 3. $x = 2$. 4. 864. 5. $x - 3y + 7 = 0$. 6. 5. II. 1. a) O_3. b) $a = -\frac{1}{15}$. c) Inducție. 2. a) 10. b) $a = -14$, $b = 6$. c) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1 - i$, $x_4 = 1 + i$. III. 1. a) Funcția f este descrescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{1}{6}\right)$ și crescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{6}, +\infty\right)$. b) Graficul funcției f are o asimptotă verticală. Ecuația ei este $x = 0$. c) $a = \frac{1}{2} + \ln 6$. 2. a) $\frac{1}{2}\ln 2$. b) $I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. c) $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic

1. ALGEBRĂ

1.1. Formule de calcul prescurtat

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$; $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$; $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$; $(a\pm b)^3=$

$=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$; $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$; $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1})$, $n\in\mathbb{N},n\geq 2$.

1.2. Sume remarcabile

$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

1.3. Modulul unui număr real

Definiție. $|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$. *Proprietăți*: 1) $|x|\geq 0,(\forall)x\in\mathbb{R}$; 2) $|x|=0\Leftrightarrow x=0$; 3) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|,(\forall)x,y\in\mathbb{R}$;

4) $|x:y|=|x|:|y|,(\forall)x,y\in\mathbb{R},y\neq 0$; 5) $|x+y|\leq|x|+|y|,(\forall)x,y\in\mathbb{R}$; egalitatea are loc dacă și numai dacă $xy\geq 0$; 6) $|x|\leq a\Leftrightarrow x\in[-a,a]$, $a>0$; 7) $|x|\geq a\Leftrightarrow x\in(-\infty,-a]\cup[a,\infty)$, $a>0$.

1.4. Partea întreagă și partea fracționară

Definiție. Partea întreagă a unui număr real x este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x și se notează cu $[x]$. *Partea fracționară* (*zecimală*) a unui număr real x se notează cu $\{x\}$ și este definită astfel: $\{x\}=x-[x]$. *Proprietăți*: 1) $[x]\in\mathbb{Z}$ și $\{x\}\in[0,1),(\forall)x\in\mathbb{R}$; 2) $[x]\leq x<[x]+1,(\forall)x\in\mathbb{R}$; 3) $[x+k]=[x]+$

$+k,(\forall)x\in\mathbb{R}$, $(\forall)k\in\mathbb{Z}$; 4) $\{x+k\}=\{x\}$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$, $(\forall)k\in\mathbb{Z}$.

1.5. Progresii

Progresii aritmetice. *Definiție.* Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o *progresie aritmetică* de rație r dacă $a_{n+1}=a_n+r,(\forall)n\geq 1$.

(în acest caz, scriem $\div(a_n)_{n\geq 1}$). *Proprietăți*: 1) $\div(a_n)_{n\geq 1}\Leftrightarrow a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},(\forall)n\geq 2$; 2) $\div(a_n)_{n\geq 1}\Leftrightarrow(\exists)r$

astfel încât $a_n=a_1+(n-1)r,(\forall)n\geq 1$; 3) $\div(a_n)_{n\geq 1}\Rightarrow S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2},(\forall)n\geq 1$.

Progresii geometrice. *Definiție.* Șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ (cu $b_1\neq 0$) este o *progresie geometrică* de rație q $(q\neq 0)$ dacă $b_{n+1}=b_n\cdot q,(\forall)n\geq 1$ (în acest caz, scriem $\div(b_n)_{n\geq 1}$). *Proprietăți.* 1) $\div(b_n)_{n\geq 1}\Leftrightarrow b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1},(\forall)n\geq 2$;

2) $\div(b_n)_{n\geq 1}\Leftrightarrow(\exists)q\neq 0$ astfel încât $b_n=b_1\cdot q^{n-1},(\forall)n\geq 1$; c) Dacă $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică de rație $q\neq 1$,

atunci $S_n=b_1+b_2+\ldots+b_n=b_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1},(\forall)n\geq 1$.

Scanned with OKEN Scanner

1.6. Ecuația de gradul al II-lea cu coeficienți reali

Ecuația $ax^2+bx+c=0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$), are *discriminantul* $\Delta = b^2-4ac$. Dacă $\Delta \geq 0$, ecuația are două soluții reale (distincte dacă $\Delta \neq 0$ și egale dacă $\Delta = 0$): $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Când $\Delta < 0$, ecuația nu are soluții reale.

Soluțiile ecuației, x_1, x_2, verifică *relațiile lui Viète*: $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$ și $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Dacă numerele x_1, x_2 au proprietățile $x_1+x_2 = S$ și $x_1x_2 = P$, atunci ele sunt soluțiile ecuației de gradul al II-lea: $x^2-Sx+P=0$.

1.7. Funcții – definiții, proprietăți

Graficul și imaginea unei funcții. Numim *graficul* funcției $f: A \to B$ mulțimea $G_f = \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}$. Dacă f este o funcție numerică (adică $A, B \subset \mathbb{R}$), atunci G_f are o reprezentare geometrică într-un plan pentru care am ales un reper cartezian. Această reprezentare geometrică se numește, de obicei, tot graficul funcției f. *Imaginea* funcției $f: A \to B$ este mulțimea $\operatorname{Im} f = \{y \in B \mid (\exists) x \in A$ pentru care $f(x) = y\} \subset B$.

Funcții injective, surjective, bijective. Funcția $f: A \to B$ este *injectivă* dacă $((\forall) x, y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$, sau $((\forall) x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$. Funcția $f: A \to B$ este *surjectivă* dacă $\operatorname{Im} f = B$, adică $(\forall) y \in B, (\exists) x \in A$ pentru care $f(x) = y$. O funcție se numește *bijectivă* dacă este atât injectivă, cât și surjectivă.

Compunerea funcțiilor. Dacă $f: A \to B$ și $g: B \to C$ sunt două funcții, compusa lor este funcția $g \circ f: A \to C$ definită prin $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $(\forall) x \in A$. Operația de compunere a funcțiilor este asociativă, dar nu este comutativă. Dacă notăm cu $1_A: A \to A$, $1_A(x) = x$, $(\forall) x \in A$ *funcția identică a mulțimii A*, atunci $f \circ 1_A = f$, pentru orice funcție $f: A \to B$ și $1_A \circ g = g$, pentru orice funcție $g: C \to A$.

Funcții inversabile. Funcția $f: A \to B$ se numește *inversabilă* dacă există $g: B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$. Dacă există, funcția g este unică; ea se numește *inversa* lui f și se notează, de obicei, cu f^{-1}. Pentru $x \in A, y \in B$, are loc relația: $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$. O funcție este inversabilă dacă și numai dacă este bijectivă.

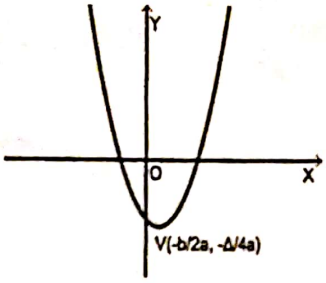
Simetrii ale graficului. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește funcție *pară* dacă $f(-x) = f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$. Graficul unei funcții pare este simetric față de axa Oy. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește funcție *impară* dacă $f(-x) = -f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$. Graficul unei funcții impare este simetric față de originea sistemului de coordonate. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește funcție *periodică* dacă există un număr $T \in \mathbb{R}^*$ (numit *perioadă* a lui f) astfel încât $f(x+T) = f(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$. Cea mai mică perioadă strict pozitivă, dacă există, se numește *perioada principală* a lui f.

Monotonie. Funcția $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește *funcție crescătoare* (*strict crescătoare*) dacă $(\forall) x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$. Funcția $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește *funcție descrescătoare* (*strict descrescătoare*) dacă $(\forall) x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$. Funcția $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește funcție *monotonă* (*strict monotonă*) dacă este sau crescătoare (strict crescătoare), sau descrescătoare (strict descrescătoare).

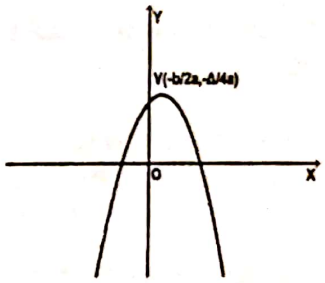
$\frac{(P+u)\cdot 2}{2}$

1.8. Funcția de gradul al II-lea

Forma canonică a funcției de gradul al II-lea, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$) este $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$. Graficul unei funcții de gradul al II-lea este o *parabolă*. Coordonatele vârfului parabolei sunt $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$. Când $\Delta>0$, parabola intersectează axa Ox în două puncte distincte, $A(x_1,0)$ și $B(x_2,0)$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $f(x)=0$; când $\Delta=0$, parabola este tangentă axei Ox, atingând axa doar cu vârful; când $\Delta<0$, parabola nu are puncte comune cu axa Ox. Dacă $a>0$, parabola admite un minim (f este convexă), iar dacă $a<0$, parabola admite un maxim (f este concavă). Funcția f este monotonă pe fiecare dintre intervalele $\left(-\infty,\frac{-b}{2a}\right]$ și $\left[\frac{-b}{2a},\infty\right)$.



$f(x)=ax^2+bx+c,\ a>0$



$f(x)=ax^2+bx+c,\ a<0$

Semnul funcției de gradul al II-lea:

$\Delta>0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		∞
$f(x)$	$\operatorname{sgn}(a)$	0	$-\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$		

$\Delta=0$:

x	$-\infty$		$x_1=x_2$		∞
$f(x)$	$\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$		

$\Delta<0$:

x	$-\infty$		∞
$f(x)$	$\operatorname{sgn}(a)$		

1.9. Operații cu puteri și radicali

Definiție. $x^0=1$, $(\forall)x\in\mathbb{R}^*$; $x^n=\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$; $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$, $(\forall)x\in\mathbb{R}^*$.

Definiție. $x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$, $(\forall)m, n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 2$, $(\forall)x\in\mathbb{R}_+^*$. *Proprietăți*: 1) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$, $a, b\geq 0$, $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 2$; 2) $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}$, $a\geq 0$, $b>0$, $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 2$; 3) $\sqrt[mn]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^p}$, $a>0$, $m, n, p\in\mathbb{Z}$, $m, n\geq 2$; 4) $\sqrt[n]{a^p}\cdot\sqrt[n]{b^q}=$ $=\sqrt[mn]{a^{pn}\cdot b^{qm}}$, $a, b>0$, $m, n, p, q\in\mathbb{Z}$, $m, n\geq 2$; 5) $\sqrt{a^2}=|a|$, $a\in\mathbb{R}$.

1.10. Logaritmul unui număr real pozitiv

Definiție. Fie $a,\ b>0,\ a\neq 1$. Soluția (unică) a ecuației $a^x=b$ se numește *logaritm în baza a din b* și se notează cu $\log_a b$. *Proprietăți.* 1) $\log_a b=c \Leftrightarrow a^c=b, (\forall)a,b>0,\ a\neq 1$; 2) $\log_a 1=0,\ \log_a a=1, (\forall)a>0, a\neq 1$; 3) $\log_a b>0 \Leftrightarrow a,\ b\in(0,1)$ sau $a,\ b\in(1,\infty)$; 4) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y, (\forall)a,\ x,\ y>0,\ a\neq 1$; 5) $\log_a(x:y)=\log_a x-\log_a y$, $(\forall)a,\ x,\ y>0,\ a\neq 1$; 6) $\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x,\ (\forall)a,\ x>0,\ a\neq 1,\ (\forall)\ \alpha\in\mathbb{R}$; 7) $\log_{a^\beta} x=\frac{1}{\beta}\log_a x,\ (\forall)a,\ x>0,\ a\neq 1$, $(\forall)\ \beta\in\mathbb{R}^*$; 8) $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},\ (\forall)a,\ b,\ c>0,\ a,\ c\neq 1$; 9) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a},\ (\forall)a,\ b>0, a,\ b\neq 1$.

1.11. Numere complexe

Mulțimea numerelor complexe. Mulțimea numerelor complexe este $\mathbb{C}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}, i^2=-1\}$. Dacă $z=a+bi\in\mathbb{C}$, atunci *partea reală* a lui z este $\operatorname{Re} z=a$, iar *partea imaginară* este $\operatorname{Im} z=b$. Două numere complexe $z_1=a_1+b_1i$ și $z_2=a_2+b_2i$ sunt egale dacă $a_1=a_2$ și $b_1=b_2$. Dacă într-un plan $\mathcal{P}$ alegem un sistem cartezian ortogonal, atunci putem defini o funcție pe $\mathbb{C}$ cu valori în $\mathcal{P}$, care asociază oricărui număr $z=a+bi\in\mathbb{C}$ punctul M de coordonate $(a,\ b)$. Această funcție este bijectivă. Punctul M se numește *imaginea* lui z, iar z se numește *afixul* lui M.

Puterile unității imaginare, i: $i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i,\ (\forall)\ k\in\mathbb{N}$.

Conjugatul unui număr complex. Dacă $z=a+bi\in\mathbb{C}$, atunci, *conjugatul* său este $\bar{z}=a-bi$. *Proprietăți.* 1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$; 2) $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$; 3) $\overline{(z_1:z_2)}=\bar{z}_1:\bar{z}_2$; 4) $\bar{z}^n=(\bar{z})^n,\ n\in\mathbb{N}^*$; 5) $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}$; 6) $z\in\mathbb{R}\cdot i\Leftrightarrow z=-\bar{z}$.

Modulul unui număr complex. Dacă $z=a+bi\in\mathbb{C}$, atunci *modulul* său este $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. *Proprietăți.* 1) $|z|\in\mathbb{R}_+,\ (\forall)z\in\mathbb{C}$; 2) $|z|=0\Leftrightarrow z=0$ 3) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$; 4) $|z_1:z_2|=|z_1|:|z_2|$; 5) $|z^n|=|z|^n,\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$; 6) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$; 7) $z\cdot\bar{z}=|z|^2$.

Forma trigonometrică a unui număr complex. Orice număr $z=a+bi\in\mathbb{C}$, se poate scrie: $z=r(\cos t+i\sin t)$, unde r este modulul său, iar $t=\mathrm{m}(\sphericalangle xOM)\in[0,2\pi)$ este *argumentul redus*. Dacă M este imaginea lui z, iar unghiul t este orientat direct trigonometric, atunci: $t=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+k\pi$, unde $k=0$ dacă $M\in C_I$ (cadranul I), $k=1$ dacă $M\in C_{II}\cup C_{III}$ și $k=2$ dacă $M\in C_{IV}$. *Operații cu numere complexe scrise în formă trigonometrică:* 1) $z_1\cdot z_2=r_1r_2[\cos(t_1+t_2)+i\sin(t_1+t_2)]$; 2) $z_1:z_2=(r_1:r_2)[\cos(t_1-t_2)+i\sin(t_1-t_2)]$; 3) $z^n=r^n(\cos nt+i\sin nt),\ n\in\mathbb{R}^*$ (formula lui Moivre); 4) soluțiile ecuației $z^n=r(\cos t+i\sin t),\ z\in\mathbb{C}\left(n\in\mathbb{N}, n\geq 2, r\in\mathbb{R}_+^*, t\in[0,2\pi)\right)$ sunt:

$$z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t+2k\pi}{n}+i\sin\frac{t+2k\pi}{n}\right),\ k=\overline{0,n-1}.$$

1.12. Combinatorică

Permutări. Aranjamente. Combinări. Fie A o mulțime finită cu n elemente și k un număr natural astfel încât $1\leq k\leq n$. Se numește *permutare* a mulțimii A orice mulțime ordonată care se poate forma cu elementele

Scanned with OKEN Scanner

sale. Se numește *aranjament de n elemente luate câte k* (al mulțimii A) orice mulțime ordonată alcătuită din k elemente ale lui A. Se numește *combinare de n elemente luate câte k* (a mulțimii A) orice submulțime (neordonată) a lui A formată din k elemente.

Numere combinatoriale. Numărul permutărilor de n obiecte este $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$; $0! = 1$. Numărul aranjamentelor de n obiecte, luate câte k este $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $(\forall)\, k, n \in \mathbb{N}$, $k \le n$. Numărul combinărilor de n obiecte, luate câte k este $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $(\forall)\, k, n \in \mathbb{N}$, $k \le n$. Proprietăți. 1) $C_n^k = C_n^{n-k}$; 2) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$; 3) $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$. **Formula binomului (Newton).** $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n b^n$. Termenul general al dezvoltării este $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, $k = \overline{0,n}$.

1.13. Matematici aplicate

Dobânzi. Dacă se depune în bancă suma S cu dobândă simplă (fără capitalizare), valoarea depozitului după n luni este $S_n = S + \frac{p \cdot n}{100 \cdot 12} \cdot S$, unde p este procentul anual al dobânzii. Dacă se depune în bancă suma S cu dobândă compusă (cu capitalizare), suma aflată în final în depozit după n ani este $S_n = S \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, unde p este procentul anual al dobânzii. **Serii statistice.** Dacă o anumită caracteristică ia valorile $x_1, x_2, \ldots, x_k$ cu frecvențele relative $n_1, n_2, \ldots, n_k$, atunci *media* seriei este $\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i}$, *abaterea medie liniară* este $d = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| n_i}{\sum n_i}$, iar *abaterea medie pătratică* este $\sigma = \sqrt{s^2}$, unde s^2 este *dispersia*, $s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{\sum n_i}$ (sumele au atâția termeni câte valori ia caracteristica).

1.14. Probabilități

În cazul experiențelor aleatoare cu un număr finit de cazuri posibile, egal probabile, probabilitatea unui eveniment A se calculează după regula $P = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile lui } A}{\text{numărul cazurilor posibile}}$. *Proprietăți.* 1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; 2) Dacă evenimentele A și B sunt *incompatibile* (nu se pot realiza simultan), atunci $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. În caz de compatibilitate, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; 3) Evenimentele A și B sunt *independente* dacă $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Avem $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$. **Schema lui Bernoulli.** Dacă un eveniment are probabilitatea p și notăm $q = 1 - p$, probabilitatea ca evenimentul să se realizeze de k ori și să nu se realizeze de $n-k$ ori (în n repetări ale experienței) este $C_n^k p^k q^{n-k}$. **Variabile aleatoare.** Dacă variabila aleatoare X ia valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cu probabilitățile $p_1, p_2, \ldots, p_n$, unde $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, atunci *media* sa este $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, iar *dispersia* este $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Scanned with OKEN Scanner

1.15. Permutări

O *permutare de ordin n* este o funcție bijectivă $\sigma: A \to A$, unde $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. În general, vom scrie o permutare vizualizând legea de corespondență a funcției: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Notăm cu S_n mulțimea tuturor permutărilor de ordin n; card $S_n = n!$. *Semnul unei permutări.* O pereche $(i, j) \in A \times A$ cu $i < j$ se numește *inversiune* a lui σ dacă $\sigma(j) < \sigma(i)$. Notăm cu $m(\sigma)$ numărul de inversiuni ale lui σ; atunci semnul permutării σ este $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$. O permutare se numește *pară* dacă are semnul +1 și se numește *impară* dacă are semnul −1. Semnul produsului a două permutări este egal cu produsul semnelor acestora.

1.16. Determinanți

Dacă $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ este o matrice pătratică de ordin n, *determinantul* său este numărul $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$. *Cazuri particulare.* Dacă $n = 2$, atunci $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Dacă $n = 3$, atunci $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$.

Determinantul produsului a două matrice pătratice de același ordin este egal cu produsul determinanților celor două matrice: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

1.17. Inversa unei matrice

Dacă $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ este o matrice pătratică de ordin n. Spunem că A este *inversabilă* dacă există o matrice pătratică de ordin n, pe care o notăm A^{-1} și o numim *inversa* lui A, astfel încât $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$, unde I_n este matricea unitate de ordin n. O matrice pătratică este inversabilă dacă și numai dacă $\det(A) \neq 0$. În acest caz, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$, unde A^* este *adjuncta* lui A. Numărul $A_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}$ se numește *complementul algebric* al elementului a_{ij}, d_{ij} fiind determinantul matricei obținute din A prin eliminarea liniei i și a coloanei j. A^* este matricea transpusă a complementilor algebrici: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

1.18. Rangul unei matrice

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$ o matrice cu elemente numere complexe și r un număr natural, $1 \le r \le \min(m, n)$. Se numește *minor de ordinul r* al matricei A determinantul unei matrice formate cu elementele situate la intersecțiile a r linii și r coloane ale matricei A. Numărul natural r este *rangul* matricei A dacă există un minor nenul de ordinul r al lui A, iar toți minorii de ordin mai mare decât r, dacă există, sunt nuli. Matricea A are rangul r dacă și numai dacă există un minor nenul de ordin r al lui A, iar toți minorii de ordin $r + 1$ obținuți prin bordarea acestui minor cu elementele corespunzătoare ale unei linii și ale unei coloane rămase, dacă există, sunt nuli.

Scanned with OKEN Scanner

1.19. Sisteme liniare

Forma generală a unui sistem liniar de m ecuații cu n necunoscute este: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Definim *matricea sistemului* A, *matricea extinsă* $\overline{A}$, *matricea termenilor liberi* B și *matricea necunoscutelor* X:

$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n}\ b_1 \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n}\ b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn}\ b_m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Sistemul are forma matriceală $AX = B$.

Teorema lui Cramer. Dacă $m = n$ și $\Delta = \det(A) \neq 0$, atunci sistemul $AX = B$ este compatibil determinat, iar unica sa soluție are componentele $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, unde Δ_i se obține înlocuind în Δ coloana i cu coloana termenilor liberi.

Teorema Kronecker–Capelli. Un sistem de ecuații liniare este compatibil dacă și numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse.

Teorema lui Rouché. Un sistem liniar este compatibil dacă și numai dacă toți minorii caracteristici sunt nuli.

Algoritm de rezolvare a sistemelor liniare de m ecuații cu n necunoscute:

I Dacă $m = n$ și $\det A \neq 0$, sistemul este compatibil determinat și se rezolvă cu regula lui Cramer.

II Dacă $m \neq n$ sau $m = n$, dar $\det(A) = 0$, atunci:

1) calculăm rangul lui A, fixând minorul principal Δ_p (minorul nenul care dă rangul);

2) calculăm minorii caracteristici Δ_c; ei se obțin din minorul principal prin bordare cu termeni liberi și câte una dintre liniile rămase în afara lui Δ_p;

3) dacă există un minor caracteristic nenul, sistemul este incompatibil; dacă toți minorii caracteristici sunt nuli sau dacă nu există minori caracteristici, atunci sistemul este compatibil; pentru a-l rezolva, păstrăm doar ecuațiile corespunzătoare lui Δ_p (numite ecuații principale) și doar necunoscutele corespunzătoare lui Δ_p (numite necunoscute principale); dăm valori literale celorlalte necunoscute și le trecem în dreapta; sistemul rămas este de tip Cramer și se rezolvă ca atare.

1.20. Legi de compoziție

Se numește *lege de compoziție* (*operație*) pe mulțimea M orice funcție $*: M \times M \to M$. O submulțime nevidă H a lui M se numește *parte stabilă* a lui M în raport cu operația $*$ dacă $(\forall) x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$. Operația $*$ se numește *asociativă* dacă $(x * y) * z = x * (y * z), (\forall) x, y, z \in M$. Operația $*$ se numește *comutativă* dacă $x * y = y * x, (\forall) x, y \in M$. Operația $*$ admite *element neutru* dacă există $e \in M$ astfel încât $x * e = e * x = x, (\forall) x \in M$. În cazul în care $*$ are element neutru, $x \in M$ se numește *element simetrizabil* dacă există un element $x' \in M$, numit *simetricul* lui x, astfel încât $x * x' = x' * x = e$.

1.21. Structuri algebrice

Structuri algebrice cu o operație. $(M, *)$ se numește *monoid* dacă: 1) $*$ este lege de compoziție pe M; 2) $*$ este asociativă, 3) $*$ are element neutru. Dacă, în plus, $*$ este comutativă, atunci $(M, *)$ se numește *monoid comutativ*.

Scanned with OKEN Scanner

$(G,*)$ se numeşte *grup* dacă: 1) $*$ este lege de compoziţie pe G; 2) $*$ este asociativă; 3) $*$ are element neutru; 4) orice element din G este simetrizabil. Dacă, în plus, $*$ este comutativă, atunci $(G,*)$ se numeşte *grup abelian*.
Fie $(G,*)$ un grup, având elementul neutru e. O submulţime nevidă $H \subseteq G$ se numeşte *subgrup* al lui $(G,*)$ dacă: $1)(\forall)x,y \in H \Rightarrow x*y \in H$; $2)(\forall)x \in H \Rightarrow x' \in H$, unde x' este simetricul din G al lui x.
Fie $(G,*)$ şi $(G',\circ)$ două grupuri. O funcţie $f: G \to G'$ cu proprietatea că $f(x*y)=f(x)\circ f(y),(\forall)x,y \in G$, se numeşte *morfism de grupuri*. Dacă, în plus, f este bijectivă, atunci f se numeşte *izomorfism de grupuri*, iar grupurile G şi G' se numesc *izomorfe*, caz în care scriem $G \simeq G'$.
Fie $(G,\cdot)$ un grup. Cardinalul mulţimii G se numeşte *ordinul grupului*. *Ordinul elementului* $x \in G$ este cel mai mic număr natural nenul n (dacă există) cu proprietatea $x^n = e$. Dacă nu există un astfel de număr, spunem că x are ordinul infinit.

Structuri algebrice cu două operaţii

$(A,+,\cdot)$ se numeşte *inel* dacă: 1) $(A,+)$ este grup abelian; 2) $(A,\cdot)$ este monoid; 3) operaţia $\cdot$ este distributivă faţă de $+$, adică $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$ şi $(y+z)\cdot x=(y\cdot x)+(z\cdot x),(\forall)x,y,z \in A$. Dacă, în plus, operaţia $\cdot$ este comutativă, $(A,+,\cdot)$ se numeşte *inel comutativ*. Spunem că elementul $x \in A$ este *divizor al lui zero* dacă $x \neq 0$ şi există $y \neq 0$ astfel încât $x\cdot y = 0$ (am notat cu 0 elementul neutru al operaţiei $+$). Un inel comutativ, cu cel puţin două elemente şi fără divizori ai lui zero se numeşte *domeniu de integritate*.
Un inel $(K,+,\cdot)$ se numeşte *corp* dacă orice element diferit de 0 al lui K este simetrizabil în raport cu operaţia $\cdot$.
Fie $(A,+,\cdot)$ şi $(A',+,\cdot)$ două inele. O funcţie $f: A \to A'$ cu proprietăţile: 1) $f(x+y)=f(x)+f(y),(\forall)x,y \in A$; 2) $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y),(\forall)x,y \in A$; 3) $f(1_A)=1_{A'}$ se numeşte *morfism de inele*; dacă funcţia f este şi bijectivă, atunci ea se numeşte *izomorfism de inele*. Dacă între inelele A şi A' există, cel puţin, un izomorfism de inele, spunem că inelele sunt *izomorfe* şi scriem $A \simeq A'$. Fie K şi K' două corpuri. Un izomorfism de inele $f: K \to K'$ se numeşte *izomorfism de corpuri*.

Inelele $\mathbb{Z}_n$. $\mathbb{Z}_n=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},...,\widehat{n-1}\}$ se structurează ca inel în raport cu adunarea şi înmulţirea modulo n. Un element $\hat{k} \in \mathbb{Z}_n$ este inversabil dacă şi numai dacă $(k,n)=1$. În cazul în care $(k,n) \neq 1$, elementul nenul $\hat{k}$ este divizor al lui zero. Inelul $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ este corp dacă şi numai dacă n este număr prim.

1.22. Inele de polinoame

Fie A un inel comutativ. Expresiile formale de tipul $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0$, unde $a_i \in A$ şi $n \in \mathbb{N}$, se numesc *polinoame în nedeterminata X cu coeficienţi în A*. Mulţimea lor se notează cu $A[X]$. Dacă polinomul $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0$ are cel puţin un coeficient a_i nenul, atunci cel mai mare $n \in \mathbb{N}$ pentru care $a_n \neq 0$ se numeşte *gradul polinomului f*; dacă însă toţi coeficienţii lui f sunt nuli, adică $f=0$ (*polinomul nul*), atunci gradul său este $-\infty$. Două polinoame, $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0$ şi $g=b_mX^m+b_{m-1}X^{m-1}+...+b_1X+b_0$ din $A[X]$ sunt egale dacă $a_i=b_i,(\forall)i \in \mathbb{N}$ (considerăm $a_i=0$, *dacă* $i>n$ şi $b_i=0$, dacă $i>m$). Mulţimea $A[X]$, împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire a polinoamelor (pe care le presupunem cunoscute) formează un inel comutativ, numit *inelul polinoamelor peste A*. Inelul $A[X]$ este domeniu de integritate dacă şi numai dacă inelul A este domeniu de integritate, caz în care are loc egalitatea gradelor:

Scanned with OKEN Scanner

$\text{grad}(f+g) = \text{grad}\, f + \text{grad}\, g$. Elementul $a \in A$ se numeşte *rădăcină* a polinomului f dacă $f(a) = 0$. Dacă A este domeniu de integritate, $f \in A[X]$, $\text{grad}\, f \le n$ şi polinomul f are (cel puţin) $n+1$ rădăcini (distincte) în inelul A, atunci f este polinomul nul.

Teorema împărţirii cu rest. Fie $f, g \in K[X]$, cu $g \neq 0$ şi K un corp comutativ. Atunci există şi sunt unic determinate două polinoame $q, r \in K[X]$ cu proprietăţile: 1) $f = gq + r$; 2) $\text{grad}\, r < \text{grad}\, g$.

Aritmetica inelelor $K[X]$ (K este corp comutativ).

Definiţie. Fie $f, g \in K[X]$. 1) Spunem că g *divide pe* f, dacă există $h \in K[X]$ astfel încât $f = gh$ (notăm $g \mid f$ sau $f \vdots g$). 2) Spunem că f *şi* g *sunt asociate* (*în divizibilitate*) dacă $f \mid g$ şi $g \mid f$ (scriem $f \sim g$). 3) Spunem că $d \in K[X]$ este *cel mai mare divizor comun* al polinoamelor f şi g dacă *i)* $d \mid g$, $d \mid f$ şi *ii)* $(\forall) d' \in K[X]$ cu $d' \mid f$, $d' \mid g \Rightarrow d' \mid d$.

Teorema lui Bézout. Dacă $f \in K[X]$ şi $a \in K$, atunci: 1) restul împărţirii lui f prin $X - a$ este $f(a)$; 2) a este rădăcină pentru f dacă şi numai dacă $X - a$ divide pe f.

Definiţie. Un polinom $p \in K[X]$, neasociat cu 0 sau 1 (ceea ce este echivalent cu $\text{grad}\, f \ge 1$), se numeşte *ireductibil* în $K[X]$ (sau ireductibil peste K) dacă, făcând abstracţie de asocieri, singurii săi divizori sunt 1 şi p. Un polinom din $K[X]$, neasociat cu 0 sau 1, care nu este ireductibil în $K[X]$, se numeşte *reductibil* în $K[X]$.

Teorema de descompunere în factori ireductibili. Orice polinom din $K[X]$, neasociat cu 0 sau 1, se descompune în mod unic (abstracţie făcând de asocieri şi de ordinea factorilor) într-un produs de polinoame ireductibile din $K[X]$.

Polinoame cu coeficienţi complecşi.

Teorema fundamentală a algebrei (d'Alembert–Gauss). Orice polinom cu coeficienţi complecşi, de grad mai mare sau egal cu unu, are cel puţin o rădăcină în $\mathbb{C}$.

Singurele polinoame ireductibile din $\mathbb{C}[X]$ sunt cele de gradul întâi.

Orice polinom din $\mathbb{C}[X]$ de grad $n, n \ge 1$, are exact n rădăcini în $\mathbb{C}$ (nu neapărat distincte) $x_1, x_2, \ldots, x_n$. În plus, polinomul f se descompune în $\mathbb{C}[X]$ astfel: $f = a_n(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_n)$, unde a_n este coeficientul dominant al lui f.

Rădăcini multiple. Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$, atunci $a \in \mathbb{C}$ se numeşte *rădăcină multiplă de ordinul* p pentru f dacă $(X - a)^p$ divide f, dar $(X - a)^{p+1}$ nu divide f. Numărul $a \in \mathbb{C}$ este rădăcină multiplă de ordinul p pentru polinomul f dacă şi numai dacă $f(a) = 0, f'(a) = 0, \ldots, f^{(p-1)}(a) = 0$, dar $f^{(p)}(a) \neq 0$.

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinom de grad $n \ge 1$, având rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_k$ multiple de ordine $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$. Atunci descompunerea lui f în factori liniari este $f = a_n(X - x_1)^{\alpha_1}(X - x_2)^{\alpha_2}\ldots(X - x_k)^{\alpha_k}$, unde a_n este coeficientul dominant al lui f.

Polinoame cu coeficienţi reali. Polinoamele ireductibile din $\mathbb{R}[X]$ sunt cele de gradul 1 şi cele de gradul al II-lea care nu au rădăcini în $\mathbb{R}$. Dacă $f \in \mathbb{R}[X]$, $f \neq 0$ şi $z_0 = a + bi$, $b \neq 0$, este o rădăcină complexă a lui f, atunci şi $\bar{z}_0 = a - bi$ este rădăcină a lui f, iar cele două rădăcini au acelaşi ordin de multiplicitate. Orice polinom cu coeficienţi reali are un număr par de rădăcini complexe nereale. Orice polinom cu coeficienţi reali de grad impar are cel puţin o rădăcină reală.

Scanned with OKEN Scanner

Polinoame cu coeficienți raționali. Dacă $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f \neq 0$ și $x_0 = a + \sqrt{b}$ $(a,b \in \mathbb{Q},\ b > 0,\ \sqrt{b} \notin \mathbb{Q})$ este o rădăcină a lui f, atunci și $a - \sqrt{b}$ este rădăcină a lui f, iar cele două rădăcini au același ordin de multiplicitate.

Polinoame cu coeficienți întregi. Dacă $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$, $a_n \neq 0$ admite o rădăcină rațională $x_0 = \frac{p}{q}$ $(p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ (p,q) = 1)$, atunci p divide termenul liber (adică $p \mid a_0$), iar q divide coeficientul dominant (adică $q \mid a_n$).

Relațiile lui Viète. Dacă $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt rădăcinile polinomului $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$, $a_n \neq 0$, atunci au loc relațiile (lui Viète): $x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$, ..., $x_1x_2...x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$. Dacă numerele complexe $x_1, x_2, ..., x_n$ verifică relațiile $x_1 + x_2 + ... + x_n = S_1$, $x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = S_2$, ..., $x_1x_2...x_n = S_n$, atunci ele sunt rădăcinile polinomului $f = X^n - S_1X^{n-1} + S_2X^{n-2} + ... + (-1)^n S_n$.

2. GEOMETRIE

2.1. Punctul în plan

Considerăm un sistem cartezian ortogonal în plan și pentru orice punct P din plan notăm cu (x_P, y_P) coordonatele sale în raport cu sistemul ales. Lungimea segmentului AB este egală cu $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Coordonatele mijlocului M al segmentului AB sunt: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$. Coordonatele punctului P, de pe segmentul AB, cu proprietatea că $\frac{PA}{PB} = k$ sunt: $x_P = \frac{x_A + kx_B}{1+k}, y_P = \frac{y_A + ky_B}{1+k}$. Coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC sunt $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

2.2. Vectori în plan

Fie $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ o bază ortonormată asociată unui reper cartezian ortogonal din plan. *Vectorul de poziție* al punctului $A(x_A, y_A)$ este $\overrightarrow{r_A} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$. Coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ sunt $(x_B - x_A, y_B - y_A)$, adică $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$. Suma vectorilor $\vec{u}(a,b)$ și $\vec{v}(a',b')$ este $(\vec{u} + \vec{v})(a + a', b + b')$. Produsul dintre vectorul $\vec{v}(a,b)$ și scalarul t este $(t \cdot \vec{v})(ta, tb)$. Panta direcției vectorului $\vec{v}(a,b)$ este $m_{\vec{v}} = \frac{b}{a}$, iar a vectorului $\overrightarrow{AB}$ este $m_{\overrightarrow{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Condiții de paralelism (coliniaritate) pentru vectorii $\vec{u}(a,b)$ și $\vec{v}(a',b')$: $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow (\exists) t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u} = t \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Leftrightarrow m_{\vec{u}} = m_{\vec{v}}$.

Scanned with OKEN Scanner

2.3. Produsul scalar a doi vectori

Produsul scalar al vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ este numărul real $\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{cases}|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}), \text{ dacă } \vec{u}\neq\vec{0} \text{ şi } \vec{v}\neq\vec{0}\\ 0 \qquad\qquad\quad \text{, dacă } \vec{u}=\vec{0} \text{ sau } \vec{v}=\vec{0}\end{cases}$.

Dacă $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ şi $\vec{v}=a'\vec{i}+b'\vec{j}$, atunci $\vec{u}\cdot\vec{v}=aa'+bb'$. Condiţii de perpendicularitate pentru vectorii $\vec{u}(a,b)$ şi $\vec{v}(a',b')$: $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow aa'+bb'=0$. Măsura unghiului dintre doi vectori nenuli se poate afla cu ajutorul formulei $\cos\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{aa'+bb'}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2}}$.

2.4. Teoreme remarcabile în triunghi

Teorema lui Thales: Dacă M şi N sunt puncte pe laturile AB, respectiv AC ale triunghiului ABC, atunci dreptele MN şi BC sunt paralele dacă şi numai dacă $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{AN}{NC}$.

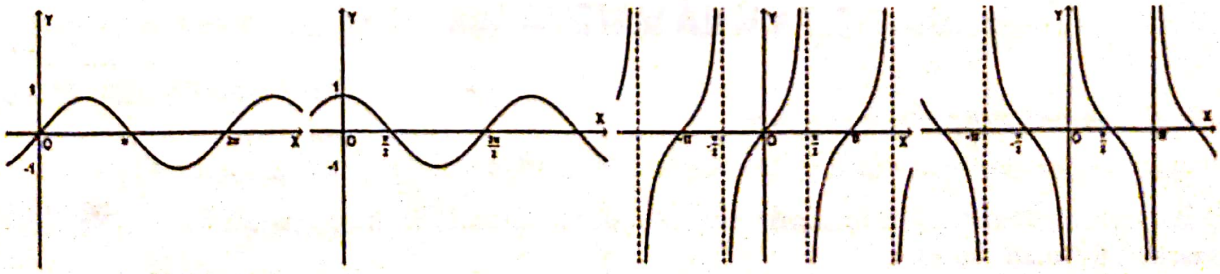
Teorema bisectoarei: Semidreapta AD, $D\in(BC)$, este bisectoare a triunghiului ABC dacă şi numai dacă $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.

Teorema lui Menelaus: Pe dreptele suport BC, CA, AB ale laturilor triunghiului ABC se consideră punctele M, N, respectiv P (două puncte pe laturi şi al treilea pe prelungirea laturii rămase sau toate cele trei puncte pe prelungirile laturilor). Punctele M, N, P sunt coliniare dacă şi numai dacă $\dfrac{MB}{MC}\cdot\dfrac{NC}{NA}\cdot\dfrac{PA}{PB}=1$.

Teorema lui Ceva: Pe dreptele suport BC, CA, AB ale laturilor triunghiului ABC se consideră punctele M, N, respectiv P (toate cele trei puncte să fie pe laturi, sau numai unul dintre ele pe o latură şi celelalte două pe prelungiri). Dreptele AM, BN şi CP sunt concurente dacă şi numai dacă $\dfrac{MB}{MC}\cdot\dfrac{NC}{NA}\cdot\dfrac{PA}{PB}=1$.

2.5. Funcţiile trigonometrice

Funcţiile trigonometrice sunt: $\sin:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $\cos:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $\operatorname{tg}:\mathbb{R}-\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$, $\operatorname{ctg}:\mathbb{R}-\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$. Ele sunt periodice, funcţiile sinus, cosinus au perioada principală 2π, iar funcţiile tangentă, cotangentă au perioada principala π. Funcţiile sinus, tangentă şi cotangentă sunt impare, iar cosinus este pară. Avem: $\sin^2 t+\cos^2 t=1,(\forall)t\in\mathbb{R}$; $\operatorname{tg}t=\dfrac{\sin t}{\cos t}$, $(\forall)t\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; $\operatorname{ctg}t=\dfrac{\cos t}{\sin t}$, $(\forall)t\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$; $\operatorname{ctg}t=\dfrac{1}{\operatorname{tg}t},(\forall)t\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{k\pi}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; $\sin t=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)$, $\cos t=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right),(\forall)t\in\mathbb{R}$.



$f(x)=\sin x$ $f(x)=\cos x$ $f(x)=\operatorname{tg}x$ $f(x)=\operatorname{ctg}x$

Scanned with OKEN Scanner

2.6. Formule trigonometrice

Valorile funcțiilor trigonometrice pentru câteva unghiuri remarcabile:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\operatorname{tg} x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	/
$\operatorname{ctg} x$	/	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Sume și diferențe de unghiuri: $\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$; $\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\sin b\cos a$;

$$\operatorname{tg}(a\pm b)=\frac{\operatorname{tg}a\pm\operatorname{tg}b}{1\mp\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$$

Formule pentru unghi dublu:

$\sin 2x=2\sin x\cos x$; $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$; $\operatorname{tg}2x=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$; $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$;

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

Transformarea sumelor în produse:

$$\sin a\pm\sin b=2\sin\frac{a\pm b}{2}\cos\frac{a\mp b}{2};\quad \cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2};\quad \cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}.$$

Transformarea produselor în sume:

$2\sin a\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b)$;

$2\cos a\cos b=\cos(a+b)+\cos(a-b)$;

$2\sin a\sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b)$.

Substituțiile universale: $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, unde $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

2.7. Funcții trigonometrice inverse

Funcția $\arcsin:[-1,1]\to\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ este strict crescătoare și impară. Funcția $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$ este strict descrescătoare. Funcția $\operatorname{arctg}:\mathbb{R}\to\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ este strict crescătoare și impară. Funcția $\operatorname{arcctg}:\mathbb{R}\to(0,\pi)$ este strict descrescătoare. *Proprietăți.* 1) $\sin(\arcsin x)=x,(\forall)x\in[-1,1]$; $\arcsin(\sin x)=x$, $(\forall)x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$;

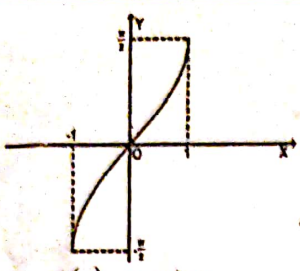
2) $\cos(\arccos x)=x$, $(\forall)x\in[-1,1]$; $\arccos(\cos x)=x,(\forall)x\in[0,\pi]$; 3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)=x,(\forall)x\in\mathbb{R}$;

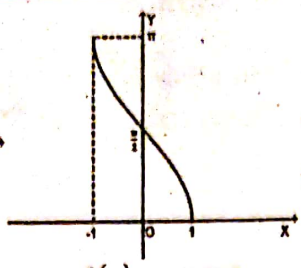
$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)=x$, $(\forall)x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}x)=x,(\forall)x\in\mathbb{R}$; $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}x)=x,(\forall)x\in(0,\pi)$;

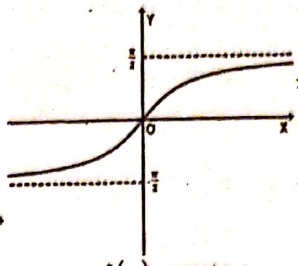
5) $\sin(\arccos x)=\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, $(\forall)x\in[-1,1]$; 6) $\arccos(-x)=\pi-\arccos x,(\forall)x\in[-1,1]$;

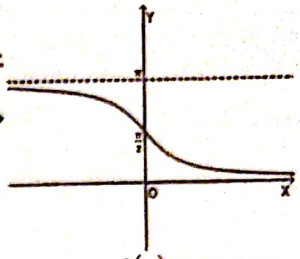
$\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg}x,(\forall)x\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner


$f(x)=\arcsin x$


$f(x)=\arccos x$


$f(x)=\operatorname{arctg} x$


$f(x)=\operatorname{arc ctg} x$

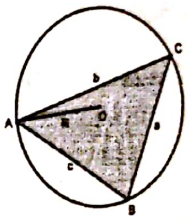
2.8. Ecuații trigonometrice

1) $\sin x=a, a\in[-1,1] \Leftrightarrow x\in\left\{(-1)^k \arcsin a+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$; 2) $\cos x=a, a\in[-1,1] \Leftrightarrow x\in\left\{\pm\arccos a+2k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$;

3) $\operatorname{tg} x=a, a\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x\in\left\{\operatorname{arctg} a+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$; 4) $\operatorname{ctg} x=a, a\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x\in\left\{\operatorname{arc ctg} a+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2.9. Aplicații ale trigonometriei în geometrie

Teorema cosinusului: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.



Teorema sinusurilor: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

Teorema medianei: $m_a^2=\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$.

Exprimarea unghiurilor funcție de laturi:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Formule pentru aria triunghiului: $S=\dfrac{a\cdot h_a}{2}=\dfrac{ab\sin C}{2}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\dfrac{abc}{4R}=r\cdot p=r_a(p-a)$

2.10. Dreapta în plan

Forme pentru ecuația dreptei.

Forma canonică: $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$, unde $M(x_0,y_0)$ este punct al dreptei, iar $\vec{v}(a,b)$ este un vector director.

Forma parametrică: $\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$, unde $M(x_0,y_0)$ este punct al dreptei, iar $\vec{v}(a,b)$ este un vector director.

Forma redusă (pentru drepte neverticale): $y=mx+n$, unde $m=\dfrac{b}{a}$ este panta direcției lui $\vec{v}$.

Drepte paralele cu axele: dreptele verticale au ecuații de forma $x=a$, iar cele orizontale de forma $y=a$.

Forma generală: $ax+by+c=0$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a^2+b^2\neq 0$.

Dreapta determinată de punctele A și B: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$ (un vector director este $\overrightarrow{AB}$).

Dreapta dată prin punct și pantă: $y-y_0=m(x-x_0)$, unde $M(x_0,y_0)$ este punct al dreptei, iar m este panta.

Drepte paralele, drepte perpendiculare. Fie dreptele $d_1: y=m_1x+n_1$ și $d_2: y=m_2x+n_2$. Avem:

$d_1\parallel d_2 \Leftrightarrow m_1=m_2$ și $n_1\neq n_2$; $d_1\perp d_2 \Leftrightarrow m_1\cdot m_2=-1$.

Scanned with OKEN Scanner

Distanţe, arii.

Distanţa de la punctul $M(x_0, y_0)$ la dreapta $d: ax+by+c=0, a^2+b^2\neq 0$: $\text{dist}(M,d)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Aria triunghiului ABC: $\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}$. Punctele A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=0$.

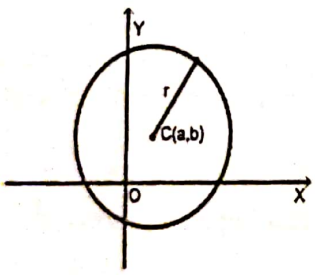
2.11. Conice

Cercul are ecuaţia $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, unde $C(a,b)$ este centrul cercului, iar r este raza sa.

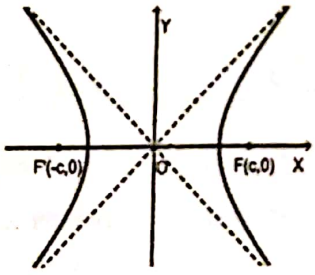
Elipsa are ecuaţia (raportată la axele de simetrie) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, unde $a > b$ sunt semiaxele elipsei. *Focarele* elipsei sunt $F(c,0)$ şi $F'(-c,0)$, unde $c^2=a^2-b^2$.

Hiperbola are ecuaţia (raportată la axele de simetrie) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, unde a şi b, a şi b, sunt semiaxele hiperbolei. *Focarele* hiperbolei sunt $F(c,0)$ şi $F'(-c,0)$, unde $c^2=a^2+b^2$. *Asimptotele* hiperbolei sunt dreptele de ecuaţii $y=\pm\dfrac{b}{a}\cdot x$.

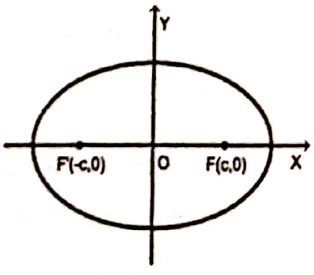
Parabola are ecuaţia (raportată la axele de simetrie) $y^2=2px$, unde p este parametrul parabolei. *Focarul* parabolei este $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$, iar *directoarea* sa este dreapta de ecuaţie $x=-\dfrac{p}{2}$.



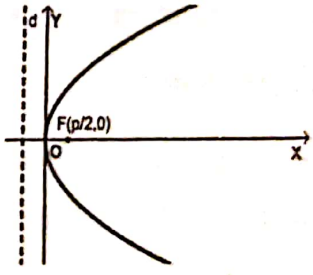
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$



$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$



$y^2=2px$

3. ANALIZĂ MATEMATICĂ

3.1. Şiruri monotone, mărginite, convergente

Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *crescător* (*descrescător*) dacă $a_n \leq a_{n+1}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$ (respectiv $a_n \geq a_{n+1}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$).

Dacă inegalităţile sunt stricte, şirul se numeşte *strict crescător* (*descrescător*). Un şir care este fie crescător, fie descrescător, se numeşte *monoton*.

Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *mărginit* dacă există $m, M\in\mathbb{R}$ astfel încât $m\leq a_n\leq M$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, *are limita* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ (scriem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$) dacă orice vecinătate a punctului ℓ conţine toţi termenii şirului, începând de la un anumit rang. Un şir se numeşte *convergent* dacă are limită finită; în caz contrar, şirul se numeşte *divergent*.

Dacă un şir are limită, atunci orice subşir al său are aceeaşi limită. Astfel, dacă un şir conţine două subşiruri cu limite diferite, acest şir nu are limită.

Orice şir convergent este mărginit.

Teorema lui Weierstrass: Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

3.2. Operaţii cu şiruri care au limite

Notaţia „$\ell_1 + \ell_2 = \ell_3$" semnifică faptul că, adunând un şir cu limita ℓ_1 cu un şir având limita ℓ_2, obţinem un şir cu limita ℓ_3. Cu litere latine de la începutul alfabetului vom nota numere reale (finite). În aceste condiţii, avem:

$a \pm b = (a \pm b);\ a + \infty = \infty;\ a - \infty = -\infty;\ \infty + \infty = \infty;\ -\infty - \infty = -\infty;$

$a \cdot b = (ab);\ a \cdot \infty = (\operatorname{sgn} a)\infty, (\forall) a \neq 0;\ a \cdot (-\infty) = -(\operatorname{sgn} a)\infty, (\forall) a \neq 0;\ \infty \cdot \infty = \infty;\ \infty \cdot (-\infty) = -\infty;\ (-\infty)\cdot(-\infty) = \infty;$

$\dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{a}{b}\right), (\forall) a, b \neq 0;\ \dfrac{0}{b} = 0, (\forall) b \neq 0;\ \dfrac{0}{\pm\infty} = 0;\ \dfrac{\pm\infty}{b} = \pm\infty(\operatorname{sgn} b), (\forall) b \neq 0;\ \dfrac{a}{0_+} = \infty(\operatorname{sgn} a),\ \dfrac{a}{0_-} = -\infty(\operatorname{sgn} a), a \neq 0;$

$\dfrac{\pm\infty}{0_+} = \pm\infty,\ \dfrac{\pm\infty}{0_-} = \mp\infty;\ \dfrac{a}{\pm\infty} = 0;$

$a^b = \left(a^b\right), (\forall) a, b > 0;\ a^0 = 1, (\forall) a > 0;\ a^\infty = 0, (\forall) a \in (0,1);\ a^\infty = \infty, (\forall) a \in (1,\infty);\ 0^\infty = 0;\ \infty^\infty = \infty.$

Nedeterminări: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

3.3. Criterii de existenţă a limitei unui şir

Criteriul cleştelui: Dacă $x_n \leq a_n \leq y_n, (\forall) n \geq n_0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ell$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Criteriul raportului: Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir cu termeni strict pozitivi. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, 1)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in (1, \infty)$ sau $\ell = \infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Lema Stolz–Cesaro: Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, iar $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict monoton şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \ell$.

Criteriul rădăcinii: Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir cu termeni strict pozitivi. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.

3.4. Limite remarcabile de şiruri

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & q \in (-1,1) \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q \in (1,\infty) \\ \text{nu există}, & q \in (-\infty,-1] \end{cases};\quad \lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases};\quad \lim_{n\to\infty} (a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0) = \begin{cases} +\infty, & a_p > 0 \\ -\infty, & a_p < 0 \end{cases};$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_s n^s + a_{s-1}n^{s-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_p n^p + b_{p-1}n^{p-1} + \ldots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} 0, & s < p \\ \pm\infty, & s > p; \\ \dfrac{a_s}{b_p}, & s = p \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) = e.$$

3.5. Limita unei funcții într-un punct

Considerăm funcția $f: D \to \mathbb{R}$ și fie x_0 un punct de acumulare al domeniului. Funcția f are limita $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ în x_0 (scriem $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$) dacă pentru orice vecinătate V a lui ℓ, există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $((\forall)\, x \in D \cap U, x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in V)$, sau oricare ar fi un șir $(x_n)_{n\geq 0} \subset D\setminus\{x_0\}$ având limita x_0, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

Teoremă. Fie o funcție $f: D \to \mathbb{R}$ și x_0 un punct de acumulare bilateral al domeniului D. Funcția f are limită în x_0 dacă și numai dacă $\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow x_0} f(x)$.

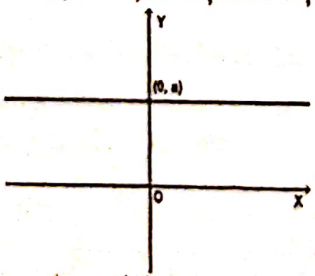
Teoremă. Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție elementară și $x_0 \in D$ un punct de acumulare al lui D. Atunci, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

3.6. Funcții elementare

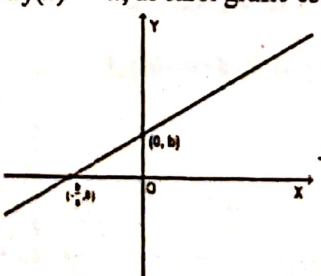
În analiza matematică sunt numite funcții elementare următoarele funcții: funcțiile polinomiale, funcțiile raționale, funcția radical, funcția putere, funcția exponențială, funcția logaritmică, funcțiile trigonometrice directe (sin, cos, tg, ctg) și funcțiile trigonometrice inverse (arcsin, arccos, arctg, arcctg) precum și funcțiile obținute din acestea prin aplicarea succesivă, de un număr finit de ori, a operațiilor algebrice, a operației de compunere și a operației de inversare.

Dacă domeniul de definiție al unei funcții elementare nu este precizat, se subînțelege că el este format din toate punctele x pentru care au sens operațiile prin care este definită funcția. Acesta este domeniul maxim de definiție al funcției. O funcție elementară poate fi definită și pe o submulțime a domeniului maxim de definiție.

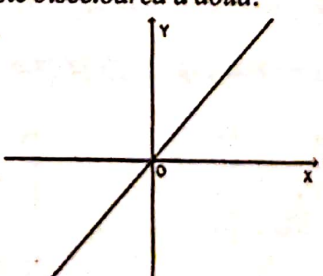
1. Funcțiile **polinomiale** sunt funcții de forma $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, unde $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$. *Exemple.* 1) Funcțiile polinomiale de gradul zero sunt *funcțiile constante* $f(x) = a$, care au ca grafic o dreaptă paralelă cu axa Ox. 2) Graficul unei *funcții polinomiale de gradul întâi*, $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$, este o dreaptă oblică. Dacă $a = 1$, $b = 0$, se obține *funcția identică* $f(x) = x$, al cărei grafic este *prima bisectoare*. Dacă $a = -1$, $b = 0$, se obține funcția $f(x) = -x$, al cărei grafic este *bisectoarea a doua*.



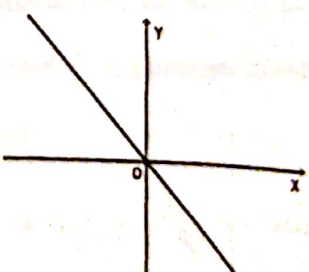
$f(x) = a$



$f(x) = ax + b,\ a \neq 0$



$f(x) = x$



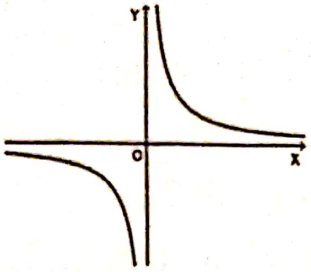
$f(x) = -x$

2. Funcțiile **raționale** sunt de forma $f: E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}$, unde P, Q sunt funcții polinomiale, $Q \neq 0$ și $E = \mathbb{R} - \{x \mid Q(x) = 0\}$ este domeniul maxim de definiție. Dacă numitorul Q este o constantă

Scanned with OKEN Scanner

nenulă, atunci funcția rațională f este o funcție polinomială. *Exemplu.* Funcția $f(x)=\frac{1}{x}$ are domeniul maxim de definiție $E=\mathbb{R}^*$ și graficul ei este o hiperbolă.

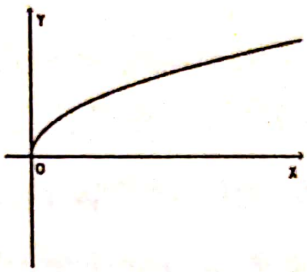
3. Funcția **radical** este de forma $f: E \to \mathbb{R}, f(x)=\sqrt[n]{x}$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și E este domeniul maxim de definiție. Dacă $n=2k$, atunci $E=[0,\infty)$ și $\operatorname{Im} f=[0,\infty)$. Dacă $n=2k+1$, atunci $E=\mathbb{R}$.



$f(x)=\frac{1}{x}$

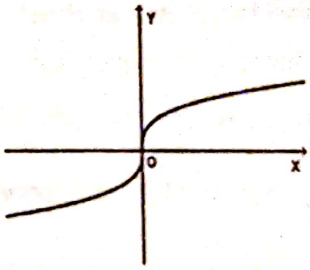
$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0;\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0;$

$\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{1}{x}=-\infty;\ \lim\limits_{x\searrow 0}\frac{1}{x}=+\infty.$



$f(x)=\sqrt[2k]{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[k]{x}=\infty;$



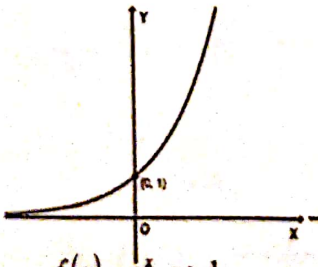
$f(x)=\sqrt[2k+1]{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[2k+1]{x}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[2k+1]{x}=\infty;$

4. Funcția **putere** este de forma $f: E \to \mathbb{R}, f(x)=x^\alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ și E este domeniul maxim de definiție. *Exemple.* 1) Dacă $\alpha=n \in \mathbb{N}^*$, se obține funcția polinomială $f(x)=x^n$ $(E=\mathbb{R})$. 2) Dacă $\alpha=-n, n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem funcția rațională $f(x)=\frac{1}{x^n}$ $(E=\mathbb{R}^*)$. 3) Dacă $\alpha \notin \mathbb{Z}$ pentru ca puterea x^α să aibă sens, trebuie ca $x>0$, deci $E=(0,\infty)$. În plus, dacă $\alpha>0$, atunci $f(x)=x^\alpha$ este definită și în $x=0$, $f(0)=0$. *Observație.* Se întâlnesc frecvent funcții putere $f(x)=x^r$ cu exponent rațional $r=\frac{m}{n}$; $m, n \in \mathbb{Z}, n \geq 2, (m,n)=1$. Acestea pot fi scrise sub forma $f(x)=\sqrt[n]{x^m}$. Se observă că, dacă m este par, sau n este impar, $f(x)=\sqrt[n]{x^m}$ are sens și pentru $x<0$, deci E poate fi extins de la $\mathbb{R}^*$ sau $\mathbb{R}$, în funcție de valorile numerelor m și n.

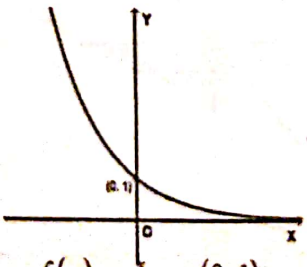
5. Funcția **exponențială** de bază a $(a>0, a\neq 1)$ este $f: \mathbb{R} \to (0,\infty), f(x)=a^x$.

6. Funcția **logaritmică** de bază a $(a>0, a\neq 1)$ este $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x)=\log_a x$.



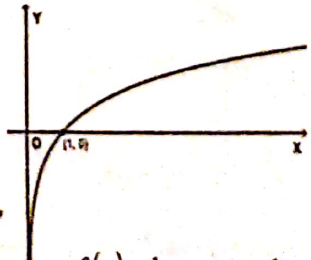
$f(x)=a^x, a>1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0, a>1$



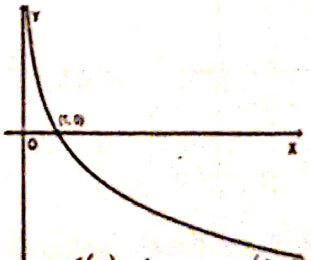
$f(x)=a^x, a\in(0,1)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=\infty, a\in(0,1)$



$f(x)=\log_a x, a>1$

$\lim\limits_{x\searrow 0}\log_a x=-\infty, a>1$



$f(x)=\log_a x, a\in(0,1)$

$\lim\limits_{x\searrow 0}\log_a x=\infty, a\in(0,1)$

Scanned with OKEN Scanner

$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty, a>1$ $\lim_{x\to\infty} a^x = 0, a\in(0,1)$ $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty, a>1$ $\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty, a\in(0,1)$

7. Funcţiile **trigonometrice directe**, sin, cos, tg, ctg nu au limită la $\pm\infty$. Avem: $\lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty$; $\lim_{x\searrow\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$;

$\lim_{x\searrow 0} \operatorname{ctg} x = \infty$; $\lim_{x\nearrow 0} \operatorname{ctg} x = -\infty$.

8. Funcţiile **trigonometrice inverse** sunt arcsin, arccos, arctg, arcctg. Avem: $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$; $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$;

$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,ctg} x = \pi$; $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arc\,ctg} x = 0$.

3.7. Limite fundamentale

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, (\forall)a>0, a\neq 1;\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x} = r, (\forall)r\in\mathbb{R}.$$

3.8. Asimptote

Asimptotă orizontală: Fie $f: D\to\mathbb{R}$ o funcţie astfel încât $+\infty$ este punct de acumulare al domeniului. Dreapta $y=\ell$ ($\ell\in\mathbb{R}$) este asimptotă orizontală spre $+\infty$ pentru graficul funcţiei f dacă $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$. Analog se defineşte noţiunea de asimptotă orizontală spre $-\infty$.

Asimptotă oblică: Fie $f: D\to\mathbb{R}$ o funcţie astfel încât $+\infty$ este punct de acumulare al domeniului. Dreapta $y = mx + n$, $m\neq 0$, este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul lui f dacă $m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ şi $n = \lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$.

Analog se defineşte noţiunea de asimptotă oblică spre $-\infty$.

O funcţie nu poate avea simultan asimptotă orizontală şi oblică spre $+\infty$ ($-\infty$).

Asimptotă verticală: Fie $f: D\to\mathbb{R}$ o funcţie, iar a un punct de acumulare al domeniului. Dreapta $x = a$ este asimptotă verticală la stânga pentru graficul funcţiei f dacă $\lim_{x\nearrow a} f(x) = \pm\infty$. Analog se defineşte noţiunea de asimptotă verticală la dreapta.

3.9. Continuitate

Fie $f: D\to\mathbb{R}$ o funcţie şi $x_0\in D$. Spunem că f este *continuă în* x_0 dacă pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 0}\subset D$, $x_n\to x_0$, şirul $f(x_n)$ are limita $f(x_0)$. Dacă x_0 este punct de acumulare al domeniului D, atunci f este continuă în x_0 dacă $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. O funcţie care este continuă în orice punct al domeniului se numeşte *continuă pe D*.

Funcţiile elementare sunt continue pe domeniile lor de definiţie maximale.

Proprietăţi ale funcţiilor continue pe un interval.

1) *Teorema lui Weierstrass*: O funcţie continuă pe un interval compact este mărginită şi îşi atinge marginile.

2) *Lema lui Bolzano*: Dacă $f: [a, b]\to\mathbb{R}$ este continuă şi $f(a)\cdot f(b) < 0$, atunci există $c\in(a, b)$ pentru care $f(c) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

3) Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ (unde I este interval) este o funcție continuă pe I, atunci ea are *proprietatea lui Darboux* pe I, adică oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ și oricare ar fi numărul c situat între $f(x_1)$ și $f(x_2)$ există, cel puțin, un punct $x_c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(x_c) = c$.

4) Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ (unde I este interval) este o funcție continuă pe I, atunci mulțimea $J = f(I)$ este un interval.

5) O funcție continuă păstrează semn constant pe orice interval pe care nu se anulează.

6) Dacă $f: I \to J$ (unde I este interval) este o funcție continuă și bijectivă, atunci $f^{-1}: J \to I$ este și ea o funcție continuă.

3.10. Derivata unei funcții într-un punct

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in D$ un punct de acumulare al domeniului. Spunem că f *are derivată* în punctul x_0 dacă există limita (în $\overline{\mathbb{R}}$) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, notată cu $f'(x_0)$. Dacă *derivata* $f'(x_0)$ există și este finită se spune că f este *derivabilă* în punctul x_0.

Dacă f este derivabilă în x_0, atunci f este continuă în x_0.

Dacă f este derivabilă în x_0, graficul funcției f admite tangentă în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$. Panta tangentei este $f'(x_0)$, iar ecuația sa este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Funcția f este derivabilă în x_0 dacă și numai dacă $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$.

Punct unghiular: este un punct $x_0 \in D$, punct de acumulare pentru D, astfel încât f este continuă în x_0 și are derivate laterale diferite în x_0, cel puțin una finită.

Punct de întoarcere: este un punct $x_0 \in D$, punct de acumulare pentru D, astfel încât f este continuă în x_0 și are derivate laterale în x_0, una egală cu $+\infty$, iar cealaltă cu $-\infty$.

3.11. Tabele de derivare

Derivatele funcțiilor elementare:

$c' = 0$

$(x^n)' = nx^{n-1}, (\forall) x \in \mathbb{R}, (\forall) n \in \mathbb{N}; \quad (x^r)' = rx^{r-1}, (\forall) x \in (0, \infty), (\forall) r \in \mathbb{R}$

$(e^x)' = e^x; \quad (a^x)' = a^x \ln a, (\forall) x \in \mathbb{R}$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}; \quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, (\forall) x \in (0, \infty)$

$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x, (\forall) x \in \mathbb{R}$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, (\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, (\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, (\forall) x \in (-1, 1)$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{x^2 + 1}; \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{x^2 + 1}, (\forall) x \in \mathbb{R}$

Scanned with OKEN Scanner

Reguli de derivare:

$(f \pm g)' = f' \pm g'$; $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$; $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$; $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$;

$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$; $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, unde $f(x) = y$.

3.12. Teoreme clasice ale analizei matematice

Teorema lui Fermat. Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție și x_0 un punct interior lui D. Dacă x_0 este punct de extrem (local) al funcției f și f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.

Consecință. Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe un interval deschis I, atunci punctele de extrem local ale funcției f se găsesc printre zerourile derivatei f' (numite și *puncte critice*).

Teorema lui Rolle. Fie o funcție $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) și $f(a) = f(b)$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Consecințe. Fie $f: I \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe un interval deschis I.

1) Între două zerouri consecutive ale funcției f se află cel puțin un zerou al derivatei f'.

2) Între două zerouri consecutive ale derivatei f' se află cel mult un zerou al funcției f.

Teorema lui Lagrange. Fie o funcție $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b), atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$.

Consecințe.

1) Dacă o funcție derivabilă are derivata nulă pe un interval, atunci ea este constantă pe acel interval.

2) Două funcții derivabile care au derivatele egale pe un interval diferă printr-o constantă.

3) Fie f o funcție derivabilă pe un interval I. Dacă $f'(x) > 0, (\forall) x \in I$, atunci f este strict crescătoare pe I. Dacă $f'(x) < 0, (\forall) x \in I$, atunci f este strict descrescătoare pe I.

4) Fie o funcție $f: I \to \mathbb{R}$, I interval și $x_0 \in I$. Dacă f este continuă pe I, derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$ și există $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci f are derivată în x_0 și $f'(x_0) = \ell$.

Teorema lui Darboux. Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe un interval I, atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux pe I.

Regulile lui l'Hospital.

Cazul $\frac{0}{0}$. Fie I un interval, x_0 punct de acumulare al lui I și f, g două funcții definite pe $I \setminus \{x_0\}$. Dacă:

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$; (ii) f și g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$; (iii) $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0, (\forall) x \in I \setminus \{x_0\}$;

(iv) există $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, atunci există și limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, egală tot cu ℓ.

Scanned with OKEN Scanner

Cazul $\frac{\infty}{\infty}$. Fie I un interval, x_0 punct de acumulare al lui I şi f, g două funcţii definite pe $I\setminus\{x_0\}$. Dacă: (i) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$; (ii) f şi g sunt derivabile pe $I\setminus\{x_0\}$; (iii) $g'(x)\neq 0,(\forall)x\in I\setminus\{x_0\}$; (iv) există $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$, atunci există şi limita $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, egală tot cu ℓ.

Rolul derivatei a doua în studiul funcţiilor

Fie f o funcţie de două ori derivabilă pe un interval I. Dacă $f''(x)\geq 0,(\forall)x\in I$, atunci f este convexă pe I. Dacă $f''(x)\leq 0,(\forall)x\in I$, atunci f este concavă pe I.

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă pe D şi $x_0\in D$. Dacă există $a,\ b\in D$ astfel încât 1) $a<x_0<b$; 2) $f''(x_0)=0$; 3) $f''<0$ pe (a,x_0) şi $f''>0$ pe (x_0,b) sau invers (adică $f''>0$ pe (a,x_0) şi $f''<0$ pe (x_0,b)), atunci x_0 este *punct de inflexiune* pentru f.

3.13. Primitive

Definiţie. Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie. O funcţie $F:I\to\mathbb{R}$ se numeşte *primitivă* a lui f dacă F este derivabilă pe I şi $F'(x)=f(x),\ (\forall)x\in I$.

Dacă F este o primitivă a funcţiei f, atunci orice funcţie de forma $F+c$, unde $c\in\mathbb{R}$, este primitivă a lui f. Mulţimea tuturor primitivelor lui f se numeşte *integrala nedefinită* a lui f şi se notează astfel: $\int f(x)dx$. Dacă F este o primitivă a lui f, atunci $\int f(x)dx=F+C$.

Orice funcţie continuă pe un interval are primitive pe acel interval. Dacă o funcţie f admite primitive pe un interval I, atunci funcţia f are proprietatea lui Darboux pe I; prin urmare, în fiecare dintre situaţiile: (i) $f(I)$ nu este interval; (ii) f are discontinuităţi de specia întâi, funcţia f nu admite primitive.

Proprietăţi. Dacă $f,g:I\to\mathbb{R}(I-\text{interval})$ sunt două funcţii cu primitive şi λ este un număr real nenul, atunci $\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$ şi $\int\lambda f(x)dx=\lambda\int f(x)dx$.

Metoda schimbării de variabilă. Fie funcţiile $I\xrightarrow{u}J\xrightarrow{f}\mathbb{R}(I,\ J\ \text{intervale})$. Dacă u este derivabilă, iar f are primitiva F, atunci funcţia $(f\circ u)\cdot u'$ are primitiva $F\circ u$, adică: $\int f(u(x))u'(x)dx=F(u(x))+C$.

Metoda integrării prin părţi. Dacă $f,\ g:I\to\mathbb{R}(I-\text{interval})$ sunt două funcţii derivabile, iar funcţia $f'g$ are primitive, atunci şi funcţia fg' are primitive şi are loc egalitatea: $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$.

Tabel de integrale nedefinite

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,(\forall)x\in\mathbb{R},\ (\forall)n\in\mathbb{N};\ \int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C,\ (\forall)x\in(0,\infty),\ (\forall)a\in\mathbb{R},\ a\neq -1$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C,\ (\forall)x\in(-\infty,0)\ \text{sau}\ x\in(0,\infty)$$

$$\int e^x dx=e^x+C,\ (\forall)x\in\mathbb{R};\ \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,\ (\forall)x\in\mathbb{R},\ (\forall)a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$$

$$\int\sin x dx=-\cos x+C,\ (\forall)x\in\mathbb{R};\ \int\cos x dx=\sin x+C,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,\ (\forall)x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right);\ \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C,\ (\forall)x \in (0,\pi)$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a>0, (\forall)x \in (-\infty,-a) \text{ sau } x \in (-a,a) \text{ sau } x \in (a,\infty)$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\ a>0,\ (\forall)x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ a>0, x \in (-a,a)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C,\ a>0,\ (\forall)x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C,\ a>0,\ (\forall)x \in (-\infty,-a) \text{ sau } x \in (a,\infty)$$

3.14. Integrala Riemann

Fie o funcție $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ și $\xi = (\xi_i)_{i=1}^n$ un sistem de puncte intermediare (s.p.i.), $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Se numește *suma Riemann* asociată funcției f, diviziunii Δ și s.p.i. ξ numărul $S(f;\Delta,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Norma diviziunii Δ este $\lambda(\Delta) = \max\{(x_i - x_{i-1}) \mid i = 1,2,\ldots n\}$. Dacă sumele $S(f;\Delta,\xi)$ se apropie oricât de mult de un număr real I când $\lambda(\Delta)\to 0$, spunem că $S(f;\Delta,\xi)$ are limita I. Limita nu trebuie să depindă de s.p.i. ξ.

Definiție. Funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se numește *integrabilă Riemann pe intervalul* $[a,b]$ dacă există și este finită $\lim_{\lambda(\Delta)\to 0} S(f;\Delta,\xi)$. În acest caz, valoarea limitei sumelor integrale se numește *integrala de la a la b a funcției f* și se notează cu $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(\Delta)\to 0} S(f;\Delta,\xi)$. Notăm mulțimea funcțiilor integrabile (Riemann) pe $[a,b]$ cu $\mathcal{R}([a,b])$.

Orice funcție continuă pe un interval $[a,b]$ este integrabilă. Orice funcție monotonă pe un interval $[a,b]$ este integrabilă. Orice funcție integrabilă pe un interval $[a,b]$ este mărginită.

Proprietăți: 1. *Liniaritate în raport cu funcția*: Dacă $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ și $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci $f+g \in \mathcal{R}([a,b])$, $\lambda f \in \mathcal{R}([a,b])$ și $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$, $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx$. 2. Fie $c \in (a,b)$. Dacă $f \in \mathcal{R}([a,c])$ și $f \in \mathcal{R}([c,b])$, atunci $f \in \mathcal{R}([a,b])$ și reciproc. În acest caz, *integrala este aditivă în raport cu intervalul*: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. 3. *Monotonie în raport cu funcția.* Dacă $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ și $f(x) \le g(x), (\forall)x \in [a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$. 4. Dacă $f \in \mathcal{R}([a,b])$, atunci $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

5. *Teorema funcției modificate.* Fie $f, g:[a, b]\to\mathbb{R}$ două funcții. Dacă $f\in\mathcal{R}([a, b])$ și g diferă de f doar într-un număr finit de puncte ale domeniului $[a, b]$, atunci $g\in\mathcal{R}([a, b])$ și integralele celor două funcții sunt egale.

3.15. Teoreme remarcabile privind integrala Riemann

Teorema Leibniz–Newton: Dacă $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ este o funcție integrabilă care admite primitive, atunci pentru orice primitivă F a lui f are loc egalitatea $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

Teorema întâia de medie: Dacă $f\in\mathcal{R}([a, b])$ și $m\le f(x)\le M, (\forall)x\in[a,b]$, atunci $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le$ $\le M(b-a)$. În particular, dacă f este continuă pe $[a, b]$, atunci există $c\in[a, b]$ astfel încât $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$.

Teorema de existență a primitivelor unei funcții continue: Dacă $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci funcția $F:[a, b]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ este primitiva lui f care se anulează în a: $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x), (\forall)x\in[a,b]$.

Formula de integrare prin părți: Dacă $f, g:[a, b]\to\mathbb{R}$ sunt două funcții derivabile cu derivatele continue, atunci are loc egalitatea $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$.

Formula de schimbare de variabilă: Dacă $\varphi:[a, b]\to J$ este o funcție derivabilă, cu derivata continuă, iar $f:J\to\mathbb{R}$ este continuă pe J, atunci $\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$.

3.16. Aplicații ale integralei Riemann

1. *Aria* mulțimii Γ a punctelor din plan mărginită de dreptele $x = a$, $x = b$, $y = 0$ și graficul funcției continue $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ este $\mathcal{A}(\Gamma)=\int_a^b|f(x)|\,dx$.

2. *Volumul corpului de rotație* C_f obținut prin rotirea graficului funcției continue $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ în jurul axei Ox este $v(C_f)=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

3. *Calculul unor limite de șiruri.* Dacă $f\in\mathcal{R}([0, 1])$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Bibliografie

1. Aramă L., Morozan T. – *Probleme de calcul diferenţial şi integral*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978
2. Brânzei D., Zanoschi A. – *Probleme cu vectori*, Editura Paralela 45, Piteşti, 1999
3. Celara C., Udrişte C., Balan Vl. – *Admiterea în enunţuri, soluţii şi bareme*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1996
4. Chiriac V., Chiriac M., Cozma D., Şova A. – *Probleme de matematică, fizică, chimie, date la concursul de admitere în treapta a II-a de liceu*, Editura Academiei, Bucureşti, 1987
5. Cohal T., Iurea Gh. – *Probleme de matematică pentru clasa a XI-a*, Editura Taida, Iaşi, 2006
6. Cohal T., Iurea Gh. – *Probleme de matematică pentru clasa a XII-a*, Editura Taida, Iaşi, 2007
7. Cohal T., Popa G. – *Probleme de matematică pentru clasa a X-a*, Editura Paralela 45, Piteşti, 2008
8. Demidovich B. *et al.* – *Problems in Mathematical Analysis*, Mir Publishers, Moscow, 1976
9. Duca D., Duca E. – *Exerciţii şi probleme de analiză matematică*, Editura Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2007
10. Ganga M. – *Elemente de analiză matematică pentru clasa a XI-a*, Editura Mathpress, 1997
11. Ghermănescu M. – *Culegere de probleme pentru bacalaureat*, Tipografia Românească, Timişoara, 1947
12. Leonte A., Vîrtopeanu I. – *Bacalaureat. Probleme de matematică*, Star Trafic – S.F., Craiova, 1991
13. Panaitopol M.E., Radu G. – *Matematică – culegere de probleme, clasa a XI-a: subiecte date la admiterea în învăţământul superior şi bacalaureat*, Editura Europontic, Cluj-Napoca
14. Stănăşilă O., Popescu I., Cornea F. (coord.) – *Culegere de probleme rezolvate pentru admiterea în învăţământul superior*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989
15. Turtoiu F. – *Probleme de trigonometrie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986
16. Ţena M., Andronache M., Şerbănescu D. – *Matematică M1 – manual pentru clasa a XI-a*, Editura Art, 2007
17. Subiectele şi variantele de bacalaureat publicate de Ministerul Educaţiei între anii 1998 şi 2014

Cuprins

Calendarul examenului de bacalaureat – 2015 4
Cuvânt-înainte 5

TEME RECAPITULATIVE *Enunțuri Soluții*

Clasa a IX-a
1.1. Numere reale 7 226
1.2. Tipuri de raționamente logice 11 229
1.3. Șiruri. Progresii 13 231
1.4. Funcții. Funcția liniară 16 233
1.5. Ecuația de gradul II. Funcția de gradul II 20 236
1.6. Vectori 24 239
1.7. Trigonometrie 27 242
1.8. Aplicații ale trigonometriei în geometrie 30 244

Clasa a X-a
2.1. Radicali și logaritmi 33 247
2.2. Numere complexe 35 248
2.3. Funcții 38 249
2.4. Ecuații și inecuații 43 253
2.5. Combinatorică 47 256
2.6. Matematici aplicate. Probabilități 52 259
2.7. Geometrie analitică 54 260

Clasa a XI-a
3.1. Permutări 59 263
3.2. Matrice 60 263
3.3. Determinanți 63 266
3.4. Inversa unei matrice. Ecuații matriceale 67 267
3.5. Rangul unei matrice 69 269
3.6. Sisteme de ecuații liniare 71 270
3.7. Probleme de sinteză – algebră 75 272
3.8. Șiruri 79 276
3.9. Șiruri date prin formule de recurență .. 84 279
3.10. Limite de funcții 87 281
3.11. Asimptote 90 283
3.12. Funcții continue 91 284
3.13. Derivata unei funcții 94 287
3.14. Teorema lui Fermat. Teorema lui Rolle. Teorema lui Lagrange 98 290
3.15. Regulile lui l'Hospital 101 294
3.16. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor . 103 294
3.17. Reprezentarea grafică a funcțiilor ... 109 303
3.18. Probleme de sinteză – analiză matematică 112 308

Clasa a XII-a
4.1. Legi de compoziție 116 313
4.2. Grupuri 120 316
4.3. Inele și corpuri 126 320
4.4. Polinoame 130 324
4.5. Probleme de sinteză – algebră 137 330
4.6. Primitive 140 332
4.7. Formula lui Leibniz–Newton 144 334
4.8. Formula de integrare prin părți 149 338
4.9. Integrarea prin substituții 151 340
4.10. Inegalități 154 344
4.11. Teorema de existență a primitivelor unei funcții continue 158 348
4.12. Aplicații ale integralei definite 160 350
4.13. Probleme de sinteză – analiză matematică 163 353

TESTE PENTRU BACALAUREAT 2015, DUPĂ MODELUL M.E.N. 168 357

BREVIAR TEORETIC 376

Bibliografie 399

Scanned with OKEN Scanner